The Foundations of Arithmetic

GOTTLOB FREGE
1848–1925

The Foundations of Arithmetic

Die Grundlagen der Arithmetik

Translated from the German with AI (Claude) and edited



FORAGE
forage.com

The Foundations of Arithmetic · Gottlob Frege (1848–1925)

Translated from the German with AI (Claude) and edited. Parallel-text edition, Forage, October 2026. forage.com/frege/foundations-of-arithmetic

German text: the first edition, *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (Breslau: Wilhelm Koebner, 1884), from the Project Gutenberg transcription (www.gutenberg.org/ebooks/48312) (eBook #48312, made from the Internet Archive scans; public domain), with Project Gutenberg's correction of eight misprints. Frege's letter-spaced emphasis is shown in italics; his footnotes are kept, numbered within each paragraph; displayed formulas are run into the text, with a^b for powers. English: translated from the German with AI (Claude), then edited for accuracy and consistency. Not reviewed by a human specialist. Free to reuse under CC BY-SA 4.0. Margin numbers are Frege's numbered sections (§) and the paragraph within each; E marks the unnumbered Introduction.

The original text is in the public domain. This translation is free to share and adapt under the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International license (CC BY-SA 4.0): creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0

Set in Source Serif 4, with Gentium Book Plus.

CONTENTS

Introduction vii

Introduction 1
- Three fundamental principles 8
- The demand for rigorous proof 9

I. Views of Certain Writers on the Nature of Arithmetical Propositions 15
- Sind die Zahlformeln beweisbar? 15
- Mill's pebble arithmetic 18
- Are the laws of arithmetic inductive truths? 21
- Synthetic a priori or analytic? 25

II. Views of Certain Writers on the Concept of Number 33
- Is Number a property of external things? 35
- Is number something subjective? 40
- Number as a set 44

III. Views on Unity and One 47
- Drückt das Zahlwort »Ein« eine Eigenschaft von Gegenständen aus? 47
- Are units identical with one another? 51
- Attempts to overcome the difficulty 57
- Solution of the difficulty 62
- A statement of number is about a concept 64

IV. The Concept of Number 71
- Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger Gegenstand. 71
- Numbers as objects 72
- The sense of a numerical identity 77
- The definition of Number 82
- Testing the definition 83
- Zero, one and the successor 87
- Following in a series 92
- Infinite Numbers 95

V. Conclusion 99
- Kant and analytic judgments 99
- The need for a gapless proof 101
- Other numbers 103
- Summary of the argument 113

INTRODUCTION

Gottlob Frege (1848–1925) taught mathematics at the University of Jena for more than forty years and was little read in his lifetime. In 1879 he had invented, in his *Begriffsschrift*, the first modern system of logic. *The Foundations of Arithmetic* (1884) sets out, almost without symbols, what he meant to do with it: to show that arithmetic is a branch of logic, and that numbers are neither physical things nor ideas in anyone's mind.

The book begins by asking what the number one is, and finds that mathematicians cannot say. Frege then takes apart the answers of his predecessors—Mill's view that arithmetic is an empirical science, Kant's that its truths are synthetic a priori, and the many accounts of number as a heap of things, a property of things, or a mental image. His own answer rests on three principles stated in the Introduction, the second of which is famous: a word has meaning only in the context of a sentence. A statement of number, he argues, says something about a concept; the number of a concept is defined through the idea of one-to-one correlation, and the series of natural numbers is built up from zero by logic alone.

Bertrand Russell later showed that the system in which Frege tried to carry out this program was inconsistent. But the *Foundations* has outlived that failure. It is a classic of philosophical prose and a founding text of analytic philosophy and the philosophy of mathematics.

Introduction

Einleitung

What is the number one? Three guiding principles; then §§ 1–4: the demand for rigour, and the questions whether the laws of number are analytic or synthetic, a priori or a posteriori.

GERMAN

ENGLISH

E.1 Auf die Frage, was die Zahl Eins sei, oder was das Zeichen 1 bedeute, wird man meistens die Antwort erhalten: nun, ein Ding. Und wenn man dann darauf aufmerksam macht, dass der Satz »die Zahl Eins ist ein Ding« keine Definition ist, weil auf der einen Seite der bestimmte Artikel, auf der andern der unbestimmte steht, dass er nur besagt, die Zahl Eins gehöre zu den Dingen, aber nicht, welches Ding sie sei, so wird man vielleicht aufgefordert, sich irgendein Ding zu wählen, das man Eins nennen wolle. Wenn aber Jeder das Recht hätte, unter diesem Namen zu verstehen, was er will, so würde derselbe Satz von der Eins für Verschiedene Verschiedenes bedeuten; es gäbe keinen gemeinsamen Inhalt solcher Sätze.

Einige lehnen vielleicht die Frage mit dem Hinweise darauf ab, dass auch die Bedeutung des Buchstaben a in der Arithmetik nicht angegeben werden könne; und wenn man sage: a bedeutet eine Zahl, so könne hierin derselbe Fehler gefunden werden wie in der Definition: Eins ist ein Ding. Nun ist die Ablehnung der Frage in Bezug auf a ganz gerechtfertigt: es bedeutet keine bestimmte, angebbare Zahl, sondern dient dazu, die Allgemeinheit von Sätzen auszudrücken. Wenn man für a in a + a − a = a eine beliebige aber überall dieselbe Zahl setzt, so erhält man immer eine wahre Gleichung. In diesem Sinne wird der Buchstabe a gebraucht. Aber bei der Eins liegt die Sache doch wesentlich anders.

Können wir in der Gleichung 1 + 1 = 2 für 1 beidemal denselben Gegenstand, etwa den Mond setzen? Vielmehr scheint es, dass wir für die erste 1 etwas Anderes wie für die zweite setzen müssen. Woran liegt es, dass hier grade das geschehen muss, was in jenem Falle ein Fehler wäre? Die Arithmetik kommt mit dem Buchstaben a allein nicht aus, sondern muss noch andere b, c u. s. w. gebrauchen, um Beziehungen zwischen verschiedenen Zahlen allgemein auszudrücken. So sollte man denken, könnte auch das Zeichen 1 nicht genügen, wenn es in ähnlicher Weise dazu diente, den Sätzen eine Allgemeinheit zu verleihen. Aber erscheint nicht die Zahl Eins als

If we ask what the number one is, or what the sign 1 means, we will usually get the answer: well, a thing. And if we then point out that the sentence "the number one is a thing" is not a definition, because it has the definite article on one side and the indefinite on the other, and that it says only that the number one belongs among things, but not which thing it is, we may be invited to choose any thing we like and call it one. But if everyone had the right to understand by this name whatever he pleased, then the same sentence about one would mean different things for different people; such sentences would have no common content.

Some may dismiss the question by pointing out that the meaning of the letter a in arithmetic cannot be specified either, and that if one says "a means a number", the same fault can be found in this as in the definition "one is a thing". Now, dismissing the question is entirely justified in the case of a: it does not mean a particular, specifiable number, but serves to express the generality of propositions. If in a + a − a = a we put for a any number we like, but the same one throughout, we always obtain a true equation. That is the sense in which the letter a is used. But with one the matter is essentially different.

In the equation 1 + 1 = 2, can we put the same object for 1 both times, the moon, say? It seems, rather, that we must put something different for the first 1 than for the second. Why must precisely what would be a mistake in the other case happen here? Arithmetic cannot make do with the letter a alone. It must also use other letters, b, c, etc., to express relations between different numbers in general. So, one would think, the sign 1 could not suffice either, if it served in a similar way to lend generality to propositions. But does the number one not appear as a definite object with specifiable

GERMAN

bestimmter Gegenstand mit angebbaren Eigenschaften, z. B. mit sich selbst multiplicirt unverändert zu bleiben?

In diesem Sinne kann man von a keine Eigenschaften angeben; denn was von a ausgesagt wird, ist eine gemeinsame Eigenschaft der Zahlen, während $1^1 = 1$ weder vom Monde etwas aussagt, noch von der Sonne, noch von der Sahara, noch vom Pic von Teneriffa; denn was könnte der Sinn einer solchen Aussage sein?

E.2 Auf solche Fragen werden wohl auch die meisten Mathematiker keine genügende Antwort bereit haben. Ist es nun nicht für die Wissenschaft beschämend, so im Unklaren über ihren nächstliegenden und scheinbar so einfachen Gegenstand zu sein? Um so weniger wird man sagen können, was Zahl sei. Wenn ein Begriff, der einer grossen Wissenschaft zu Grunde liegt, Schwierigkeiten darbietet, so ist es doch wohl eine unabweisbare Aufgabe, ihn genauer zu untersuchen und diese Schwierigkeiten zu überwinden, besonders da es schwer gelingen möchte, über die negativen, gebrochenen, complexen Zahlen zu voller Klarheit zu kommen, solange noch die Einsicht in die Grundlage des ganzen Baues der Arithmetik mangelhaft ist.

E.3 Viele werden das freilich nicht der Mühe werth achten. Dieser Begriff ist ja, wie sie meinen, in den Elementarbüchern hinreichend behandelt und damit für das ganze Leben abgethan. Wer glaubt denn über eine so einfache Sache noch etwas lernen zu können! Für so frei von jeder Schwierigkeit hält man den Begriff der positiven ganzen Zahl, dass er für Kinder wissenschaftlich erschöpfend behandelt werden könne, und dass Jeder ohne weiteres Nachdenken und ohne Bekanntschaft mit dem, was Andere gedacht haben, genau von ihm Bescheid wisse. So fehlt denn vielfach jene erste Vorbedingung des Lernens: das Wissen des Nichtwissens. Die Folge ist, dass man sich noch immer mit einer rohen Auffassung begnügt, obwohl schon *Herbart*[1] eine richtigere gelehrt hat.

Es ist betrübend und entmuthigend, dass in dieser Weise eine Erkenntniss immer wieder verloren zu gehen droht, die schon errungen war, dass so manche Arbeit vergeblich zu werden scheint, weil man im eingebildeten Reichthume nicht nöthig zu haben glaubt, sich ihre Früchte anzueignen. Auch diese Arbeit, sehe ich wohl, ist solcher Gefahr ausgesetzt. Jene Roheit der Auffassung tritt mir entgegen, wenn das Rechnen aggregatives, mechanisches Denken genannt wird[2]. Ich bezweifle,

ENGLISH

properties, for example that of remaining unchanged when multiplied by itself?

In this sense no properties of a can be specified; for what is asserted of a is a property common to numbers, whereas $1^1 = 1$ asserts nothing of the moon, nor of the sun, nor of the Sahara, nor of the Peak of Tenerife; for what could be the sense of such an assertion?

Even most mathematicians will probably have no adequate answer ready to such questions. Is it not shameful for science to be so unclear about its most immediate and seemingly so simple object? All the less will anyone be able to say what number is. When a concept that lies at the foundation of a great science presents difficulties, it is surely an inescapable task to investigate it more closely and to overcome those difficulties. This is all the more so because it will hardly be possible to achieve full clarity about negative, fractional and complex numbers so long as our insight into the foundation of the whole edifice of arithmetic is still deficient.

Many, of course, will not think this worth the trouble. This concept, they believe, is adequately treated in the elementary textbooks and thereby settled for life. Who imagines there is anything left to learn about so simple a matter! The concept of positive whole number is thought to be so free of every difficulty that it can be treated exhaustively and scientifically for children, and that everyone knows all about it precisely, without further reflection and without any acquaintance with what others have thought. And so that first precondition of learning is often missing: the knowledge of not knowing. The result is that people still content themselves with a crude conception, although *Herbart*[1] long ago taught a more correct one.[1]

It is saddening and discouraging that in this way an insight already won keeps threatening to be lost again. Many a piece of work seems to come to nothing because people, in their imagined riches, believe they have no need to make its fruits their own. This work too, I am well aware, is exposed to that danger. I meet that crudeness of conception when calculation is called aggregative, mechanical thinking[2]. I doubt that any such thinking ex-

1 Johann Friedrich Herbart (1776–1841), German philosopher, psychologist and theorist of education.

GERMAN

dass es ein solches Denken überhaupt giebt. Aggregatives Vorstellen könnte man schon eher gelten lassen; aber es ist für das Rechnen ohne Bedeutung. Das Denken ist im Wesentlichen überall dasselbe: es kommen nicht je nach dem Gegenstande verschiedene Arten von Denkgesetzen in Betracht.

Die Unterschiede bestehen nur in der grösseren oder geringeren Reinheit und Unabhängigkeit von psychologischen Einflüssen und von äussern Hilfen des Denkens wie Sprache, Zahlzeichen und dgl., dann etwa noch in der Feinheit des Baues der Begriffe; aber grade in dieser Rücksicht möchte die Mathematik von keiner Wissenschaft, selbst der Philosophie nicht, übertroffen werden.

ENGLISH

ists at all. Aggregative ideation might more readily be allowed; but it is of no significance for calculation. Thinking is essentially the same everywhere: different kinds of laws of thought do not come into play depending on the object.

The differences consist only in greater or lesser purity and independence from psychological influences and from external aids to thinking such as language, numerals and the like, and then perhaps also in the fineness of the structure of the concepts. But precisely in this last respect mathematics is hardly surpassed by any science, not even by philosophy.

24

E.4

Man wird aus dieser Schrift ersehen können, dass auch ein scheinbar eigenthümlich mathematischer Schluss wie der von n auf n + 1 auf den allgemeinen logischen Gesetzen beruht, dass es besondrer Gesetze des aggregativen Denkens nicht bedarf. Man kann freilich die Zahlzeichen mechanisch gebrauchen, wie man papageimässig sprechen kann; aber Denken möchte das doch kaum zu nennen sein. Es ist nur möglich, nachdem durch wirkliches Denken die mathematische Zeichensprache so ausgebildet ist, dass sie, wie man sagt, für einen denkt. Dies beweist nicht, dass die Zahlen in einer besonders mechanischen Weise, etwa wie Sandhaufen aus Quarzkörnern gebildet sind. Es liegt, denke ich, im Interesse der Mathematiker einer solchen Ansicht entgegenzutreten, welche einen hauptsächlichen Gegenstand ihrer Wissenschaft und damit diese selbst herabzusetzen geeignet ist.

Aber auch bei Mathematikern findet man ganz ähnliche Aussprüche. Im Gegentheil wird man dem Zahlbegriffe einen feineren Bau zuerkennen müssen als den meisten Begriffen andrer Wissenschaften, obwohl er noch einer der einfachsten arithmetischen ist.

This work will show that even an apparently peculiarly mathematical inference, such as that from n to n + 1, rests on the general laws of logic, and that no special laws of aggregative thinking are needed. One can, of course, use numerals mechanically, just as one can talk like a parrot; but that could hardly be called thinking. It is possible only after actual thinking has so developed the mathematical sign language that it does the thinking for us, as people say. This does not prove that numbers are formed in some peculiarly mechanical way, as heaps of sand are formed from grains of quartz. It is in the interest of mathematicians, I think, to oppose such a view, which is apt to belittle a principal object of their science, and with it the science itself.

Yet quite similar pronouncements are found among mathematicians too. On the contrary, we shall have to grant the concept of number a finer structure than most concepts of other sciences, even though it is still one of the simplest in arithmetic.

2

[1] Sämmtliche Werke, herausgegeb. von Hartenstein, Bd. X, 1 Thl. Umriss pädagogischer Vorlesungen § 252, Anm. 2: »Zwei heisst nicht zwei Dinge, sondern Verdoppelung« u. s. w.

[1] Sämmtliche Werke, ed. Hartenstein, vol. X, pt 1, Umriss pädagogischer Vorlesungen [Outline of Lectures on Education], § 252, note 2: "Two does not mean two things, but doubling," etc.

4

[2] K. Fischer, System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre, 2. Aufl. § 94.

[2] K. Fischer, System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre [System of Logic and Metaphysics, or Theory of Science], 2nd edn, § 94.[3]

3 Kuno Fischer (1824–1907), German historian of philosophy.

	GERMAN	ENGLISH
E.5	Um nun jenen Wahn zu widerlegen, dass in Bezug auf die positiven ganzen Zahlen eigentlich gar keine Schwierigkeiten obwalten, sondern allgemeine Uebereinstimmung herrsche, schien es mir gut, einige Meinungen von Philosophen und Mathematikern über die hier in Betracht kommenden Fragen zu besprechen. Man wird sehn, wie wenig von Einklang zu finden ist, sodass geradezu entgegengesetzte Aussprüche vorkommen. Die Einen sagen z. B.: »die Einheiten sind einander gleich«, die Andern halten sie für verschieden, und beide haben Gründe für ihre Behauptung, die sich nicht kurzer Hand abweisen lassen. Hierdurch suche ich das Bedürfniss nach einer genaueren Untersuchung zu wecken.	Now, to refute the delusion that there are really no difficulties at all about the positive whole numbers and that universal agreement reigns, it seemed good to me to discuss some opinions of philosophers and mathematicians on the questions at issue here. It will be seen how little concord there is to be found, so little that directly contradictory pronouncements occur. Some say, for example, "units are identical with one another"; others hold them to be different, and both have reasons for their claim that cannot be dismissed out of hand. In this way I seek to awaken the need for a more exact investigation.[5]
	Zugleich will ich durch die vorausgeschickte Beleuchtung der von Andern ausgesprochenen Ansichten meiner eignen Auffassung den Boden ebnen, damit man sich vorweg überzeuge, dass jene andern Wege nicht zum Ziele führen, und dass meine Meinung nicht eine von vielen gleichberechtigten ist; und so hoffe ich die Frage wenigstens in der Hauptsache endgiltig zu entscheiden.	At the same time, by first examining the views others have expressed, I want to prepare the ground for my own conception. I want the reader to be convinced in advance that those other paths do not lead to the goal, and that my opinion is not one of many with equal claims. In this way I hope to settle the question definitively, at least in its main points.
E.6	Freilich sind meine Ausführungen hierdurch wohl philosophischer geworden, als vielen Mathematikern angemessen scheinen mag; aber eine gründliche Untersuchung des Zahlbegriffes wird immer etwas philosophisch ausfallen müssen. Diese Aufgabe ist der Mathematik und Philosophie gemeinsam.	Admittedly, my discussion has thereby probably become more philosophical than many mathematicians may think proper; but a thorough investigation of the concept of number will always have to turn out somewhat philosophical. This task is common to mathematics and philosophy.
E.7	Wenn das Zusammenarbeiten dieser Wissenschaften trotz mancher Anläufe von beiden Seiten nicht ein so gedeihliches ist, wie es zu wünschen und wohl auch möglich wäre, so liegt das, wie mir scheint, an dem Ueberwiegen psychologischer Betrachtungsweisen in der Philosophie, die selbst in die Logik eindringen. Mit dieser Richtung hat die Mathematik gar keine Berührungspunkte, und daraus erklärt sich leicht die Abneigung vieler Mathematiker gegen philosophische Betrachtungen. Wenn z. B. *Stricker*[1] die Vorstellungen der Zahlen motorisch, von Muskelgefühlen abhängig nennt, so kann der Mathematiker seine Zahlen darin nicht wiedererkennen und weiss mit einem solchen Satze nichts anzufangen. Eine Arithmetik, die auf Muskelgefühle gegründet wäre, würde gewiss recht gefühlvoll, aber auch ebenso verschwommen ausfallen wie diese Grundlage. Nein, mit Gefühlen hat die Arithmetik gar nichts zu schaffen.	Despite many attempts from both sides, the collaboration of these sciences is not as fruitful as would be desirable and indeed possible. The reason, it seems to me, is the predominance in philosophy of psychological ways of looking at things, which have penetrated even into logic. Mathematics has no points of contact whatever with this tendency, and that easily explains the aversion of many mathematicians to philosophical reflection. When, for example, *Stricker*[1] calls the ideas of numbers motor ideas, dependent on muscular feelings, the mathematician cannot recognize his numbers in this and does not know what to make of such a proposition. An arithmetic founded on muscular feelings would certainly turn out full of feeling, but also just as blurred as this foundation. No, arithmetic has nothing whatever to do with feelings.[6]

5 German *Einheit* means both "unit" (a thing counted) and "unity" (oneness); the translation chooses by sense.

GERMAN

Ebensowenig mit innern Bildern, die aus Spuren früherer Sinneseindrücke zusammengeflossen sind. Das Schwankende und Unbestimmte, welches alle diese Gestaltungen haben, steht im starken Gegensatze zu der Bestimmtheit und Festigkeit der mathematischen Begriffe und Gegenstände. Es mag ja von Nutzen sein, die Vorstellungen und deren Wechsel zu betrachten, die beim mathematischen Denken vorkommen; aber die Psychologie bilde sich nicht ein, zur Begründung der Arithmetik irgendetwas beitragen zu können. Dem Mathematiker als solchem sind diese innern Bilder, ihre Entstehung und Veränderung gleichgiltig. *Stricker* sagt selbst, dass er sich beim Worte »Hundert« weiter nichts vorstellt als das Zeichen 100.

Andere mögen sich den Buchstaben C oder sonst etwas vorstellen; geht daraus nicht hervor, dass diese innern Bilder in unserm Falle für das Wesen der Sache vollkommen gleichgiltig und zufällig sind, ebenso zufällig wie eine schwarze Tafel und ein Stück Kreide, dass sie überhaupt nicht Vorstellungen der Zahl Hundert zu heissen verdienen? Man sehe doch nicht das Wesen der Sache in solchen Vorstellungen! Man nehme nicht die Beschreibung, wie eine Vorstellung entsteht, für eine Definition und nicht die Angabe der seelischen und leiblichen Bedingungen dafür, dass uns ein Satz zum Bewusstsein kommt, für einen Beweis und verwechsele das Gedachtwerden eines Satzes nicht mit seiner Wahrheit!

Man muss, wie es scheint, daran erinnern, dass ein Satz ebensowenig aufhört, wahr zu sein, wenn ich nicht mehr an ihn denke, wie die Sonne vernichtet wird, wenn ich die Augen schliesse. Sonst kommen wir noch dahin, dass man beim Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes es nöthig findet, des Phosphorgehaltes unseres Gehirnes zu gedenken, und dass ein Astronom sich scheut, seine Schlüsse auf längst vergangene Zeiten zu erstrecken, damit man ihm nicht einwende: »du rechnest da $2 \cdot 2 = 4$; aber die Zahlvorstellung hat ja eine Entwickelung, eine Geschichte! Man kann zweifeln, ob sie damals schon so weit war. Woher weisst du, dass in jener Vergangenheit dieser Satz schon bestand?

Könnten die damals lebenden Wesen nicht den Satz $2 \cdot 2 = 5$ gehabt haben, aus dem sich erst durch natürliche Züchtung im Kampf ums Dasein der Satz $2 \cdot 2 = 4$ entwickelt hat, der seinerseits vielleicht dazu bestimmt ist, auf demselben Wege sich zu $2 \cdot 2 = 3$ fortzubilden?« Est

ENGLISH

Nor has it anything to do with inner images, compounded from traces of earlier sense impressions. The fluctuating and indefinite character of all these formations stands in sharp contrast to the definiteness and fixity of mathematical concepts and objects. It may indeed be useful to study the ideas that occur in mathematical thinking and how they change; but let psychology not imagine that it can contribute anything whatever to the foundation of arithmetic. To the mathematician as such, these inner images, their origin and their alteration, are a matter of indifference. *Stricker* himself says that the word "hundred" calls up in him nothing but the sign 100.

Others may picture the letter C or something else. Does it not follow that in our case these inner images are entirely indifferent and accidental to the essence of the matter, as accidental as a blackboard and a piece of chalk, and that they do not deserve to be called ideas of the number hundred at all? Let us not look for the essence of the matter in such ideas! Let us not take the description of how an idea arises for a definition, nor an account of the mental and physical conditions under which we become conscious of a proposition for a proof; and let us not confuse a proposition's being thought with its truth!

It seems we must be reminded that a proposition no more ceases to be true when I stop thinking of it than the sun is annihilated when I close my eyes. Otherwise we shall end up thinking it necessary, when proving the Pythagorean theorem, to recall the phosphorus content of our brain; and an astronomer will shrink from extending his conclusions to times long past, for fear of the objection: "You calculate there that $2 \cdot 2 = 4$; but the idea of number has a development, a history! One may doubt whether it had already got that far back then. How do you know that this proposition already held in that distant past?

Might not the beings living then have had the proposition $2 \cdot 2 = 5$, from which the proposition $2 \cdot 2 = 4$ only developed through natural selection in the struggle for existence, a proposition that is perhaps destined in its turn to evolve by the same

6 Salomon Stricker (1834–1898), Austrian physiologist and pathologist. "Idea" translates *Vorstellung*, which Frege always uses in the subjective, psychological sense.

GERMAN

modus in rebus, sunt certi denique fines! Die geschichtliche Betrachtungsweise, die das Werden der Dinge zu belauschen und aus dem Werden ihr Wesen zu erkennen sucht, hat gewiss eine grosse Berechtigung; aber sie hat auch ihre Grenzen. Wenn in dem beständigen Flusse aller Dinge nichts Festes, Ewiges beharrte, würde die Erkennbarkeit der Welt aufhören und Alles in Verwirrung stürzen.

Man denkt sich, wie es scheint, dass die Begriffe in der einzelnen Seele so entstehen, wie die Blätter an den Bäumen und meint ihr Wesen dadurch erkennen zu können, dass man ihrer Entstehung nachforscht und sie aus der Natur der menschlichen Seele psychologisch zu erklären sucht. Aber diese Auffassung zieht Alles ins Subjective und hebt, bis ans Ende verfolgt, die Wahrheit auf. Was man Geschichte der Begriffe nennt, ist wohl entweder eine Geschichte unserer Erkenntniss der Begriffe oder der Bedeutungen der Wörter. Durch grosse geistige Arbeit, die Jahrhunderte hindurch andauern kann, gelingt es oft erst, einen Begriff in seiner Reinheit zu erkennen, ihn aus den fremden Umhüllungen herauszuschälen, die ihn dem geistigen Auge verbargen.

Was soll man nun dazu sagen, wenn jemand, statt diese Arbeit, wo sie noch nicht vollendet scheint, fortzusetzen, sie für nichts achtet, in die Kinderstube geht oder sich in ältesten erdenkbaren Entwickelungsstufen der Menschheit zurückversetzt, um dort wie *J. St. Mill* etwa eine Pfefferkuchen- oder Kieselsteinarithmetik zu entdecken! Es fehlt nur noch, dem Wohlgeschmacke des Kuchens eine besondere Bedeutung für den Zahlbegriff zuzuschreiben. Dies ist doch das grade Gegentheil eines vernünftigen Verfahrens und jedenfalls so unmathematisch wie möglich. Kein Wunder, dass die Mathematiker nichts davon wissen wollen! Statt eine besondere Reinheit der Begriffe da zu finden, wo man ihrer Quelle nahe zu sein glaubt, sieht man Alles verschwommen und ungesondert wie durch einen Nebel.

Es ist so, als ob jemand, um Amerika kennen zu lernen, sich in die Lage des Columbus zurückversetzen wollte, als er den ersten zweifelhaften Schimmer seines vermeintlichen Indiens erblickte. Freilich beweist ein solcher Vergleich nichts; aber er verdeutlicht hoffentlich

ENGLISH

route into 2 · 2 = 3?" Est modus in rebus, sunt certi denique fines! [There is a measure in things; there are, in the end, fixed limits!] The historical approach, which tries to eavesdrop on the becoming of things and to recognize their essence from their becoming, is certainly fully justified; but it also has its limits. If nothing fixed and eternal persisted in the constant flux of all things, the world would cease to be knowable and everything would be plunged into confusion.[7]

People seem to imagine that concepts arise in the individual mind the way leaves grow on trees, and they think they can recognize the essence of concepts by investigating their origin and trying to explain them psychologically from the nature of the human mind. But this conception draws everything into the subjective, and, followed through to the end, abolishes truth. What is called the history of concepts is probably either a history of our knowledge of concepts or a history of the meanings of words. Often it is only through great intellectual labor, which can go on for centuries, that we succeed in recognizing a concept in its purity, in peeling it out of the alien wrappings that hid it from the mind's eye.

What, then, are we to say when someone, instead of continuing this work where it does not yet seem complete, treats it as worthless and goes off to the nursery, or transports himself back to the earliest conceivable stages of human development, in order to discover there, like *J. S. Mill*, some gingerbread or pebble arithmetic! All that is missing is to ascribe a special significance for the concept of number to the pleasant taste of the gingerbread. This is surely the very opposite of a rational procedure, and at any rate as unmathematical as possible. No wonder mathematicians want nothing to do with it! Instead of finding a special purity of concepts where one believes oneself to be near their source, one sees everything blurred and undifferentiated, as through a fog.[8]

It is as if someone wanted to get to know America by putting himself back in the position of Columbus when he caught the first doubtful glimmer of his supposed India. Such a comparison proves nothing, of course; but I hope it makes my mean-

7 Horace, *Satires* I.1.106.

8 John Stuart Mill (1806–1873), British philosopher, whose *System of Logic* (1843) treats arithmetic as an empirical science.

	GERMAN	ENGLISH
	meine Meinung. Es kann ja sein, dass die Geschichte der Entdeckungen in vielen Fällen als Vorbereitung für weitere Forschungen nützlich ist; aber sie darf nicht an deren Stelle treten wollen.	ing clear. It may well be that in many cases the history of discoveries is useful as a preparation for further research; but it must not try to take its place.
9		
E.8	Dem Mathematiker gegenüber, wäre eine Bekämpfung solcher Auffassungen wohl kaum nöthig gewesen; aber da ich auch für die Philosophen die behandelten Streitfragen möglichst zum Austrage bringen wollte, war ich genöthigt, mich auf die Psychologie ein wenig einzulassen, wenn auch nur, um ihren Einbruch in die Mathematik zurückzuweisen.	For mathematicians, it would hardly have been necessary to combat such views. But since I wanted to settle the disputed questions treated here as far as possible for philosophers too, I was forced to engage a little with psychology, if only to repel its incursion into mathematics.
E.9	Uebrigens kommen auch in mathematischen Lehrbüchern psychologische Wendungen vor. Wenn man eine Verpflichtung fühlt, eine Definition zu geben, ohne es zu können, so will man wenigstens die Weise beschreiben, wie man zu dem betreffenden Gegenstande oder Begriffe kommt. Man erkennt diesen Fall leicht daran, dass im weitern Verlaufe nie mehr auf eine solche Erklärung zurückgegriffen wird. Für Lehrzwecke ist eine Hinführung auf die Sache auch ganz am Platze; nur sollte man sie von einer Definition immer deutlich unterscheiden. Dass auch Mathematiker Beweisgründe mit innern oder äussern Bedingungen der Führung eines Beweises verwechseln können, dafür liefert E. *Schröder*[1] ein ergötzliches Beispiel, indem er unter der Ueberschrift: »Einziges Axiom« Folgendes darbietet: »Das gedachte Princip könnte wohl das Axiom der Inhärenz der Zeichen genannt werden. Es giebt uns die Gewissheit, dass bei allen unsern Entwicklungen und Schlussfolgerungen die Zeichen in unserer Erinnerung – noch fester aber am Papiere – haften« u. s. w.	Incidentally, psychological turns of phrase occur in mathematical textbooks too. When an author feels obliged to give a definition but cannot, he wants at least to describe the way one arrives at the object or concept in question. Such cases are easily recognized, because the explanation is never referred back to later on. For teaching purposes, leading the student toward the thing is quite in order; only it should always be clearly distinguished from a definition. E. *Schröder*[1] supplies an amusing example of how mathematicians, too, can confuse the grounds of a proof with the inner or outer conditions for carrying it out. Under the heading “Sole Axiom” he offers the following: “The principle in question might well be called the axiom of the inherence of signs.[10] It gives us the certainty that in all our developments and deductions the signs stick in our memory—but even more firmly to the paper,” etc.
11		
E.10	So sehr sich nun die Mathematik jede Beihilfe vonseiten der Psychologie verbitten muss, so wenig kann sie ihren engen Zusammenhang mit der Logik verleugnen. Ja, ich stimme der Ansicht derjenigen bei, die eine scharfe Trennung für unthunlich halten. Soviel wird man zugeben, dass jede Untersuchung über die Bündigkeit einer Beweisführung oder die Berechtigung einer Definition logisch sein muss. Solche Fragen sind aber gar	But however firmly mathematics must refuse any help from psychology, it can just as little deny its close connection with logic. Indeed, I agree with those who consider a sharp separation impracticable. This much will be granted: every investigation into the cogency of a proof or the legitimacy of a definition must be logical. But such questions

9

[1] Studien über Association der Vorstellungen. Wien 1883.

[1] Studien über Association der Vorstellungen [Studies on the Association of Ideas]. Vienna 1883.

10 Ernst Schröder (1841–1902), German mathematician and logician.

11

[1] Lehrbuch der Arithmetik und Algebra.

[1] Lehrbuch der Arithmetik und Algebra [Textbook of Arithmetic and Algebra].

	GERMAN	ENGLISH
	nicht von der Mathematik abzuweisen, da nur durch ihre Beantwortung die nöthige Sicherheit erreichbar ist.	cannot possibly be dismissed from mathematics, since only by answering them can the necessary certainty be reached.
E.11	Auch in dieser Richtung gehe ich freilich etwas über das Uebliche hinaus. Die meisten Mathematiker sind bei Untersuchungen ähnlicher Art zufrieden, dem unmittelbaren Bedürfnisse genügt zu haben. Wenn sich eine Definition willig zu den Beweisen hergiebt, wenn man nirgends auf Widersprüche stösst, wenn sich Zusammenhänge zwischen scheinbar entlegnen Sachen erkennen lassen und wenn sich dadurch eine höhere Ordnung und Gesetzmässigkeit ergiebt, so pflegt man die Definition für genügend gesichert zu halten und fragt wenig nach ihrer logischen Rechtfertigung. Dies Verfahren hat jedenfalls das Gute, dass man nicht leicht das Ziel gänzlich verfehlt. Auch ich meine, dass die Definitionen sich durch ihre Fruchtbarkeit bewähren müssen, durch die Möglichkeit, Beweise mit ihnen zu führen.	In this direction too, admittedly, I go somewhat beyond what is usual. In investigations of this kind most mathematicians are satisfied once they have met the immediate need. If a definition lends itself willingly to proofs, if no contradictions are encountered anywhere, if connections between apparently remote matters come to light, and if a higher order and regularity results, then the definition is usually regarded as sufficiently secured, and little is asked about its logical justification. This procedure at least has the merit that one does not easily miss the goal entirely. I too think that definitions must prove themselves by their fruitfulness, by making it possible to carry out proofs with them.
	Aber es ist wohl zu beachten, dass die Strenge der Beweisführung ein Schein bleibt, mag auch die Schlusskette lückenlos sein, wenn die Definitionen nur nachträglich dadurch gerechtfertigt werden, dass man auf keinen Widerspruch gestossen ist. So hat man im Grunde immer nur eine erfahrungsmässige Sicherheit erlangt und muss eigentlich darauf gefasst sein, zuletzt doch noch einen Widerspruch anzutreffen, der das ganze Gebäude zum Einsturze bringt. Darum glaubte ich etwas weiter auf die allgemeinen logischen Grundlagen zurückgehn zu müssen, als vielleicht von den meisten Mathematikern für nöthig gehalten wird.	But we must bear in mind that the rigor of a proof remains an illusion, however gapless the chain of inference, if the definitions are justified only after the fact, by our not having run into any contradiction. In that case we have basically attained only an empirical certainty, and must really be prepared to meet in the end with a contradiction that brings the whole edifice crashing down. That is why I believed I had to go back to the general logical foundations somewhat further than most mathematicians perhaps think necessary.

THREE FUNDAMENTAL PRINCIPLES

Frege states the three principles that guide the whole investigation.

	GERMAN	ENGLISH
E.12	Als Grundsätze habe ich in dieser Untersuchung folgende festgehalten:	In this investigation I have kept to the following fundamental principles:
E.13	es ist das Psychologische von dem Logischen, das Subjective von dem Objectiven scharf zu trennen;	always to separate sharply the psychological from the logical, the subjective from the objective;
E.14	nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden;	never to ask for the meaning of a word in isolation, but only in the context of a sentence;
E.15	der Unterschied zwischen Begriff und Gegenstand ist im Auge zu behalten.	never to lose sight of the distinction between concept and object.
E.16	Um das Erste zu befolgen, habe ich das Wort »Vorstellung« immer im psychologischen Sinne	To comply with the first, I have always used the word “idea” in the psychological sense, and have

	GERMAN	ENGLISH
	gebraucht und die Vorstellungen von den Begriffen und Gegenständen unterschieden. Wenn man den zweiten Grundsatz unbeachtet lässt, ist man fast genöthigt, als Bedeutung der Wörter innere Bilder oder Thaten der einzelnen Seele zu nehmen und damit auch gegen den ersten zu verstossen. Was den dritten Punkt betrifft, so ist es nur Schein, wenn man meint, einen Begriff zum Gegenstande machen zu können, ohne ihn zu verändern. Von hieraus ergiebt sich die Unhaltbarkeit einer verbreiteten formalen Theorie der Brüche, negativen Zahlen u. s. w. Wie ich die Verbesserung denke, kann ich in dieser Schrift nur andeuten.	distinguished ideas from concepts and objects. If the second principle is disregarded, one is almost forced to take inner images or acts of the individual mind as the meaning of words, and so to violate the first principle as well. As for the third point, it is a mere illusion to suppose that a concept can be made into an object without being altered. From this follows the untenability of a widespread formal theory of fractions, negative numbers, etc. How I envisage the improvement I can only indicate in this work.
	Es wird in allen diesen Fällen wie bei den positiven ganzen Zahlen darauf ankommen, den Sinn einer Gleichung festzustellen.	In all these cases, as with the positive whole numbers, what matters will be to establish the sense of an equation.
E.17	Meine Ergebnisse werden, denke ich, wenigstens in der Hauptsache die Zustimmung der Mathematiker finden, welche sich die Mühe nehmen, meine Gründe in Betracht zu ziehn. Sie scheinen mir in der Luft zu liegen und einzeln sind sie vielleicht schon alle wenigstens annähernd ausgesprochen worden; aber in diesem Zusammenhange mit einander möchten sie doch neu sein. Ich habe mich manchmal gewundert, dass Darstellungen, die in Einem Punkte meiner Auffassung so nahe kommen, in andern so stark abweichen.	My results will, I think, meet with the agreement of those mathematicians who take the trouble to consider my reasons, at least in the main. They seem to me to be in the air, and perhaps each of them individually has already been stated, at least approximately; but in this connection with one another they may well be new. I have sometimes been surprised that accounts which come so close to my conception on one point diverge so sharply from it on others.
E.18	Die Aufnahme bei den Philosophen wird je nach dem Standpunkte verschieden sein, am schlechtesten wohl bei jenen Empirikern, die als ursprüngliche Schlussweise nur die Induction anerkennen wollen und auch diese nicht einmal als Schlussweise, sondern als Gewöhnung. Vielleicht unterzieht Einer oder der Andere bei dieser Gelegenheit die Grundlagen seiner Erkenntnisstheorie einer erneueten Prüfung. Denen, welche etwa meine Definitionen für unnatürlich erklären möchten, gebe ich zu bedenken, dass die Frage hier nicht ist, ob natürlich, sondern ob den Kern der Sache treffend und logisch einwurfsfrei.	Among philosophers the reception will vary with their standpoint. It will probably be worst among those empiricists who recognize induction as the only original mode of inference, and not even that as a mode of inference, but as habituation. Perhaps one or another will take this occasion to subject the foundations of his theory of knowledge to a fresh examination. To those who might declare my definitions unnatural, I would point out that the question here is not whether they are natural, but whether they go to the heart of the matter and are logically unobjectionable.
E.19	Ich gebe mich der Hoffnung hin, dass bei vorurtheilsloser Prüfung auch die Philosophen einiges Brauchbare in dieser Schrift finden werden.	I indulge the hope that philosophers too, if they examine it without prejudice, will find something useful in this work.

THE DEMAND FOR RIGOROUS PROOF

Mathematics is returning to strict proof, which leads back to the concept of Number.

	GERMAN	ENGLISH
1.1	Nachdem die Mathematik sich eine Zeit lang von der euklidischen Strenge entfernt hatte, kehrt sie jetzt zu ihr	After mathematics had for a time strayed from Euclidean rigor, it is now returning to it, and is even

GERMAN

zurück und strebt gar über sie hinaus. In der Arithmetik war schon infolge des indischen Ursprungs vieler ihrer Verfahrungsweisen und Begriffe eine laxere Denkweise hergebracht als in der von den Griechen vornehmlich ausgebildeten Geometrie. Sie wurde durch die Erfindung der höhern Analysis nur gefördert; denn einerseits stellten sich einer strengen Behandlung dieser Lehren erhebliche, fast unbesiegliche Schwierigkeiten entgegen, deren Ueberwindung andrerseits die darauf verwendeten Anstrengungen wenig lohnen zu wollen schien. Doch hat die weitere Entwickelung immer deutlicher gelehrt, dass in der Mathematik eine blos moralische Ueberzeugung, gestützt auf viele erfolgreiche Anwendungen, nicht genügt. Für Vieles wird jetzt ein Beweis gefordert, was früher für selbstverständlich galt.

Die Grenzen der Giltigkeit sind erst dadurch in manchen Fällen festgestellt worden. Die Begriffe der Function, der Stetigkeit, der Grenze, des Unendlichen haben sich einer schärferen Bestimmung bedürftig gezeigt. Das Negative und die Irrationalzahl, welche längst in die Wissenschaft aufgenommen waren, haben sich einer genaueren Prüfung ihrer Berechtigung unterwerfen müssen.

1.2 So zeigt sich überall das Bestreben, streng zu beweisen, die Giltigkeitsgrenzen genau zu ziehen und, um dies zu können, die Begriffe scharf zu fassen.

2.1 Dieser Weg muss im weitern Verfolge auf den Begriff der Anzahl und auf die von positiven ganzen Zahlen geltenden einfachsten Sätze führen, welche die Grundlage der ganzen Arithmetik bilden. Freilich sind Zahlformeln wie 5 + 7 = 12 und Gesetze wie das der Associativität bei der Addition durch die unzähligen Anwendungen, die tagtäglich von ihnen gemacht werden, so vielfach bestätigt, dass es fast lächerlich erscheinen kann, sie durch das Verlangen nach einem Beweise in Zweifel ziehen zu wollen. Aber es liegt im Wesen der Mathematik begründet, dass sie überall, wo ein Beweis möglich ist, ihn der Bewährung durch Induction vorzieht. Euklid beweist Vieles, was ihm jeder ohnehin zugestehen würde.

Indem man sich selbst an der euklidischen Strenge nicht genügen liess, ist man auf die Untersuchungen geführt worden, welche sich an das Parallelenaxiom geknüpft haben.

2.2 So ist jene auf grösste Strenge gerichtete Bewegung schon vielfach über das zunächst gefühlte Bedürfniss

ENGLISH

striving to go beyond it. In arithmetic, simply because many of its procedures and concepts are of Indian origin, a laxer way of thinking had become customary than in geometry, which was developed chiefly by the Greeks. The invention of higher analysis only encouraged this. On the one hand, a rigorous treatment of these doctrines met with considerable, almost insuperable difficulties; on the other, overcoming them seemed hardly to repay the effort. Yet further developments have shown ever more clearly that in mathematics a merely moral conviction, supported by many successful applications, is not enough. Proof is now demanded for many things that formerly passed as self-evident.

Only in this way have the limits of validity been established in many cases. The concepts of function, continuity, limit and the infinite have turned out to need sharper determination. Negative and irrational numbers, which had long been admitted into science, have had to submit to a closer examination of their legitimacy.

Thus we see everywhere the endeavor to prove rigorously, to draw the limits of validity precisely, and, in order to be able to do so, to grasp concepts sharply.

Pursued further, this path must lead to the concept of Number and to the simplest propositions that hold of positive whole numbers, which form the foundation of the whole of arithmetic. Of course, numerical formulas such as 5 + 7 = 12, and laws such as the associative law of addition, are so abundantly confirmed by the countless applications made of them every day that it may seem almost ridiculous to call them into question by demanding a proof. But it lies in the very nature of mathematics that wherever a proof is possible, it prefers proof to confirmation by induction. Euclid proves many things that anyone would grant him anyway.[12]

It was by refusing to be satisfied even with Euclidean rigor that people were led to the investigations connected with the parallel axiom.

Thus this movement toward the greatest possible rigor has in many respects already gone beyond

	GERMAN	ENGLISH
	hinausgegangen und dieses ist an Ausdehnung und Stärke immer gewachsen.	the need first felt, and that need has steadily grown in extent and intensity.
2.3	Der Beweis hat eben nicht nur den Zweck, die Wahrheit eines Satzes über jeden Zweifel zu erheben, sondern auch den, eine Einsicht in die Abhängigkeit der Wahrheiten von einander zu gewähren. Nachdem man sich von der Unerschütterlichkeit eines Felsblockes durch vergebliche Versuche, ihn zu bewegen, überzeugt hat, kann man ferner fragen, was ihn denn so sicher unterstütze. Je weiter man diese Untersuchungen fortsetzt, auf desto weniger Urwahrheiten führt man Alles zurück; und diese Vereinfachung ist an sich schon ein erstrebenswerthes Ziel. Vielleicht bestätigt sich auch die Hoffnung, dass man allgemeine Weisen der Begriffsbildung oder der Begründung gewinnen könne, die auch in verwickelteren Fällen verwendbar sind, indem man zum Bewusstsein bringt, was die Menschen in den einfachsten Fällen instinctiv gethan haben, und das Allgemeingiltige daraus abscheidet.	For the purpose of a proof is not only to place the truth of a proposition beyond all doubt, but also to afford insight into how truths depend on one another. Once we have convinced ourselves that a boulder is immovable, by trying in vain to move it, we may further ask what it is that supports it so securely. The further we pursue these investigations, the fewer the primitive truths to which we reduce everything; and this simplification is in itself a goal worth striving for. Perhaps, too, a further hope will be borne out: that by bringing to consciousness what people have done instinctively in the simplest cases, and extracting what is universally valid in it, we may arrive at general methods of forming concepts or of establishing grounds that can be used in more complicated cases as well.
3.1	Mich haben auch philosophische Beweggründe zu solchen Untersuchungen bestimmt. Die Fragen nach der apriorischen oder aposteriorischen, der synthetischen oder analytischen Natur der arithmetischen Wahrheiten harren hier ihrer Beantwortung. Denn, wenn auch diese Begriffe selbst der Philosophie angehören, so glaube ich doch, dass die Entscheidung nicht ohne Beihilfe der Mathematik erfolgen kann. Freilich hangt dies von dem Sinne ab, den man jenen Fragen beilegt.	Philosophical motives, too, have led me to such investigations. Here the questions whether arithmetical truths are a priori or a posteriori, synthetic or analytic, await their answer. For although these concepts themselves belong to philosophy, I believe the question cannot be decided without the help of mathematics. Of course, this depends on the sense one gives to these questions.
3.2	Es ist kein seltener Fall, dass man zuerst den Inhalt eines Satzes gewinnt und dann auf einem andern beschwerlicheren Wege den strengen Beweis führt, durch den man oft auch die Bedingungen der Giltigkeit genauer kennen lernt. So hat man allgemein die Frage, wie wir zu dem Inhalte eines Urtheils kommen, von der zu trennen, woher wir die Berechtigung für unsere Behauptung nehmen.	It is not uncommon to arrive first at the content of a proposition and then to give the rigorous proof by another, more laborious route, through which we often also come to know the conditions of validity more precisely. In general, therefore, we must separate the question of how we arrive at the content of a judgment from the question of where we get the justification for our assertion.
3.3	Jene Unterscheidungen von apriori und aposteriori, synthetisch und analytisch betreffen nun nach meiner[1] Auffassung nicht den Inhalt des Urtheils, sondern die Berechtigung zur Urtheilsfällung. Da, wo diese fehlt, fällt auch die Möglichkeit jener Eintheilung weg. Ein Irrthum apriori ist dann ein ebensolches Unding wie etwa ein blauer Begriff. Wenn man einen Satz in meinem Sinne aposteriori oder analytisch nennt, so urtheilt man nicht über die psychologischen, physiologischen und	Now those distinctions between a priori and a posteriori, synthetic and analytic, concern, in my[1] view, not the content of the judgment but the justification for making the judgment. Where there is no such justification, the possibility of that classification falls away too. An a priori error is then as much an absurdity as, say, a blue concept. When one calls a proposition a posteriori or analytic in

12 "Number" with a capital N translates *Anzahl*: the number that answers the question "how many?"; lower-case "number" translates *Zahl*.

GERMAN

physikalischen Verhältnisse, die es möglich gemacht haben, den Inhalt des Satzes im Bewusstsein zu bilden, auch nicht darüber, wie ein Anderer vielleicht irrthümlicherweise dazu gekommen ist, ihn für wahr zu halten, sondern darüber, worauf im tiefsten Grunde die Berechtigung des Fürwahrhaltens beruht.

13

3.4 Dadurch wird die Frage dem Gebiete der Psychologie entrückt und dem der Mathematik zugewiesen, wenn es sich um eine mathematische Wahrheit handelt. Es kommt nun darauf an, den Beweis zu finden und ihn bis auf die Urwahrheiten zurückzuverfolgen. Stösst man auf diesem Wege nur auf die allgemeinen logischen Gesetze und auf Definitionen, so hat man eine analytische Wahrheit, wobei vorausgesetzt wird, dass auch die Sätze mit in Betracht gezogen werden, auf denen etwa die Zulässigkeit einer Definition beruht. Wenn es aber nicht möglich ist, den Beweis zu führen, ohne Wahrheiten zu benutzen, welche nicht allgemein logischer Natur sind, sondern sich auf ein besonderes Wissensgebiet beziehen, so ist der Satz ein synthetischer.

Damit eine Wahrheit aposteriori sei, wird verlangt, dass ihr Beweis nicht ohne Berufung auf Thatsachen auskomme; d. h. auf unbeweisbare Wahrheiten ohne Allgemeinheit, die Aussagen von bestimmten Gegenständen enthalten. Ist es dagegen möglich, den Beweis ganz aus allgemeinen Gesetzen zu führen, die selber eines Beweises weder fähig noch bedürftig sind, so ist die Wahrheit apriori.[1]

14

4.1 Von diesen philosophischen Fragen ausgehend kommen wir zu derselben Forderung, welche unabhängig davon auf dem Gebiete der Mathematik selbst erwachsen ist: die Grundsätze der Arithmetik, wenn irgend möglich, mit grösster Strenge zu beweisen; denn nur wenn aufs sorgfältigste jede Lücke in der Schlusskette vermieden wird, kann man mit Sicherheit sagen, auf welche

ENGLISH

my sense, one is not judging the psychological, physiological and physical conditions that made it possible to form the content of the proposition in consciousness. Nor is one judging how someone else came, perhaps erroneously, to hold it true. One is judging what, at the deepest level, the justification for holding it true rests on.

This removes the question from the domain of psychology and assigns it to that of mathematics, where a mathematical truth is concerned. The point now is to find the proof and to follow it back to the primitive truths. If on this path one comes only upon the general laws of logic and upon definitions, one has an analytic truth. It is presupposed here that the propositions on which the admissibility of a definition may rest are also taken into account. But if the proof cannot be given without using truths that are not of a general logical nature but relate to a special domain of knowledge, then the proposition is synthetic.

For a truth to be a posteriori, its proof must be unable to do without appealing to facts, that is, to unprovable truths that lack generality and contain assertions about particular objects. If, on the other hand, the proof can be given entirely from general laws which themselves neither admit of proof nor need it, then the truth is a priori.[1]

Starting from these philosophical questions, we arrive at the same demand that has grown up independently within mathematics itself: to prove the fundamental propositions of arithmetic with the utmost rigor, if at all possible. For only if every gap in the chain of inference is most carefully avoided can we say with certainty which primitive

13

[1] Ich will damit natürlich nicht einen neuen Sinn hineinlegen, sondern nur das treffen, was frühere Schriftsteller, insbesondere *Kant* gemeint haben.

[1] I do not, of course, mean to read a new sense into them, but only to capture what earlier writers, and *Kant* in particular, meant.

14

[1] Wenn man überhaupt allgemeine Wahrheiten anerkennt, so muss man auch zugeben, dass es solche Urgesetze giebt, weil aus lauter einzelnen Thatsachen nichts folgt, es sei denn auf Grund eines Gesetzes. Selbst die Induction beruht auf dem allgemeinen Satze, dass dies Verfahren die Wahrheit oder doch eine Wahrscheinlichkeit für ein Gesetz begründen könne. Für den, der dies leugnet, ist die Induction nichts weiter als eine psychologische Erscheinung, eine Weise, wie Menschen zu dem Glauben an die Wahrheit eines Satzes kommen, ohne dass dieser Glaube dadurch irgendwie gerechtfertigt wäre.

[1] If we recognize general truths at all, we must also grant that there are such primitive laws, since nothing follows from individual facts alone, except on the basis of a law. Even induction rests on the general proposition that this procedure can establish the truth of a law, or at least a probability for it. For anyone who denies this, induction is nothing more than a psychological phenomenon, a way in which people come to believe in the truth of a proposition without that belief being in any way justified by it.

GERMAN

Urwahrheiten sich der Beweis stützt; und nur wenn man diese kennt, wird man jene Fragen beantworten können.

4.2 Wenn man nun dieser Forderung nachzukommen versucht, so gelangt man sehr bald zu Sätzen, deren Beweis solange unmöglich ist, als es nicht gelingt, darin vorkommende Begriffe in einfachere aufzulösen oder auf Allgemeineres zurückzuführen. Hier ist es nun vor allen die Anzahl, welche definirt oder als undefinirbar anerkannt werden muss. Das soll die Aufgabe dieses Buches sein.[1] Von ihrer Lösung wird die Entscheidung über die Natur der arithmetischen Gesetze abhangen.

15

4.3 Bevor ich diese Fragen selbst angreife, will ich Einiges vorausschicken, was Fingerzeige für ihre Beantwortung geben kann. Wenn sich nämlich von andern Gesichtspunkten aus Gründe dafür ergeben, dass die Grundsätze der Arithmetik analytisch sind, so sprechen diese auch für deren Beweisbarkeit und für die Definirbarkeit des Begriffes der Anzahl. Die entgegengesetzte Wirkung werden die Gründe für die Aposteriorität dieser Wahrheiten haben. Deshalb mögen diese Streitpunkte zunächst einer vorläufigen Beleuchtung unterworfen werden.

ENGLISH

truths the proof rests on; and only when we know these shall we be able to answer those questions.

Now if we try to meet this demand, we very soon come to propositions that cannot be proved so long as we do not succeed in analyzing the concepts occurring in them into simpler ones or in reducing them to something more general. Here it is above all Number that must either be defined or be recognized as indefinable. That is to be the task of this book.[1] The decision about the nature of arithmetical laws will depend on how it is accomplished.

Before tackling these questions themselves, I shall say a few things in advance that may give hints toward answering them. For if there turn out to be reasons, from other points of view, for holding that the fundamental propositions of arithmetic are analytic, these reasons also speak for their provability and for the definability of the concept of Number. Reasons for the a posteriori character of these truths will have the opposite effect. So let us first give these points of dispute a preliminary examination.

15

[1] Es wird also im Folgenden, wenn nichts weiter bemerkt wird, von keinen andern Zahlen als den positiven ganzen die Rede sein, welche auf die Frage wie viele? antworten.

[1] In what follows, therefore, unless otherwise stated, no numbers will be discussed except the positive whole numbers, which answer the question “how many?”

I. Views of Certain Writers on the Nature of Arithmetical Propositions

Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze
Are numerical formulas provable? Are the laws of arithmetic inductive truths, or synthetic a priori, or analytic? Kant, Leibniz, Mill.

SIND DIE ZAHLFORMELN BEWEISBAR?

	GERMAN	ENGLISH
5.1	Man muss die Zahlformeln, die wie 2 + 3 = 5 von bestimmten Zahlen handeln, von den allgemeinen Gesetzen unterscheiden, die von allen ganzen Zahlen gelten.	We must distinguish numerical formulas that deal with particular numbers, like 2 + 3 = 5, from the general laws that hold for all whole numbers.
5.2	Jene werden von einigen Philosophen[1] für unbeweisbar und unmittelbar klar wie Axiome gehalten. *Kant*[2] erklärt sie für unbeweisbar und synthetisch, scheut sich aber, sie Axiome zu nennen, weil sie nicht allgemein sind, und weil ihre Zahl unendlich ist. *Hankel*[3] nennt mit Recht diese Annahme von unendlich vielen unbeweisbaren Urwahrheiten unangemessen und paradox. Sie widerstreitet in der That dem Bedürfnisse der Vernunft nach Uebersichtlichkeit der ersten Grundlagen. Und ist es denn unmittelbar einleuchtend, dass 135664 + 37863 = 173527 ist? Nein! und eben dies führt *Kant* für die synthetische Natur dieser Sätze an. Es spricht aber vielmehr gegen ihre Unbeweisbarkeit; denn wie sollen sie anders eingesehen werden als durch einen Beweis, da sie unmittelbar nicht einleuchten?	Some philosophers[1] hold the former to be unprovable and immediately evident, like axioms. *Kant*[2] declares them unprovable and synthetic, but hesitates to call them axioms, because they are not general and because there are infinitely many of them. *Hankel*[3] rightly calls this assumption of infinitely many unprovable primitive truths inappropriate and paradoxical. It does indeed conflict with reason's need to have the first foundations within view. And is it really immediately evident that 135664 + 37863 = 173527? No! And *Kant* cites precisely this in support of the synthetic nature of these propositions. But it speaks rather against their unprovability; for how else are we to see that they are true, if not by a proof, since they are not immediately evident?[1]
	Kant will die Anschauung von Fingern oder Punkten zu Hilfe nehmen, wodurch er in Gefahr geräth, diese Sätze gegen seine Meinung als empirische erscheinen zu lassen; denn die Anschauung von 37863 Fingern ist doch jedenfalls keine reine. Der Ausdruck »Anschauung« scheint auch nicht recht zu passen, da schon 10 Finger durch ihre Stellungen zu einander die verschiedensten Anschauungen hervorrufen können. Haben wir denn überhaupt eine Anschauung von 135664 Fingern oder Punkten? Hätten wir sie und hätten wir eine von 37863 Fingern und eine von 173527 Fingern, so müsste die Richtigkeit unserer Gleichung sofort einleuchten, wenigstens für Finger, wenn sie unbeweisbar wäre; aber dies ist nicht der Fall.	*Kant* wants to call on the intuition of fingers or points for help, and so runs the risk of making these propositions look empirical, contrary to his own view; for the intuition of 37863 fingers is certainly not a pure one. The term "intuition" does not seem quite apt either, since even 10 fingers can give rise to the most varied intuitions, depending on their positions relative to one another. Do we in fact have an intuition of 135664 fingers or points at all? If we had, and had one of 37863 fingers and one of 173527 fingers, then the correctness of our equation would have to be immediately evident, at

1 Hermann Hankel (1839–1873), German mathematician.

GERMAN

ENGLISH

least for fingers, if it were unprovable; but this is not the case.

345

5.3 *Kant* hat offenbar nur kleine Zahlen im Sinne gehabt. Dann würden die Formeln für grosse Zahlen beweisbar sein, die für kleine durch die Anschauung unmittelbar einleuchten. Aber es ist misslich, einen grundsätzlichen Unterschied zwischen kleinen und grossen Zahlen zu machen, besonders da eine scharfe Grenze nicht zu ziehen sein möchte. Wenn die Zahlformeln etwa von 10 an beweisbar wären, so würde man mit Recht fragen: warum nicht von 5 an, von 2 an, von 1 an?

Kant evidently had only small numbers in mind. Then the formulas for large numbers would be provable, while those for small numbers would be immediately evident through intuition. But it is awkward to make a fundamental distinction between small and large numbers, especially since no sharp boundary could be drawn between them. If the numerical formulas were provable from, say, 10 onwards, one would rightly ask: why not from 5 onwards, from 2, from 1?

6.1 Andere Philosophen und Mathematiker haben denn auch die Beweisbarkeit der Zahlformeln behauptet. *Leibniz*[1] sagt:

Other philosophers and mathematicians have accordingly asserted that the numerical formulas are provable. *Leibniz*[1] says:

7

6.2 »Es ist keine unmittelbare Wahrheit, dass 2 und 2 4 sind; vorausgesetzt, dass 4 bezeichnet 3 und 1. Man kann sie beweisen und zwar so: Definitionen: 1) 2 ist 1 und 1, 2) 3 ist 2 und 1, 3) 4 ist 3 und 1. Axiom: Wenn man Gleiches an die Stelle setzt, bleibt die Gleichung bestehen. Beweis: 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4. (Def. 1. Def. 2. Def. 3.) Also: nach dem Axiom: 2 + 2 = 4.«

“It is not an immediate truth that 2 and 2 are 4, assuming that 4 designates 3 and 1. It can be proved, as follows: Definitions: 1) 2 is 1 and 1, 2) 3 is 2 and 1, 3) 4 is 3 and 1. Axiom: If identicals are substituted for one another, the equation still holds. Proof: 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 3 + 1 = 4. (Def. 1. Def. 2. Def. 3.) Therefore, by the axiom: 2 + 2 = 4.”

6.3 Dieser Beweis scheint zunächst ganz aus Definitionen und dem angeführten Axiome aufgebaut zu sein. Auch

At first this proof seems to be built up entirely from definitions and the axiom cited. The axiom, too, could be turned into a definition, as *Leibniz*

3

[1] Hobbes, Locke, Newton. Vergl. *Baumann*, die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik. S. 241 u. 242, S. 365 ff., S. 475.

[1] Hobbes, Locke, Newton. Cf. *Baumann*, Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik [The Doctrines of Time, Space and Mathematics], pp. 241 and 242, pp. 365 ff., p. 475.[2]

2 Johann Julius Baumann (1837–1916), German philosopher, whose *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik* (1868–69) collects passages from earlier philosophers; Frege often quotes them from it.

4

[2] Kritik der reinen Vernunft, herausgeg. v. Hartenstein. III. S. 157.

[2] Kritik der reinen Vernunft [Critique of Pure Reason], ed. Hartenstein, III, p. 157.

5

[3] Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen. S. 55.

[3] Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen [Lectures on Complex Numbers and Their Functions], p. 55.

GERMAN	ENGLISH
dieses könnte in eine Definition verwandelt werden, wie es *Leibniz* an einem andern Orte[1] selbst gethan hat. Es scheint, dass man von 1, 2, 3, 4 weiter nichts zu wissen braucht, als was in den Definitionen enthalten ist. Bei genauerer Betrachtung entdeckt man jedoch eine Lücke, die durch das Weglassen der Klammern verdeckt ist. Genauer müsste nämlich geschrieben werden: 2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.	himself did elsewhere[1]. It seems that we need know nothing more about 1, 2, 3, 4 than what is contained in the definitions. On closer inspection, however, we discover a gap, concealed by the omission of brackets. To be more exact, we should have to write: 2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.
6.4 Hier fehlt der Satz 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1, der ein besonderer Fall von a + (b + c) = (a + b) + c ist. Setzt man dies Gesetz voraus, so sieht man leicht, dass jede Formel des Einsundeins so bewiesen werden kann. Es ist dann jede Zahl aus der vorhergehenden zu definiren. In der That sehe ich nicht, wie uns etwa die Zahl 437986 angemessener gegeben werden könnte als in der leibnizischen Weise. Wir bekommen sie so, auch ohne eine Vorstellung von ihr zu haben, doch in unsere Gewalt.	What is missing here is the proposition 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1, which is a special case of a + (b + c) = (a + b) + c. If this law is presupposed, it is easy to see that every formula of elementary addition can be proved in this way. Each number is then to be defined from the one before it. Indeed, I do not see how the number 437986, say, could be given to us more fittingly than in Leibniz's way. In this way we get it into our power, even without having an idea of it.
Die unendliche Menge der Zahlen wird durch solche Definitionen auf die Eins und die Vermehrung um eins zurückgeführt, und jede der unendlich vielen Zahlformeln kann aus einigen allgemeinen Sätzen bewiesen werden.	By such definitions the infinite set of numbers is reduced to one and to increase by one, and each of the infinitely many numerical formulas can be proved from a few general propositions.
6.5 Dies ist auch die Meinung von *H. Grassmann* und *H. Hankel*. Jener will das Gesetz a + (b + 1) = (a + b) + 1 durch eine Definition gewinnen, indem er sagt[1]:	This is also the view of *H. Grassmann* and *H. Hankel*. The former wants to obtain the law a + (b + 1) = (a + b) + 1 through a definition, saying[1]:[9]
6.6 »Wenn a und b beliebige Glieder der Grundreihe sind, so versteht man unter der Summe a + b dasjenige Glied der Grundreihe, für welches die Formel a + (b + e) = a + b + e gilt.«	"If a and b are any members of the basic series, then by the sum a + b we understand that member of the basic series for which the formula a + (b + e) = a + b + e holds."
6.7 Hierbei soll e die positive Einheit bedeuten. Gegen diese Erklärung lässt sich zweierlei einwenden. Zunächst wird die Summe durch sich selbst erklärt. Wenn man noch nicht weiss, was a + b bedeuten soll, versteht man auch den Ausdruck a + (b + e) nicht. Aber dieser Einwand lässt	Here e is to mean the positive unit. Two objections can be raised against this definition. First, the sum is defined by means of itself. If we do not yet know what a + b is supposed to mean, we do not understand the expression a + (b + e) either. But this ob-

[1] B: Nouveaux Essais, IV. § 10. Erdm. S. 363.

[1] B: Nouveaux Essais [New Essays], IV, § 10. Erdm. p. 363.[6]

6 "Erdm." refers to J. E. Erdmann's 1840 edition of Leibniz's philosophical works.

[1] C: Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Erdm. S. 94.

[1] C: Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis [A not inelegant example of proof in abstract matters]. Erdm. p. 94.

9 Hermann Grassmann (1809–1877), German mathematician and linguist.

[1] Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten. I. Theil: Arithmetik, Stettin 1860, S. 4.

[1] Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten [Textbook of Mathematics for Secondary Schools], Part I: Arithmetik, Stettin 1860, p. 4.

GERMAN

sich vielleicht dadurch beseitigen, dass man freilich im Widerspruch mit dem Wortlaute sagt, nicht die Summe, sondern die Addition solle erklärt werden. Dann würde immer noch eingewendet werden können, dass a + b ein leeres Zeichen wäre, wenn es kein Glied der Grundreihe oder deren mehre von der verlangten Art gäbe. Dass dies nicht statthabe, setzt *Grassmann* einfach voraus, ohne es zu beweisen, sodass die Strenge nur scheinbar ist.

ENGLISH

jection can perhaps be removed by saying, admittedly against the wording, that what is to be defined is not the sum but addition. It could then still be objected that a + b would be an empty sign if there were no member of the basic series of the required kind, or more than one. *Grassmann* simply presupposes, without proving it, that this is not the case, so that the rigor is merely apparent.

MILL'S PEBBLE ARITHMETIC

Mill claims that the definitions of numbers assert observed physical facts; Frege disputes this.

GERMAN

7.1 Man sollte denken, dass die Zahlformeln synthetisch oder analytisch, aposteriori oder apriori sind, je nachdem die allgemeinen Gesetze es sind, auf die sich ihr Beweis stützt. Dem steht jedoch die Meinung *John Stuart Mill*'s entgegen. Zwar scheint er zunächst wie *Leibniz* die Wissenschaft auf Definitionen gründen zu wollen,[1] da er die einzelnen Zahlen wie dieser erklärt; aber sein Vorurtheil, dass alles Wissen empirisch sei, verdirbt sofort den richtigen Gedanken wieder. Er belehrt uns nämlich,[2] dass jene Definitionen keine im logischen Sinne seien, dass sie nicht nur die Bedeutung eines Ausdruckes festsetzen, sondern damit auch eine beobachtete Thatsache behaupten. Was in aller Welt mag die beobachtete oder, wie *Mill* auch sagt, physikalische Thatsache sein, die in der Definition der Zahl 777864 behauptet wird?

Von dem ganzen Reichthume an physikalischen Thatsachen, der sich hier vor uns aufthut, nennt uns *Mill* nur eine einzige, die in der Definition der Zahl 3 behauptet werden soll. Sie besteht nach ihm darin, dass es Zusammenfügungen von Gegenständen giebt, welche, während sie diesen Eindruck $^{0}_{0}{}^{0}$ auf die Sinne machen, in zwei Theile getrennt werden können, wie folgt: ◦◦ ◦. Wie gut doch, dass nicht Alles in der Welt niet- und nagelfest ist; dann könnten wir diese Trennung nicht vornehmen, und 2 + 1 wäre nicht 3! Wie schade, dass *Mill* nicht auch die physikalischen Thatsachen abgebildet hat, welche den Zahlen 0 und 1 zu Grunde liegen!

ENGLISH

One would think that the numerical formulas are synthetic or analytic, a posteriori or a priori, according as the general laws on which their proof rests are so. This, however, is opposed by the view of *John Stuart Mill*. At first, admittedly, he seems to want, like *Leibniz*, to base the science on definitions,[1] since he defines the individual numbers as Leibniz does. But his prejudice that all knowledge is empirical immediately spoils the correct thought again. For he informs us[2] that those definitions are not definitions in the logical sense: they do not merely fix the meaning of an expression, but at the same time assert an observed fact. What in the world can the observed or, as *Mill* also puts it, physical fact be that is asserted in the definition of the number 777864?

Of all the wealth of physical facts that opens up before us here, *Mill* names only a single one, the fact supposedly asserted in the definition of the number 3. According to him, it consists in this: that there are collections of objects which, while they make this impression $^{0}_{0}{}^{0}$ on the senses, can be separated into two parts, as follows: ◦◦ ◦. How fortunate that not everything in the world is nailed down tight; otherwise we could not carry out this separation, and 2 + 1 would not be 3! What a pity that *Mill* did not also illustrate the physical facts underlying the numbers 0 and 1!

11 12

11

[1] A System der deductiven und inductiven Logik, übersetzt von J. Schiel. III. Buch, XXIV. Cap., § 5.

[1] A System der deductiven und inductiven Logik [A System of Deductive and Inductive Logic], trans. J. Schiel, Book III, ch. XXIV, § 5.

12

[2] A. a. O. II. Buch, VI. Cap., § 2.

[2] Op. cit., Book II, ch. VI, § 2.

GERMAN

7.2 *Mill* fährt fort: »Nachdem dieser Satz zugegeben ist, nennen wir alle dergleichen Theile 3«. Man erkennt hieraus, dass es eigentlich unrichtig ist, wenn die Uhr drei schlägt, von drei Schlägen zu sprechen, oder süss, sauer, bitter drei Geschmacksempfindungen zu nennen; ebensowenig ist der Ausdruck »drei Auflösungsweisen einer Gleichung« zu billigen; denn man hat niemals davon den sinnlichen Eindruck wie von $^0{}_0{}^0$.

7.3 Nun sagt *Mill*: »Die Rechnungen folgen nicht aus der Definition selbst, sondern aus der beobachteten Thatsache.« Aber wo hätte sich *Leibniz* in dem oben mitgetheilten Beweise des Satzes 2 + 2 = 4 auf die erwähnte Thatsache berufen sollen? *Mill* unterlässt es die Lücke nachzuweisen, obwohl er einen dem leibnizischen ganz entsprechenden Beweis des Satzes 5 + 2 = 7 giebt.[1] Die wirklich vorhandene Lücke, die in dem Weglassen der Klammern liegt, übersieht er wie *Leibniz*.

13

7.4 Wenn wirklich die Definition jeder einzelnen Zahl eine besondere physikalische Thatsache behauptete, so würde man einen Mann, der mit neunziffrigen Zahlen rechnet, nicht genug wegen seines physikalischen Wissens bewundern können. Vielleicht geht indessen *Mill*'s Meinung nicht dahin, dass alle diese Thatsachen einzeln beobachtet werden müssten, sondern es genüge, durch Induction ein allgemeines Gesetz abgeleitet zu haben, in dem sie sämmtlich eingeschlossen seien. Aber man versuche, dies Gesetz auszusprechen, und man wird finden, dass es unmöglich ist.

Es reicht nicht hin, zu sagen: es giebt grosse Sammlungen von Dingen, die zerlegt werden können; denn damit ist nicht gesagt, dass es so grosse Sammlungen und von der Art giebt, wie zur Definition etwa der Zahl 1000000 erfordert werden, und die Weise der Theilung ist auch nicht genauer angegeben. Die millsche Auffassung führt nothwendig zu der Forderung, dass für jede Zahl eine Thatsache besonders beobachtet werde, weil in einem allgemeinen Gesetze grade das Eigenthümliche der Zahl 1000000, das zu deren Definition nothwendig gehört, verloren gehen würde. Man dürfte nach *Mill* in der That nicht setzen 1000000 = 999999 + 1, wenn man nicht grade diese eigenthümliche Weise der Zerlegung einer Sammlung von Dingen beobachtet hätte, die von der irgendeiner andern Zahl zukommenden verschieden ist.

ENGLISH

Mill continues: "This proposition being granted, we call all such parts 3." From this we learn that it is really incorrect to speak of three strokes when the clock strikes three, or to call sweet, sour and bitter three sensations of taste. Nor is the expression "three ways of solving an equation" acceptable; for none of these ever gives us a sensory impression like that of $^0{}_0{}^0$.

Now *Mill* says: "The calculations do not follow from the definition itself, but from the observed fact." But at what point in the proof of the proposition 2 + 2 = 4 given above should *Leibniz* have appealed to that fact? *Mill* fails to point out where the gap is, although he gives a proof of the proposition 5 + 2 = 7 that corresponds exactly to Leibniz's.[1] The gap that really exists, which lies in the omission of the brackets, he overlooks, just as *Leibniz* does.

13

If the definition of each individual number really asserted a special physical fact, we could never sufficiently admire a man who calculates with nine-digit numbers for his knowledge of physics. Perhaps, however, *Mill*'s view is not that all these facts must be observed individually, but that it is enough to have derived by induction a general law in which they are all included. But try to state this law, and you will find it impossible.

It is not enough to say: there are large collections of things that can be broken up. For this does not say that there are collections as large, and of the kind, as are required for the definition of, say, the number 1000000; nor does it specify the manner of division any more exactly. Mill's conception necessarily leads to the demand that a fact be specially observed for each number, because a general law would lose precisely what is peculiar to the number 1000000, which necessarily belongs to its definition. Indeed, according to *Mill*, we could not set 1000000 = 999999 + 1 unless we had observed precisely this peculiar way of breaking up a collec-

13

[1] A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap., § 5.

[1] Op. cit., Book III, ch. XXIV, § 5.

GERMAN

ENGLISH

tion of things, which differs from the way that belongs to any other number.

8.1 *Mill* scheint zu meinen, dass die Definitionen 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1 u. s. w. nicht gemacht werden dürften, ehe nicht die von ihm erwähnten Thatsachen beobachtet wären. In der That darf man die 3 nicht als (2 + 1) definiren, wenn man mit (2 + 1) gar keinen Sinn verbindet. Es fragt sich aber, ob es dazu nöthig ist, jene Sammlung und ihre Trennung zu beobachten. Räthselhaft wäre dann die Zahl 0; denn bis jetzt hat wohl niemand 0 Kieselsteine gesehen oder getastet.

Mill würde gewiss die 0 für etwas Sinnloses, für eine blosse Redewendung erklären; die Rechnungen mit 0 würden ein blosses Spiel mit leeren Zeichen sein, und es wäre nur wunderbar, wie etwas Vernünftiges dabei herauskommen könnte. Wenn aber diese Rechnungen eine ernste Bedeutung haben, so kann auch das Zeichen 0 selber nicht ganz sinnlos sein. Und es zeigt sich die Möglichkeit, dass 2 + 1 in ähnlicher Weise wie die 0, einen Sinn auch dann noch haben könnte, wenn die von *Mill* erwähnte Thatsache nicht beobachtet wäre. Wer will in der That behaupten, dass die in der Definition einer 18ziffrigen Zahl nach *Mill* enthaltene Thatsache je beobachtet sei, und wer will leugnen, dass ein solches Zahlzeichen trotzdem einen Sinn habe?

Mill seems to think that the definitions 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1, etc., may not be made until the facts he mentions have been observed. Indeed, we must not define 3 as (2 + 1) if we attach no sense at all to (2 + 1). The question, however, is whether this requires observing that collection and its separation. If so, the number 0 would be a puzzle; for, so far as I know, no one has yet seen or touched 0 pebbles.

Mill would certainly declare 0 to be something senseless, a mere figure of speech. Calculations with 0 would be a mere game with empty signs, and the only wonder would be how anything rational could come of it. But if these calculations have a serious meaning, then the sign 0 itself cannot be entirely senseless either. And this opens up the possibility that 2 + 1, like 0, might still have a sense even if the fact *Mill* mentions had not been observed. Who, indeed, will claim that the fact which, according to *Mill*, is contained in the definition of an 18-digit number has ever been observed? And who will deny that such a numeral nevertheless has a sense?

8.2 Vielleicht meint man, es würden die physikalischen Thatsachen nur für die kleineren Zahlen etwa bis 10 gebraucht, indem die übrigen aus diesen zusammengesetzt werden könnten. Aber, wenn man 11 aus 10 und 1 blos durch Definition bilden kann, ohne die entsprechende Sammlung gesehen zu haben, so ist kein Grund, weshalb man nicht auch die 2 aus 1 und 1 so zusammensetzen kann. Wenn die Rechnungen mit der Zahl 11 nicht aus einer für diese bezeichnenden Thatsache folgen, wie kommt es, dass die Rechnungen mit der 2 sich auf die Beobachtung einer gewissen Sammlung und deren eigentümlicher Trennung stützen müssen?

Perhaps it will be said that the physical facts are needed only for the smaller numbers, say up to 10, since the rest can be composed from these. But if we can form 11 from 10 and 1 merely by definition, without having seen the corresponding collection, there is no reason why we cannot compose 2 from 1 and 1 in the same way. If calculations with the number 11 do not follow from a fact characteristic of that number, how is it that calculations with 2 must rest on the observation of a certain collection and its peculiar separation?

8.3 Man fragt vielleicht, wie die Arithmetik bestehen könne, wenn wir durch die Sinne gar keine oder nur drei Dinge unterscheiden könnten. Für unsere Kenntniss der arithmetischen Sätze und deren Anwendungen würde ein solcher Zustand gewiss etwas Missliches haben, aber auch für ihre Wahrheit? Wenn man einen Satz empirisch nennt, weil wir Beobachtungen gemacht haben müssen, um uns seines Inhalts bewusst zu werden, so gebraucht man das Wort »empirisch« nicht in dem Sinne, dass es dem »apriori« entgegengesetzt ist. Man spricht dann eine

It may be asked how arithmetic could exist if we could distinguish no things at all through the senses, or only three. Such a state of affairs would certainly be awkward for our knowledge of arithmetical propositions and their applications—but would it be awkward for their truth? If we call a proposition empirical because we must have made observations in order to become conscious of its content, then we are not using the word “empirical” in the sense in which it is opposed to “a

GERMAN

psychologische Behauptung aus, die nur den Inhalt des Satzes betrifft; ob dieser wahr sei, kommt dabei nicht in Betracht. In dem Sinne sind auch alle Geschichten Münchhausens empirisch; denn gewiss muss man mancherlei beobachtet haben, um sie erfinden zu können.

ENGLISH

priori". We are then making a psychological assertion, which concerns only the content of the proposition; whether it is true does not come into question. In that sense all of Münchhausen's stories are empirical too; for one must certainly have observed all sorts of things to be able to invent them.[14]

ARE THE LAWS OF ARITHMETIC INDUCTIVE TRUTHS?

Frege argues that the general laws of arithmetic are neither laws of nature nor inductive generalizations.

GERMAN

9.1 Die bisherigen Erwägungen machen es wahrscheinlich, dass die Zahlformeln allein aus den Definitionen der einzelnen Zahlen mittels einiger allgemeinen Gesetze ableitbar sind, dass diese Definitionen beobachtete Thatsachen weder behaupten noch zu ihrer Rechtmässigkeit voraussetzen. Es kommt also darauf an, die Natur jener Gesetze zu erkennen.

9.2 *Mill*[1] will zu seinem vorhin erwähnten Beweise der Formel 5 + 2 = 7 den Satz »was aus Theilen zusammengesetzt ist, ist aus Theilen von diesen Theilen zusammengesetzt« benutzen. Dies hält er für einen charakteristischern Ausdruck des sonst in der Form »die Summen von Gleichem sind gleich« bekannten Satzes. Er nennt ihn inductive Wahrheit und Naturgesetz von der höchsten Ordnung.

Für die Ungenauigkeit seiner Darstellung ist es bezeichnend, dass er diesen Satz gar nicht an der Stelle des Beweises heranzieht, wo er nach seiner Meinung unentbehrlich ist; doch scheint es, dass seine inductive Wahrheit *Leibnizens* Axiom vertreten soll: »wenn man Gleiches an die Stelle setzt, bleibt die Gleichung bestehen.« Aber um arithmetische Wahrheiten Naturgesetze nennen zu können, legt *Mill* einen Sinn hinein, den sie nicht haben. Er meint z. B.[2] die Gleichung 1 = 1 könne falsch sein, weil ein Pfundstück nicht immer genau das Gewicht eines andern habe. Aber das will der Satz 1 = 1 auch gar nicht behaupten.

ENGLISH

The considerations so far make it probable that the numerical formulas can be derived solely from the definitions of the individual numbers by means of a few general laws, and that these definitions neither assert observed facts nor presuppose them for their legitimacy. What matters, then, is to recognize the nature of those laws.

For his proof of the formula 5 + 2 = 7, mentioned earlier, *Mill*[1] wants to use the proposition "whatever is made up of parts is made up of the parts of those parts." He regards this as a more characteristic expression of the proposition otherwise known in the form "the sums of equals are equal." He calls it an inductive truth and a law of nature of the highest order.

It is typical of the imprecision of his exposition that he does not bring this proposition in at all at the point in the proof where, in his own view, it is indispensable. Still, it seems that his inductive truth is meant to stand in for *Leibniz*'s axiom: "if identicals are substituted for one another, the equation still holds." But in order to be able to call arithmetical truths laws of nature, *Mill* reads into them a sense they do not have. He thinks, for example,[2] that the equation 1 = 1 could be false, because one pound weight does not always have exactly the same weight as another. But that is not at all what the proposition 1 = 1 means to assert.

15 16

14 Baron Münchhausen, the boastful teller of impossible tall tales in eighteenth-century German and English story collections, loosely based on Hieronymus von Münchhausen (1720–1797).

[1] A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap., § 5.

[1] Op. cit., Book III, ch. XXIV, § 5.

[2] A. a. O. II. Buch, VI. Cap., § 3.

[2] Op. cit., Book II, ch. VI, § 3.

GERMAN

9.3 *Mill* versteht das + Zeichen so, dass dadurch die Beziehung der Theile eines physikalischen Körpers oder eines Haufens zu dem Ganzen ausgedrückt werde; aber das ist nicht der Sinn dieses Zeichens. 5 + 2 = 7 bedeutet nicht, dass wenn man zu 5 Raumtheilen Flüssigkeit 2 Raumtheile Flüssigkeit giesst, man 7 Raumtheile Flüssigkeit erhalte, sondern dies ist eine Anwendung jenes Satzes, die nur statthaft ist, wenn nicht infolge etwa einer chemischen Einwirkung eine Volumänderung eintritt. *Mill* verwechselt immer Anwendungen, die man von einem arithmetischen Satze machen kann, welche oft physikalisch sind und beobachtete Thatsachen zur Voraussetzung haben, mit dem rein mathematischen Satze selber.

Das Pluszeichen kann zwar in manchen Anwendungen einer Haufenbildung zu entsprechen scheinen; aber dies ist nicht seine Bedeutung; denn bei andern Anwendungen kann von Haufen, Aggregaten, dem Verhältnisse eines physikalischen Körpers zu seinen Theilen keine Rede sein, z. B. wenn man die Rechnung auf Ereignisse bezieht. Zwar kann man auch hier von Theilen sprechen; dann gebraucht man das Wort aber nicht im physikalischen oder geometrischen, sondern im logischen Sinne, wie wenn man die Ermordungen von Staatsoberhäuptern einen Theil der Morde überhaupt nennt. Hier hat man die logische Unterordnung. Und so entspricht auch die Addition im Allgemeinen nicht einem physikalischen Verhältnisse. Folglich können auch die allgemeinen Additionsgesetze nicht Naturgesetze sein.

10.1 Aber sie könnten vielleicht dennoch inductive Wahrheiten sein. Wie wäre das zu denken? Von welchen Thatsachen soll man ausgehen, um sich zum Allgemeinen zu erheben? Dies können wohl nur die Zahlformeln sein. Damit verlören wir freilich den Vortheil wieder, den wir durch die Definitionen der einzelnen Zahlen gewonnen haben, und wir müssten uns nach einer andern Begründungsweise der Zahlformeln umsehen. Wenn wir uns nun auch über dies nicht ganz leichte Bedenken hinwegsetzen, so finden wir doch den Boden für die Induction ungünstig; denn hier fehlt jene Gleichförmigkeit, welche sonst diesem Verfahren eine grosse Zuverlässigkeit geben kann.

Schon *Leibniz*[1] lässt dem Philalèthe auf seine Behauptung: »Die verschiedenen Modi der Zahl sind keiner andern Verschiedenheit fähig, als des mehr oder weniger; daher sind es einfache Modi wie die des Raumes« antworten:

ENGLISH

Mill understands the + sign as expressing the relation of the parts of a physical body, or of a heap, to the whole; but that is not the sense of this sign. 5 + 2 = 7 does not mean that if one pours 2 volumes of liquid into 5 volumes of liquid one obtains 7 volumes of liquid. That is an application of the proposition, and it is admissible only if no change of volume occurs, say as the result of a chemical reaction. *Mill* constantly confuses the applications that can be made of an arithmetical proposition—which are often physical and presuppose observed facts—with the purely mathematical proposition itself.

In some applications the plus sign may indeed seem to correspond to the formation of a heap; but that is not its meaning. For in other applications there can be no question of heaps, aggregates, or the relation of a physical body to its parts—for example, when the calculation concerns events. True, one can speak of parts here too; but then the word is used not in the physical or geometrical sense but in the logical sense, as when one calls the assassinations of heads of state a part of murders in general. Here we have logical subordination. And so addition, in general, does not correspond to a physical relation either. Consequently the general laws of addition cannot be laws of nature either.

But perhaps they could still be inductive truths. How would that be conceived? From what facts are we supposed to start in order to rise to the general? These can surely only be the numerical formulas. In that case, of course, we would lose again the advantage we gained from the definitions of the individual numbers, and we would have to look around for some other way of grounding the numerical formulas. Even if we set aside this not altogether trivial difficulty, we still find the ground unfavorable for induction; for here we lack the uniformity that can otherwise give this procedure great reliability.

Leibniz[1] already has Philalèthe's assertion—"The various modes of number are capable of no other difference than that of more or less; hence they are simple modes, like those of space"—answered as follows:[17]

GERMAN ENGLISH

18

10.2 »Das kann man von der Zeit und der geraden Linie sagen, aber keinesfalls von den Figuren und noch weniger von den Zahlen, die nicht blos an Grösse verschieden, sondern auch unähnlich sind. Eine gerade Zahl kann in zwei gleiche Theile getheilt werden und nicht eine ungerade; 3 und 6 sind trianguläre Zahlen, 4 und 9 sind Quadrate, 8 ist ein Cubus u. s. f.; und dies findet bei den Zahlen noch mehr statt als bei den Figuren; denn zwei ungleiche Figuren können einander vollkommen ähnlich sein, aber niemals zwei Zahlen.«

"That can be said of time and of the straight line, but by no means of figures, and still less of numbers, which are not merely different in magnitude but also dissimilar. An even number can be divided into two equal parts, and an odd one cannot; 3 and 6 are triangular numbers, 4 and 9 are squares, 8 is a cube, and so on. And this holds even more of numbers than of figures; for two unequal figures can be perfectly similar to each other, but two numbers never."

10.3 Wir haben uns zwar daran gewöhnt, die Zahlen in vielen Beziehungen als gleichartig zu betrachten; das kommt aber nur daher, weil wir eine Menge allgemeiner Sätze kennen, die von allen Zahlen gelten. Hier müssen wir uns jedoch auf den Standpunkt stellen, wo noch keiner von diesen anerkannt ist. In der That möchte es schwer sein, ein Beispiel für einen Inductionsschluss zu finden, das unserem Falle entspräche. Sonst kommt uns oft der Satz zu statten, dass jeder Ort im Raume und jeder Zeitpunkt an und für sich so gut wie jeder andere ist. Ein Erfolg muss an einem andern Orte und zu einer andern Zeit ebensogut eintreten, wenn nur die Bedingungen dieselben sind. Das fällt hier hinweg, weil die Zahlen raum- und zeitlos sind.

We have, admittedly, grown used to regarding numbers as homogeneous in many respects; but that is only because we know a great many general propositions that hold of all numbers. Here, however, we must take our stand where none of these has yet been recognized. In fact it would be hard to find an example of an inductive inference corresponding to our case. Elsewhere we are often helped by the proposition that every place in space and every point in time is, in and of itself, as good as any other. An effect must occur just as well at another place and at another time, provided only that the conditions are the same. That falls away here, because numbers are spaceless and timeless.

Die Stellen in der Zahlenreihe sind nicht gleichwerthig wie die Orte des Raumes.

The positions in the number series are not of equal value, as the places in space are.

10.4 Die Zahlen verhalten sich auch ganz anders als die Individuen etwa einer Thierart, da sie eine durch die Natur der Sache bestimmte Rangordnung haben, da jede auf eigne Weise gebildet ist und ihre Eigenart hat, die besonders bei der 0, der 1 und der 2 hervortritt. Wenn man sonst einen Satz in Bezug auf eine Gattung durch Induction begründet, hat man gewöhnlich schon eine ganze Reihe gemeinsamer Eigenschaften allein schon durch die Definition des Gattungsbegriffes. Hier hält es schwer, nur eine einzige zu finden, die nicht selbst erst nachzuweisen wäre.

Numbers also behave quite differently from, say, the individuals of an animal species. They have an order of rank determined by the nature of the case; each is formed in its own way and has its own peculiarity, which stands out especially in 0, 1 and 2. Elsewhere, when a proposition about a genus is established by induction, one usually already has a whole series of common properties from the definition of the generic concept alone. Here it is hard to find even a single one that would not itself first have to be proved.

10.5 Am leichtesten möchte sich unser Fall noch mit folgendem vergleichen lassen. Man habe in einem Bohrloche eine mit der Tiefe regelmässig zunehmende

Our case might most easily be compared with the following. Suppose that in a borehole the temperature has been found to increase regularly with

17 Philalèthe is the spokesman for Locke's views in Leibniz's *New Essays on Human Understanding*; Théophile, who answers him, speaks for Leibniz.

18

[1] Baumann, a. a. O. II., S. 39; Erdm. S. 243. [1] Baumann, op. cit., vol. II, p. 39; Erdm. p. 243.

GERMAN

Temperatur bemerkt; man habe bisher sehr verschiedene Gesteinsschichten angetroffen. Es ist dann offenbar aus den Beobachtungen, die man an diesem Bohrloche gemacht hat, allein nichts über die Beschaffenheit der tiefern Schichten zu schliessen, und ob die Regelmässigkeit der Temperaturvertheilung sich weiter bewähren würde, muss dahingestellt bleiben. Unter den Begriff »was bei fortgesetztem Bohren angetroffen wird« fällt zwar das bisher Beobachtete wie das Tieferliegende; aber das kann hier wenig nützen. Ebenso wenig wird es uns bei den Zahlen nützen, dass sie sämmtlich unter den Begriff »was man durch fortgesetzte Vermehrung um eins erhält« fallen.

Man kann eine Verschiedenheit der beiden Fälle darin finden, dass die Schichten nur angetroffen werden, die Zahlen aber durch die fortgesetzte Vermehrung um eins geradezu geschaffen und ihrem ganzen Wesen nach bestimmt werden. Dies kann nur heissen, dass man aus der Weise, wie eine Zahl, z. B. 8, durch Vermehrung um 1 entstanden ist, alle ihre Eigenschaften ableiten kann. Damit giebt man im Grunde zu, dass die Eigenschaften der Zahlen aus ihren Definitionen folgen, und es eröffnet sich die Möglichkeit, die allgemeinen Gesetze der Zahlen aus der allen gemeinsamen Entstehungsweise zu beweisen, während die besondern Eigenschaften der einzelnen aus der besondern Weise zu folgern wären, wie sie durch fortgesetzte Vermehrung um eins gebildet sind.

So kann man auch, was bei den Erdschichten, schon durch die Tiefe allein bestimmt ist, in der sie getroffen werden, also ihre Lagenverhältnisse, eben daraus schliessen, ohne dass man die Induction nöthig hätte; was aber nicht dadurch bestimmt ist, kann auch die Induction nicht lehren.

10.6 Vermuthlich kann das Verfahren der Induction selbst nur mittels allgemeiner Sätze der Arithmetik gerechtfertigt werden, wenn man darunter nicht eine blosse Gewöhnung versteht. Diese hat nämlich durchaus keine wahrheitverbürgende Kraft. Während das wissenschaftliche Verfahren nach objectiven Maasstäben bald in einer einzigen Bestätigung eine hohe Wahrscheinlichkeit begründet findet, bald tausendfaches Eintreffen fast für werthlos erachtet, wird die Gewöhnung durch Zahl und Stärke der Eindrücke und subjective Verhältnisse bestimmt, die keinerlei Recht haben, auf das Urtheil Einfluss zu üben. Die Induction muss sich auf die Lehre von der Wahrscheinlichkeit stützen, weil sie einen Satz nie mehr als wahrscheinlich machen kann. Wie diese Lehre aber ohne Voraussetzung

ENGLISH

depth, and that very different rock strata have been encountered so far. Then, clearly, nothing can be inferred about the nature of the deeper strata from the observations made at this borehole alone, and whether the regularity of the temperature distribution would continue to hold must be left open. Both what has been observed so far and what lies deeper do indeed fall under the concept "what is encountered as drilling continues"; but that can be of little use here. Just as little will it help us, in the case of numbers, that they all fall under the concept "what is obtained by continually increasing by one".

One may find a difference between the two cases in this: the strata are merely encountered, whereas the numbers are actually created by continued increase by one and determined thereby in their whole essence. This can only mean that from the way a number, e.g. 8, has arisen by increase by 1, all its properties can be derived. But in saying this one concedes, at bottom, that the properties of numbers follow from their definitions. And the possibility opens up of proving the general laws of numbers from the mode of generation common to all of them, while the particular properties of the individual numbers would be inferred from the particular way in which each is formed by continued increase by one.

So too, in the case of the earth's strata, whatever is already determined by the depth alone at which they are met with—namely their relations of position—can be inferred from just that, without any need for induction; but whatever is not determined by it, induction cannot teach either.

Presumably the procedure of induction can itself be justified only by means of general propositions of arithmetic—unless by induction one means mere habit. For habit has no power whatever to guarantee truth. Scientific procedure, following objective standards, sometimes finds a high probability established by a single confirmation, and sometimes considers a thousandfold recurrence almost worthless; habit, by contrast, is determined by the number and strength of impressions and by subjective circumstances that have no right at all to influence judgment. Induction must rest on the theory of probability, since it can never make a proposition more than probable. But how

GERMAN

ENGLISH

arithmetischer Gesetze entwickelt werden könne, ist nicht abzusehen.

this theory could be developed without presupposing arithmetical laws is impossible to see.

11.1 *Leibniz*[1] meint dagegen, dass die nothwendigen Wahrheiten, wie man solche in der Arithmetik findet, Principien haben müssen, deren Beweis nicht von den Beispielen und also nicht von dem Zeugnisse der Sinne abhangt, wiewohl ohne die Sinne sich niemand hätte einfallen lassen, daran zu denken. »Die ganze Arithmetik ist uns eingeboren und in uns auf virtuelle Weise.« Wie er den Ausdruck »eingeboren« meint, verdeutlicht eine andere Stelle[2]: »Es ist nicht wahr, dass alles, was man lernt, nicht eingeboren sei; – die Wahrheiten der Zahlen sind in uns, und nichtsdestoweniger lernt man sie, sei es, indem man sie aus ihrer Quelle zieht, wenn man sie auf beweisende Art lernt (was eben zeigt, dass sie eingeboren sind), sei es ...«.

Leibniz,[1] by contrast, holds that necessary truths, such as are found in arithmetic, must have principles whose proof does not depend on examples, and therefore not on the testimony of the senses—although without the senses it would never have occurred to anyone to think of them. "The whole of arithmetic is innate in us, and is in us virtually." What he means by the expression "innate" is made clear by another passage:[2] "It is not true that everything one learns is not innate—the truths of numbers are in us, and nonetheless one learns them, whether by drawing them from their source, when one learns them by way of proof (which shows precisely that they are innate), or ...".

1920

SYNTHETIC A PRIORI OR ANALYTIC?

Kant's appeal to intuition is examined, and arithmetic is contrasted with geometry.

GERMAN

ENGLISH

12.1 Wenn man den Gegensatz von analytisch und synthetisch hinzunimmt, ergeben sich vier Combinationen, von denen jedoch eine, nämlich analytisch aposteriori ausfällt. Wenn man sich mit *Mill* für aposteriori entschieden hat, bleibt also keine Wahl, sodass für uns nur noch die Möglichkeiten synthetisch apriori und analytisch zu erwägen bleiben. Für die erstere entscheidet sich *Kant*. In diesem Falle bleibt wohl nichts übrig, als eine reine Anschauung als letzten Erkenntnissgrund anzurufen, obwohl hier schwer zu sagen ist, ob es eine räumliche oder zeitliche ist, oder welche es sonst sein mag. *Baumann*[1] stimmt *Kant*, wenngleich mit etwas anderer Begründung, bei. Auch nach *Lipschitz*[2] fliessen die Sätze, welche die Unabhängigkeit der Anzahl von der Art des Zählens und die Vertauschbarkeit und Gruppirbarkeit der Summanden behaupten, aus der inneren Anschauung.

Hankel[3] gründet die Lehre von den reellen Zahlen auf drei Grundsätzen, denen er den Charakter der *notiones*

If we add the opposition between analytic and synthetic, we obtain four combinations, one of which, however—namely analytic a posteriori—drops out. If one has decided with *Mill* for a posteriori, there is thus no further choice; so for us only the possibilities synthetic a priori and analytic remain to be considered. *Kant* decides for the former. In that case there is presumably nothing left but to appeal to a pure intuition as the ultimate ground of knowledge, although it is hard to say here whether it is a spatial or a temporal one, or what else it might be. *Baumann*[1] agrees with *Kant*, though on somewhat different grounds. According to *Lipschitz*[2] too, the propositions asserting that the Number is independent of the manner of counting, and that the summands can be interchanged and grouped, flow from inner intuition.[21]

Hankel[3] bases the theory of the real numbers on three principles, to which he ascribes the charac-

19

[1] Baumann a. a. O. Bd. II., S. 13 u. 14; Erdm. S. 195, S. 208 u. 209.

[1] Baumann, op. cit., vol. II, pp. 13 and 14; Erdm. p. 195, pp. 208 and 209.

20

[2] Baumann a. a. O. Bd. II., S. 38; Erdm. S. 212.

[2] Baumann, op. cit., vol. II, p. 38; Erdm. p. 212.

21 Rudolf Lipschitz (1832–1903), German mathematician at Bonn, author of a *Lehrbuch der Analysis* (Textbook of Analysis, 1877–80).

GERMAN

communes zuschreibt: »Sie werden durch Explication vollkommen evident, gelten für alle Grössengebiete nach der reinen Anschauung der Grösse und können, ohne ihren Charakter einzubüssen, in Definitionen verwandelt werden, indem man sagt: Unter der Addition von Grössen versteht man eine Operation, welche diesen Sätzen genügt.« In der letzten Behauptung liegt eine Unklarheit. Vielleicht kann man die Definition machen; aber sie kann keinen Ersatz für jene Grundsätze bilden; denn bei der Anwendung würde es sich immer darum handeln: sind die Anzahlen Grössen, und ist das, was man Addition der Anzahlen zu nennen pflegt, Addition im Sinne dieser Definition? Und zur Beantwortung müsste man jene Sätze von den Anzahlen schon kennen.

Ferner erregt der Ausdruck »reine Anschauung der Grösse« Anstoss. Wenn man erwägt, was alles Grösse genannt wird: Anzahlen, Längen, Flächeninhalte, Volumina, Winkel, Krümmungen, Massen, Geschwindigkeiten, Kräfte, Lichtstärken, galvanische Stromstärken u. s. f., so ist wohl zu verstehen, wie man dies einem Grössen*begriffe* unterordnen kann; aber der Ausdruck »Anschauung der Grösse« und gar »reine Anschauung der Grösse« kann nicht als zutreffend anerkannt werden. Ich kann nicht einmal eine Anschauung von 100000 zugeben, noch viel weniger von Zahl im Allgemeinen oder gar von Grösse im Allgemeinen. Man beruft sich zu leicht auf innere Anschauung, wenn man keinen andern Grund anzugeben vermag. Aber man sollte dabei den Sinn des Wortes »Anschauung« doch nicht ganz aus dem Auge verlieren.

22 23 24

12.2 *Kant* definirt in der Logik (ed. Hartenstein, VIII, S. 88):

12.3 »Die Anschauung ist eine einzelne Vorstellung (repraesentatio singularis), der Begriff eine allgemeine (repraesentatio per notas communes) oder reflectirte Vorstellung (repraesentatio discursiva).«

ENGLISH

ter of *notiones communes* [common notions]: “They become completely evident through explication, hold for all domains of magnitude according to the pure intuition of magnitude, and can, without losing their character, be turned into definitions by saying: by the addition of magnitudes is understood an operation that satisfies these propositions.” The last assertion contains an unclarity. Perhaps one can make the definition; but it cannot serve as a substitute for those principles. For in applying it the question would always be: are Numbers magnitudes, and is what we usually call the addition of Numbers addition in the sense of this definition? And to answer that, one would already have to know those propositions about Numbers.

Further, the expression “pure intuition of magnitude” is objectionable. If one considers everything that is called a magnitude—Numbers, lengths, areas, volumes, angles, curvatures, masses, velocities, forces, intensities of light, strengths of galvanic current, and so on—one can well understand how all this can be subsumed under a *concept* of magnitude; but the expression “intuition of magnitude”, let alone “pure intuition of magnitude”, cannot be accepted as apt. I cannot even grant an intuition of 100000, still less of number in general, let alone of magnitude in general. People appeal to inner intuition too readily when they cannot give any other ground. But in doing so one should not entirely lose sight of the sense of the word “intuition”.

In the Logic (ed. Hartenstein, VIII, p. 88), *Kant* defines:

“An intuition is a singular idea (repraesentatio singularis [singular representation]), a concept a general idea (repraesentatio per notas communes [representation through common marks]) or reflected idea (repraesentatio discursiva [discursive representation]).”

22

[1] A. a. O. Bd. II., S. 669. | [1] Op. cit., vol. II, p. 669.

23

[2] Lehrbuch der Analysis, Bd. I., S. 1. | [2] Lehrbuch der Analysis, vol. I, p. 1.

24

[3] Theorie der complexen Zahlensysteme, S. 54 u. 55. | [3] Theorie der complexen Zahlensysteme, pp. 54 and 55.

	GERMAN	ENGLISH
12.4	Hier kommt die Beziehung zur Sinnlichkeit gar nicht zum Ausdrucke, die doch in der transcendentalen Aesthetik hinzugedacht wird, und ohne welche die Anschauung nicht als Erkenntnissprincip für die synthetischen Urtheile apriori dienen kann. In der Kr. d. r. V. (ed. Hartenstein III, S. 55) heisst es:	Here the relation to sensibility is not expressed at all—the relation that is surely thought in addition in the Transcendental Aesthetic, and without which intuition cannot serve as a principle of knowledge for synthetic a priori judgments. In the Critique of Pure Reason (ed. Hartenstein III, p. 55) we read:
12.5	»Vermittelst der Sinnlichkeit also werden uns Gegenstände gegeben und sie allein liefert uns Anschauungen.«	"By means of sensibility, therefore, objects are given to us, and it alone supplies us with intuitions."
12.6	Der Sinn unseres Wortes in der Logik ist demnach ein weiterer als in der trancendentalen Aesthetik. Im logischen Sinne könnte man vielleicht 100000 eine Anschauung nennen; denn ein allgemeiner Begriff ist es nicht. Aber in diesem Sinne genommen, kann die Anschauung nicht zur Begründung der arithmetischen Gesetze dienen.	The sense of our word in the Logic is accordingly wider than in the Transcendental Aesthetic. In the logical sense one could perhaps call 100000 an intuition; for it is not a general concept. But taken in this sense, intuition cannot serve to ground the laws of arithmetic.
13.1	Ueberhaupt wird es gut sein, die Verwandtschaft mit der Geometrie nicht zu überschätzen. Ich habe schon eine leibnizische Stelle dagegen angeführt. Ein geometrischer Punkt für sich betrachtet, ist von irgendeinem andern gar nicht zu unterscheiden; dasselbe gilt von Geraden und Ebenen. Erst wenn mehre Punkte, Gerade, Ebenen in einer Anschauung gleichzeitig aufgefasst werden, unterscheidet man sie. Wenn in der Geometrie allgemeine Sätze aus der Anschauung gewonnen werden, so ist das daraus erklärlich, dass die angeschauten Punkte, Geraden, Ebenen eigentlich gar keine besondern sind und daher als Vertreter ihrer ganzen Gattung gelten können. Anders liegt die Sache bei den Zahlen: jede hat ihre Eigenthümlichkeit. Inwiefern eine bestimmte Zahl alle andern vertreten kann, und wo ihre Besonderheit sich geltend macht, ist ohne Weiteres nicht zu sagen.	In general it will be well not to overestimate the kinship with geometry. I have already cited a passage from Leibniz against it. A geometrical point, considered by itself, cannot be distinguished in any way from any other; the same holds of straight lines and planes. Only when several points, lines or planes are grasped together in a single intuition does one distinguish them. If in geometry general propositions are obtained from intuition, this is explained by the fact that the intuited points, lines and planes are really not particular ones at all, and can therefore count as representatives of their whole kind. With numbers the matter is different: each has its own peculiarity. To what extent a particular number can represent all the others, and where its particularity makes itself felt, cannot be said offhand.
14.1	Auch die Vergleichung der Wahrheiten in Bezug auf das von ihnen beherrschte Gebiet spricht gegen die empirische und synthetische Natur der arithmetischen Gesetze.	A comparison of truths with respect to the domain they govern also tells against the empirical and synthetic nature of the arithmetical laws.
14.2	Die Erfahrungssätze gelten für die physische oder psychologische Wirklichkeit, die geometrischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des räumlich Anschaulichen, mag es nun Wirklichkeit oder Erzeugniss der Einbildungskraft sein. Die tollsten Fieberphantasien, die kühnsten Erfindungen der Sage und der Dichter, welche Thiere reden, Gestirne stille stehen lassen, aus Steinen Menschen und aus Menschen Bäume machen,	Empirical propositions hold for physical or psychological actuality; geometrical truths govern the domain of what is spatially intuitable, whether it be actuality or a product of the imagination. The wildest fever-dreams, the boldest inventions of legend and of poets—which make animals talk and stars stand still, turn stones into people and people into trees, and teach how to pull yourself

GERMAN

und lehren, wie man sich am eignen Schopfe aus dem Sumpfe zieht, sie sind doch, sofern sie anschaulich bleiben, an die Axiome der Geometrie gebunden. Von diesen kann nur das begriffliche Denken in gewisser Weise loskommen, wenn es etwa einen Raum von vier Dimensionen oder von positivem Krümmungsmaasse annimmt. Solche Betrachtungen sind durchaus nicht unnütz; aber sie verlassen ganz den Boden der Anschauung.

Wenn man diese auch dabei zu Hilfe nimmt, so ist es doch immer die Anschauung des euklidischen Raumes, des einzigen, von dessen Gebilden wir eine haben. Sie wird dann nur nicht so, wie sie ist, sondern symbolisch für etwas anderes genommen; man nennt z. B. gerade oder eben, was man doch als Krummes anschaut. Für das begriffliche Denken kann man immerhin von diesem oder jenem geometrischen Axiome das Gegentheil annehmen, ohne dass man in Widersprüche mit sich selbst verwickelt wird, wenn man Schlussfolgerungen aus solchen der Anschauung widerstreitenden Annahmen zieht. Diese Möglichkeit zeigt, dass die geometrischen Axiome von einander und von den logischen Urgesetzen unabhängig, also synthetisch sind. Kann man dasselbe von den Grundsätzen der Zahlenwissenschaft sagen?

Stürzt nicht alles in Verwirrung, wenn man einen von diesen leugnen wollte? Wäre dann noch Denken möglich? Liegt nicht der Grund der Arithmetik tiefer als der alles Erfahrungswissens, tiefer selbst als der der Geometrie? Die arithmetischen Wahrheiten beherrschen das Gebiet des Zählbaren. Dies ist das umfassendste; denn nicht nur das Wirkliche, nicht nur das Anschauliche gehört ihm an, sondern alles Denkbare. Sollten also nicht die Gesetze der Zahlen mit denen des Denkens in der innigsten Verbindung stehen?

15.1 Dass *Leibnizens* Aussprüche sich nur zu Gunsten der analytischen Natur der Zahlgesetze deuten lassen, ist vorauszusehen, da für ihn das Apriori mit dem Analytischen zusammenfällt. So sagt er[1], dass die Algebra ihre Vortheile einer viel höhern Kunst, nämlich der wahren Logik entlehne. An einer andern Stelle[2] vergleicht er die nothwendigen und zufälligen Wahrheiten mit den commensurabeln und incommensurabeln Grössen und meint, dass bei nothwendigen Wahrheiten ein Beweis oder eine Zurückführung auf Identitäten möglich sei.

ENGLISH

out of a swamp by your own hair—are still bound to the axioms of geometry, so long as they remain intuitable. Only conceptual thought can in a certain way break free of these axioms, when, say, it assumes a space of four dimensions or of positive curvature. Such considerations are by no means useless; but they leave the ground of intuition entirely.

Even if intuition is enlisted to help here, it is still always the intuition of Euclidean space, the only space of whose configurations we have any intuition. It is then simply taken not as it is but as a symbol for something else; for example, one calls straight or flat what one nonetheless intuits as curved. For conceptual thought one can always assume the opposite of this or that geometrical axiom without becoming entangled in contradictions with oneself when one draws conclusions from such assumptions, which conflict with intuition. This possibility shows that the geometrical axioms are independent of one another and of the primitive laws of logic, and are therefore synthetic. Can the same be said of the fundamental principles of the science of number?

Does not everything fall into confusion if one tries to deny one of these? Would thought still be possible at all? Does not the ground of arithmetic lie deeper than that of all empirical knowledge, deeper even than that of geometry? The arithmetical truths govern the domain of the countable. This is the most comprehensive of all; for not only the actual, not only the intuitable belongs to it, but everything thinkable. Should not the laws of number, then, stand in the most intimate connection with the laws of thought?

That *Leibniz*'s pronouncements can only be read in favor of the analytic nature of the laws of number is to be expected, since for him the a priori coincides with the analytic. Thus he says[1] that algebra borrows its advantages from a far higher art, namely true logic. In another passage[2] he compares necessary and contingent truths with commensurable and incommensurable magnitudes, and holds that in the case of necessary truths a proof, or a reduction to identities, is possible.

	GERMAN	ENGLISH
	Doch diese Aeusserungen verlieren dadurch an Gewicht, dass *Leibniz* dazu neigt, alle Wahrheiten als beweisbar anzusehen[3]: »... dass jede Wahrheit ihren apriorischen, aus dem Begriff der Termini gezogenen Beweis hat, wiewohl es nicht immer in unserer Macht steht, zu dieser Analyse zu kommen.« Der Vergleich mit der Commensurabilität und Incommensurabilität richtet freilich doch wieder eine für uns wenigstens unüberschreitbare Schranke zwischen zufälligen und nothwendigen Wahrheiten auf.	But these remarks lose weight because *Leibniz* inclines to regard all truths as provable:[3] "... that every truth has its a priori proof, drawn from the concept of the terms, although it is not always in our power to arrive at this analysis." The comparison with commensurability and incommensurability, however, once again sets up a barrier between contingent and necessary truths—one that, for us at least, cannot be crossed.
15.2	Sehr entschieden im Sinne der analytischen Natur der Zahlgesetze spricht sich *W. Stanley Jevons* aus[1]: »Zahl ist nur logische Unterscheidung und Algebra eine hoch entwickelte Logik.«	*W. Stanley Jevons* speaks out very decidedly in favor of the analytic nature of the laws of number:[1] "Number is only logical discrimination, and algebra a highly developed logic."[28]
16.1	Aber auch diese Ansicht hat ihre Schwierigkeiten. Soll dieser hochragende, weitverzweigte und immer noch wachsende Baum der Zahlenwissenschaft in blossen Identitäten wurzeln? Und wie kommen die leeren Formen der Logik dazu, aus sich heraus solchen Inhalt zu gewinnen?	But this view too has its difficulties. Is this towering, widely branching and still growing tree of the science of number to be rooted in mere identities? And how do the empty forms of logic manage to extract such content from themselves?
16.2	*Mill* meint: »Die Lehre, dass wir durch kunstfertiges Handhaben der Sprache Thatsachen entdecken, die verborgene Naturprocesse enthüllen können, ist dem gesunden Menschenverstande so entgegen, dass es schon einen Fortschritt in der Philosophie verlangt, um sie zu glauben«.	*Mill* thinks: "The doctrine that by the skillful handling of language we discover facts that can reveal hidden processes of nature is so contrary to common sense that it takes some progress in philosophy before one can believe it."
16.3	Gewiss dann, wenn man sich bei dem kunstfertigen Handhaben nichts denkt. *Mill* wendet sich hier gegen einen Formalismus, der kaum von irgendwem vertreten wird. Jeder, der Worte oder mathematische Zeichen gebraucht, macht den Anspruch, dass sie etwas bedeuten, und niemand wird erwarten, dass aus leeren Zeichen etwas Sinnvolles hervorgehe. Aber es ist möglich, dass ein Mathematiker längere Rechnungen vollführt, ohne unter seinen Zeichen etwas sinnlich Wahrnehmbares,	Certainly so—if one thinks nothing while doing the skillful handling. *Mill* is attacking here a formalism that hardly anyone holds. Everyone who uses words or mathematical signs claims that they mean something, and no one will expect anything meaningful to come out of empty signs. But it is possible for a mathematician to carry out quite long calculations without understanding by his signs anything perceptible by the senses, anything

25 252627

[1] Baumann a. a. O. Bd. II., S. 56; Erdm. S. 424. | [1] Baumann, op. cit., vol. II, p. 56; Erdm. p. 424.

26

[2] Baumann a. a. O. Bd. II., S. 57; Erdm. S. 83. | [2] Baumann, op. cit., vol. II, p. 57; Erdm. p. 83.

27

[3] Baumann a. a. O. Bd. II., S. 57; Pertz, II., S. 55. | [3] Baumann, op. cit., vol. II, p. 57; Pertz, II, p. 55.

28 William Stanley Jevons (1835–1882), English economist and logician, author of *The Principles of Science* (1874).

29

[1] The principles of science. London 1879. S. 156. | [1] The principles of science. London 1879. p. 156.

GERMAN

Anschauliches zu verstehen. Darum sind diese Zeichen noch nicht sinnlos; man unterscheidet dennoch ihren Inhalt von ihnen selbst, wenn dieser auch vielleicht nur mittels der Zeichen fassbar wird. Man ist sich bewusst, dass andere Zeichen für Dasselbe hätten festgesetzt werden können.

Es genügt zu wissen, wie der in den Zeichen versinnlichte Inhalt logisch zu behandeln ist, und wenn man Anwendungen auf die Physik machen will, wie der Uebergang zu den Erscheinungen geschehen muss. Aber in einer solchen Anwendung ist nicht der eigentliche Sinn der Sätze zu sehen. Dabei geht immer ein grosser Theil der Allgemeinheit verloren, und es kommt etwas Besonderes hinein, das bei andern Anwendungen durch Anderes ersetzt wird.

17.1 Man kann trotz aller Herabsetzung der Deduction doch nicht leugnen, dass die durch Induction begründeten Gesetze nicht genügen. Aus ihnen müssen neue Sätze abgeleitet werden, die in keinem einzelnen von jenen enthalten sind. Dass sie in allen zusammen schon in gewisser Weise stecken, entbindet nicht von der Arbeit, sie daraus zu entwickeln und für sich herauszustellen. Damit eröffnet sich folgende Möglichkeit. Statt eine Schlussreihe unmittelbar an eine Thatsache anzuknüpfen, kann man, diese dahingestellt sein lassend, ihren Inhalt als Bedingung mitführen. Indem man so alle Thatsachen in einer Gedankenreihe durch Bedingungen ersetzt, wird man das Ergebniss in der Form erhalten, dass von einer Reihe von Bedingungen ein Erfolg abhängig gemacht ist.

Diese Wahrheit wäre durch Denken allein, oder, um mit *Mill* zu reden, durch kunstfertiges Handhaben der Sprache begründet. Es ist nicht unmöglich, dass die Zahlgesetze von dieser Art sind. Sie wären dann analytische Urtheile, obwohl sie nicht durch Denken allein gefunden zu sein brauchten; denn nicht die Weise des Findens kommt hier in Betracht, sondern die Art der Beweisgründe; oder, wie *Leibniz* sagt[1], »es handelt sich hier nicht um die Geschichte unserer Entdeckungen, die verschieden ist in verschiedenen Menschen, sondern um die Verknüpfung und die natürliche Ordnung der Wahrheiten, die immer dieselbe ist.« Die Beobachtung hätte dann zuletzt zu entscheiden, ob die in dem so begründeten Gesetze enthaltenen Bedingungen erfüllt sind.

So würde man schliesslich eben dahin gelangen, wohin man durch unmittelbare Anknüpfung der Schlussreihe an

ENGLISH

intuitable. That does not make these signs meaningless; one still distinguishes their content from the signs themselves, even if the content can perhaps be grasped only by means of the signs. One is aware that other signs could have been laid down for the same thing.

It is enough to know how the content made sensible in the signs is to be treated logically, and—if one wants to make applications to physics—how the transition to the phenomena must be made. But the real sense of the propositions is not to be seen in such an application. In it a large part of the generality is always lost, and something particular enters that is replaced by something else in other applications.

For all the disparagement of deduction, one cannot deny that the laws established by induction are not enough. From them new propositions must be derived that are not contained in any one of them singly. That these propositions are already, in a certain way, contained in all of them together does not release us from the work of developing them out of the laws and setting them out on their own. This opens up the following possibility. Instead of tying a chain of inferences directly to a fact, one can leave the fact undecided and carry its content along as a condition. By thus replacing all the facts in a train of thought with conditions, one will obtain the result in a form in which an outcome is made dependent on a series of conditions.

This truth would be established by thought alone —or, to put it in *Mill*'s terms, by the skillful handling of language. It is not impossible that the laws of number are of this kind. They would then be analytic judgments, even though they need not have been found by thought alone; for what matters here is not the way they were found but the kind of grounds on which their proof rests. Or, as *Leibniz* says,[1] "the question here is not the history of our discoveries, which differs in different people, but the connection and natural order of truths, which is always the same." Observation would then, in the end, have to decide whether the conditions contained in a law established in this way are fulfilled.

In this way one would finally arrive at just the point one would have reached by tying the chain

GERMAN

die beobachteten Thatsachen gekommen wäre. Aber die hier angedeutete Art des Vorgehens ist in vielen Fällen vorzuziehen, weil sie auf einen allgemeinen Satz führt, der nicht nur auf die grade vorliegenden Thatsachen anwendbar zu sein braucht. Die Wahrheiten der Arithmetik würden sich dann zu denen der Logik ähnlich verhalten wie die Lehrsätze zu den Axiomen der Geometrie. Jede würde in sich eine ganze Schlussreihe für den künftigen Gebrauch verdichtet enthalten, und ihr Nutzen würde darin bestehen, dass man die Schlüsse nicht mehr einzeln zu machen braucht, sondern gleich das Ergebniss der ganzen Reihe aussprechen kann[2].

Angesichts der gewaltigen Entwickelung der arithmetischen Lehren und ihrer vielfachen Anwendungen wird sich dann freilich die weit verbreitete Geringschätzung der analytischen Urtheile und das Märchen von der Unfruchtbarkeit der reinen Logik nicht halten lassen.

30 31

17.2 Wenn man diese nicht hier zuerst geäusserte Ansicht im Einzelnen so streng durchführen könnte, dass nicht der geringste Zweifel zurückbliebe, so würde das, wie mir scheint, kein ganz unwichtiges Ergebniss sein.

ENGLISH

of inferences directly to the observed facts. But the procedure indicated here is in many cases preferable, because it leads to a general proposition that need not be applicable only to the facts at hand. The truths of arithmetic would then be related to those of logic much as the theorems of geometry are related to its axioms. Each would contain within itself a whole chain of inferences, condensed for future use, and its usefulness would consist in our no longer having to draw the inferences one by one, but being able to state the result of the whole chain at once.[2]

In view of the enormous development of arithmetical theory and its manifold applications, the widespread contempt for analytic judgments, and the fairy tale of the sterility of pure logic, will then, of course, no longer be tenable.

If this view—which is not voiced here for the first time—could be carried through in detail so rigorously that not the slightest doubt remained, that would not, it seems to me, be an altogether unimportant result.

30

[1] Nouveaux Essais, IV, § 9; Erdm. S. 360.

[1] Nouveaux Essais, IV, § 9; Erdm. p. 360.

31

[2] Es ist auffallend, dass auch *Mill* a. a. O. II. Buch, VI. Cap. § 4 diese Ansicht auszusprechen scheint. Sein gesunder Sinn durchbricht eben von Zeit zu Zeit sein Vorurtheil für das Empirische. Aber dieses bringt immer wieder Alles in Verwirrung, indem es ihn die physikalischen Anwendungen der Arithmetik mit dieser selbst verwechseln lässt. Er scheint nicht zu wissen, dass ein hypothetisches Urtheil auch dann wahr sein kann, wenn die Bedingung nicht wahr ist.

[2] It is striking that *Mill* too, op. cit., Book II, ch. VI, § 4, seems to express this view. His good sense does break through his prejudice in favor of the empirical from time to time. But that prejudice keeps throwing everything into confusion again, by making him confuse the physical applications of arithmetic with arithmetic itself. He seems not to know that a hypothetical judgment can be true even when the condition is not true.

II. Views of Certain Writers on the Concept of Number

Meinungen einiger Schriftsteller über den Begriff der Anzahl
Is number a property of external things? Is it something subjective? Number as a set or aggregate.

GERMAN

18.1 Indem wir uns nun den ursprünglichen Gegenständen der Arithmetik zuwenden, unterscheiden wir die einzelnen Zahlen 3, 4 u. s. f. von dem allgemeinen Begriffe der Anzahl. Nun haben wir uns schon dafür entschieden, dass die einzelnen Zahlen am besten in der Weise von *Leibniz*, *Mill*, *H. Grassmann* und Andern aus der Eins und der Vermehrung um eins abgeleitet werden, dass aber diese Erklärungen unvollständig bleiben, solange die Eins und die Vermehrung um eins unerklärt sind. Wir haben gesehen, dass man allgemeiner Sätze bedarf, um aus diesen Definitionen die Zahlformeln abzuleiten. Solche Gesetze können eben wegen ihrer Allgemeinheit nicht aus den Definitionen der einzelnen Zahlen folgen, sondern nur aus dem allgemeinen Begriffe der Anzahl. Wir unterwerfen diesen jetzt einer genaueren Betrachtung.

Dabei werden voraussichtlich auch die Eins und die Vermehrung um eins erörtert werden müssen und somit auch die Definitionen der einzelnen Zahlen eine Ergänzung zu erwarten haben.

19.1 Hier möchte ich mich nun gleich gegen den Versuch wenden, die Zahl geometrisch als Verhältnisszahl von Längen oder Flächen zu fassen. Man glaubte offenbar die vielfachen Anwendungen der Arithmetik auf Geometrie dadurch zu erleichtern, dass man gleich die Anfänge in die engste Beziehung setzte.

19.2 *Newton*[1] will unter Zahl nicht so sehr eine Menge von Einheiten als das abstracte Verhältniss einer jeden Grösse zu einer andern derselben Art verstehen, die als Einheit genommen wird. Man kann zugeben, dass hiermit die Zahl im weitern Sinne, wozu auch die Brüche und Irrationalzahlen gehören, zutreffend beschrieben sei; doch werden hierbei die Begriffe der Grösse und des Grössenverhältnisses vorausgesetzt. Danach scheint es, dass die Erklärung der Zahl im engern Sinne, der Anzahl, nicht überflüssig werde; denn *Euklid* braucht den Begriff des Gleichvielfachen um die Gleichheit von zwei Längenverhältnissen zu definiren; und das Gleichvielfache kommt wieder auf eine Zahlengleichheit

ENGLISH

Turning now to the original objects of arithmetic, we distinguish the individual numbers 3, 4, etc. from the general concept of Number. We have already decided that the individual numbers are best derived, in the manner of *Leibniz*, *Mill*, *H. Grassmann* and others, from one and increase by one, but that these definitions remain incomplete so long as one and increase by one are left undefined. We have seen that general propositions are needed in order to derive the numerical formulas from these definitions. Precisely because of their generality, such laws cannot follow from the definitions of the individual numbers, but only from the general concept of Number. We now subject this concept to closer examination.

In the course of this, presumably, one and increase by one will also have to be discussed, and so the definitions of the individual numbers too may expect to be supplemented.

Here I would like at once to oppose the attempt to conceive of number geometrically, as a ratio of lengths or areas. People evidently believed they would make the many applications of arithmetic to geometry easier by placing the beginnings of the two in the closest relation from the start.

Newton[1] wants to understand by number not so much a set of units as the abstract ratio of any magnitude to another magnitude of the same kind, taken as unit. One may grant that this aptly describes number in the wider sense, which also includes fractions and irrational numbers; but it presupposes the concepts of magnitude and of the ratio of magnitudes. It seems, then, that a definition of number in the narrower sense, of Number, would not be made superfluous. For *Euclid* needs the concept of the equimultiple in order to define the identity of two ratios of lengths; and the equimultiple in turn comes down to an identity of

GERMAN

hinaus. Aber es mag sein, dass die Gleichheit von Längenverhältnissen unabhängig vom Zahlbegriffe definirbar ist.

Man bliebe dann jedoch im Ungewissen darüber, in welcher Beziehung die so geometrisch definirte Zahl zu der Zahl des gemeinen Lebens stände. Dies wäre dann ganz von der Wissenschaft getrennt. Und doch kann man wohl von der Arithmetik verlangen, dass sie die Anknüpfungspunkte für jede Anwendung der Zahl bieten muss, wenn auch die Anwendung selbst nicht ihre Sache ist. Auch das gewöhnliche Rechnen muss die Begründung seines Verfahrens in der Wissenschaft finden. Und dann erhebt sich die Frage, ob die Arithmetik selbst mit einem geometrischen Begriffe der Zahl auskomme, wenn man an die Anzahl der Wurzeln einer Gleichung, der Zahlen, die prim zu einer Zahl und kleiner als sie sind, und ähnliche Vorkommnisse denkt. Dagegen kann die Zahl, welche die Antwort auf die Frage wieviel?

giebt, auch bestimmen, wieviel Einheiten in einer Länge enthalten sind. Die Rechnung mit negativen, gebrochenen, Irrationalzahlen kann auf die mit den natürlichen Zahlen zurückgeführt werden. *Newton* wollte aber vielleicht unter Grössen, als deren Verhältniss die Zahl definirt wird, nicht nur geometrische, sondern auch Mengen verstehen. Dann wird jedoch die Erklärung für unsern Zweck unbrauchbar, weil von den Ausdrücken »Zahl, durch die eine Menge bestimmt wird« und »Verhältniss einer Menge zur Mengeneinheit« der letztere keine bessere Auskunft als der erstere giebt.

1

20.1 Die erste Frage wird nun sein, ob Zahl definirbar ist. *Hankel*[1] spricht sich dagegen aus: »Was es heisst, ein Object 1mal, 2mal, 3mal … denken oder setzen, kann bei der principiellen Einfachheit des Begriffes der Setzung nicht definirt werden.« Hier kommt es jedoch weniger auf das Setzen als auf das 1mal, 2mal, 3mal an. Wenn dies definirt werden könnte, so würde die Undefinirbarkeit des Setzens uns wenig beunruhigen. *Leibniz* ist geneigt, die Zahl wenigstens annähernd als adaequate Idee anzusehen, d. h. als eine solche, die so deutlich ist, dass alles, was in ihr vorkommt, wieder deutlich ist.

2

ENGLISH

numbers. But it may be that the identity of ratios of lengths can be defined independently of the concept of number.

But one would then remain uncertain how the number so defined geometrically stood in relation to the number of everyday life. The latter would then be completely cut off from science. And yet one may surely demand of arithmetic that it supply the points of attachment for every application of number, even if the application itself is not its business. Ordinary calculation, too, must find the grounding of its procedure in science. And then the question arises whether arithmetic itself can manage with a geometrical concept of number, when one thinks of the Number of roots of an equation, of the numbers that are prime to a given number and smaller than it, and of similar cases. By contrast, the number that gives the answer to the question “how many?”

can also determine how many units a length contains. Calculation with negative, fractional and irrational numbers can be reduced to calculation with the natural numbers. Perhaps, though, *Newton* meant to understand by the magnitudes whose ratio number is defined to be not only geometrical magnitudes but also sets. In that case, however, the definition becomes useless for our purpose; for of the two expressions “number by which a set is determined” and “ratio of a set to the unit of sets”, the second gives no better information than the first.

The first question, then, will be whether number is definable. *Hankel*[1] declares against it: “What it means to think or posit an object once, twice, three times … cannot be defined, given the fundamental simplicity of the concept of positing.” Here, however, what matters is less the positing than the once, twice, three times. If that could be defined, the indefinability of positing would trouble us little. *Leibniz* is inclined to regard number, at least approximately, as an adequate idea, that is, as one so distinct that everything occurring in it is in turn distinct.

1

[1] Baumann a. a. O. Bd. I, S. 475.

[1] Baumann, op. cit., vol. I, p. 475.

	GERMAN	ENGLISH
20.2	Wenn man im Ganzen mehr dazu neigt, die Anzahl für undefinirbar zu halten, so liegt das wohl mehr an dem Misslingen darauf gerichteter Versuche als an dem Bestehen der Sache selbst entnommener Gegengründe.	If on the whole people tend rather to regard Number as indefinable, this is probably due more to the failure of attempts to define it than to any counter-arguments drawn from the matter itself.

IS NUMBER A PROPERTY OF EXTERNAL THINGS?

Number is compared with color and shown not to belong to things as their properties do.

	GERMAN	ENGLISH
21.1	Versuchen wir wenigstens der Anzahl ihre Stelle unter unsern Begriffen anzuweisen! In der Sprache erscheinen Zahlen meistens in adjectivischer Form und in attributiver Verbindung ähnlich wie die Wörter hart, schwer, roth, welche Eigenschaften der äusseren Dinge bedeuten. Es liegt die Frage nahe, ob man die einzelnen Zahlen auch so auffassen müsse, und ob demgemäss der Begriff der Anzahl etwa mit dem der Farbe zusammengestellt werden könne.	Let us at least try to assign Number its place among our concepts! In language, numbers mostly appear in adjectival form and in attributive combination, much like the words “hard”, “heavy”, “red”, which mean properties of external things. The question naturally arises whether the individual numbers must also be conceived in this way, and whether, accordingly, the concept of Number could be classed with, say, that of color.
21.2	Dies scheint die Meinung von *M. Cantor*[1] zu sein, wenn er die Mathematik eine Erfahrungswissenschaft nennt, insofern sie von der Betrachtung von Objecten der Aussenwelt ihren Anfang nehme. Nur durch Abstraction von Gegenständen entstehe die Zahl.	This seems to be the view of *M. Cantor*,[1] when he calls mathematics an empirical science insofar as it takes its start from the consideration of objects of the external world. Number, on his account, arises only through abstraction from objects.[3]
4		
21.3	*E. Schröder*[1] lässt die Zahl der Wirklichkeit nachgebildet, aus ihr entnommen werden, indem die Einheiten durch Einer abgebildet würden. Dies nennt er Abstrahiren der Zahl. Bei dieser Abbildung würden die Einheiten nur in Hinsicht ihrer Häufigkeit dargestellt, indem von allen andern Bestimmungen der Dinge als Farbe, Gestalt abgesehen werde. Hier ist Häufigkeit nur ein anderer Ausdruck für Anzahl. Schröder stellt also Häufigkeit oder Anzahl in eine Linie mit Farbe und Gestalt und betrachtet sie als eine Eigenschaft der Dinge.	*E. Schröder*[1] has number copied from actuality and taken from it, the units being represented by ones. This he calls abstracting number. In this representation, he says, the units are presented only with regard to their frequency, all other determinations of the things, such as color and shape, being disregarded. Here “frequency” is just another expression for Number. Schröder thus puts frequency, or Number, on a level with color and shape and regards it as a property of things.
5		
22.1	*Baumann*[1] verwirft den Gedanken, dass die Zahlen von den äussern Dingen abgezogene Begriffe seien: »Weil nämlich die äussern Dinge uns keine strengen Einheiten	*Baumann*[1] rejects the thought that numbers are concepts abstracted from external things: “Because external things do not present us with strict

2

[1] Theorie der complexen Zahlensysteme, S. 1. | [1] Theorie der complexen Zahlensysteme, p. 1.

3 Moritz Cantor (1829–1920), German historian of mathematics—not to be confused with Georg Cantor, the founder of set theory.

4

[1] Grundzüge einer Elementarmathematik, S. 2, § 4. Aehnlich Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, Bonn 1877, S. 1. | [1] Grundzüge einer Elementarmathematik, p. 2, § 4. Similarly Lipschitz, Lehrbuch der Analysis, Bonn 1877, p. 1.

5

[1] Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipz. 1873, S. 6, 10 u. 11. | [1] Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Leipzig 1873, pp. 6, 10 and 11.

GERMAN

darstellen; sie stellen uns abgegränzte Gruppen oder sinnliche Punkte dar, aber wir haben die Freiheit, diese selber wieder als Vieles zu betrachten«. In der That, während ich nicht im Stande bin, durch blosse Auffassungsweise die Farbe eines Dinges oder seine Härte im Geringsten zu verändern, kann ich die Ilias als Ein Gedicht, als 24 Gesänge oder als eine grosse Anzahl von Versen auffassen. Spricht man nicht in einem ganz andern Sinne von 1000 Blättern als von grünen Blättern des Baumes? Die grüne Farbe legen wir jedem Blatte bei, nicht so die Zahl 1000.

Wir können alle Blätter des Baumes unter dem Namen seines Laubes zusammenfassen. Auch dieses ist grün, aber nicht 1000. Wem kommt nun eigentlich die Eigenschaft 1000 zu? Fast scheint es weder dem einzelnen Blatte noch der Gesammtheit; vielleicht gar nicht eigentlich den Dingen der Aussenwelt? Wenn ich jemandem einen Stein gebe mit den Worten: bestimme das Gewicht hiervon, so habe ich ihm damit den ganzen Gegenstand seiner Untersuchung gegeben. Wenn ich ihm aber einen Pack Spielkarten in die Hand gebe mit den Worten: bestimme die Anzahl hiervon, so weiss er nicht, ob ich die Zahl der Karten oder der vollständigen Spiele oder etwa der Wertheinheiten beim Skatspiele erfahren will.

Damit, dass ich ihm den Pack in die Hand gebe, habe ich ihm den Gegenstand seiner Untersuchung noch nicht vollständig gegeben; ich muss ein Wort: Karte, Spiel, Wertheinheit hinzufügen. Man kann auch nicht sagen, dass die verschiedenen Zahlen hier so wie die verschiedenen Farben neben einander bestehen. Auf die einzelne farbige Fläche kann ich hindeuten, ohne ein Wort zu sagen, nicht so auf die einzelne Zahl. Wenn ich einen Gegenstand mit demselben Rechte grün und roth nennen kann, so ist das ein Zeichen, dass dieser Gegenstand nicht der eigentliche Träger des Grünen ist. Diesen habe ich erst in einer Fläche, die nur grün ist. So ist auch ein Gegenstand, dem ich mit demselben Rechte verschiedene Zahlen zuschreiben kann, nicht der eigentliche Träger einer Zahl.

7

22.2 Ein wesentlicher Unterschied zwischen Farbe und Anzahl besteht demnach darin, dass die blaue Farbe einer Fläche unabhängig von unserer Willkühr zukommt. Sie ist ein Vermögen, gewisse Lichtstrahlen zurückzuwerfen,

ENGLISH

unities; they present us with bounded groups or sensible points, but we are free to regard these in turn as many." Indeed: whereas I cannot change the color of a thing or its hardness in the slightest by a mere way of regarding it, I can regard the Iliad as one poem, as 24 books, or as a large Number of lines. Does one not speak of 1000 leaves in quite a different sense from that in which one speaks of the green leaves of the tree? We ascribe the green color to each leaf, but not so the number 1000.

We can bring all the leaves of the tree together under the name of its foliage. This too is green, but it is not 1000. To what, then, does the property 1000 really belong? It almost seems to belong neither to the single leaf nor to the totality; perhaps not really to the things of the external world at all? If I give someone a stone with the words "Determine the weight of this", I have thereby given him the whole object of his investigation. But if I put a pack of playing cards into his hand with the words "Determine the Number of this", he does not know whether I want to know the number of cards, or of complete decks, or perhaps of units of value in the game of skat.[6]

By putting the pack into his hand I have not yet given him the object of his investigation completely; I must add a word: "card", "deck", "unit of value". Nor can one say that the different numbers exist side by side here in the way the different colors do. I can point to a single colored surface without saying a word, but not so to a single number. If I can with equal right call an object green and red, that is a sign that this object is not the real bearer of the green. That I have only in a surface that is green and nothing else. Likewise, an object to which I can with equal right ascribe different numbers is not the real bearer of a number.

An essential difference between color and Number thus lies in this: the blue color belongs to a surface independently of our choice. It is a capacity to reflect certain rays of light and to absorb

6 Skat is a German card game in which the cards carry point values.

7

[1] A. a. O. Bd. II, S. 669.

[1] Op. cit., vol. II, p. 669.

GERMAN

andere mehr oder weniger zu verschlucken, und daran kann unsere Auffassung nicht das Geringste ändern. Dagegen kann ich nicht sagen, dass dem Pack Spielkarten die Anzahl 1 oder 100 oder irgend eine andere an sich zukomme, sondern höchstens in Bezug auf unsere willkührliche Auffassungsweise, und dann auch nicht so, dass wir ihm die Anzahl einfach als Praedicat beilegen könnten. Was wir ein vollständiges Spiel nennen wollen, ist offenbar eine willkührliche Festsetzung und der Pack Spielkarten weiss nichts davon. Indem wir ihn aber in dieser Hinsicht betrachten, entdecken wir vielleicht, dass wir ihn zwei vollständige Spiele nennen können.

Jemand, der nicht wüsste, was man ein vollständiges Spiel nennt, würde wahrscheinlich irgend eine andere Anzahl eher an ihm herausfinden, als grade die Zwei.

23.1 Die Frage, wem die Zahl als Eigenschaft zukomme, beantwortet *Mill*[1] so:

8

23.2 »Der Name einer Zahl bezeichnet eine Eigenschaft, die dem Aggregat von Dingen angehört, welche wir mit dem Namen benennen; und diese Eigenschaft ist die charakteristische Weise, in welcher das Aggregat zusammengesetzt ist oder in Theile zerlegt werden kann.«

23.3 Hier ist zunächst der bestimmte Artikel in dem Ausdrucke »die charakteristische Weise« ein Fehler; denn es giebt sehr verschiedene Weisen, wie man ein Aggregat zerlegen kann, und man kann nicht sagen, dass Eine allein charakteristisch wäre. Ein Bündel Stroh kann z. B. so zerlegt werden, dass man alle Halme durchschneidet, oder so, dass man es in einzelne Halme auflöst, oder so dass man zwei Bündel daraus macht. Ist denn ein Haufe von hundert Sandkörnern ebenso zusammengesetzt wie ein Bündel von 100 Strohhalmen? und doch hat man dieselbe Zahl. Das Zahlwort »Ein« in dem Ausdruck »Ein Strohhalm« drückt doch nicht aus, wie dieser Halm aus Zellen oder aus Molekeln zusammengesetzt ist. Noch mehr Schwierigkeit macht die Zahl 0.

Müssen denn die Strohhalme überhaupt ein Bündel bilden, um gezählt werden zu können? Muss man die Blinden im Deutschen Reiche durchaus in einer Versammlung vereinigen, damit der Ausdruck »Zahl der Blinden im Deutschen Reiche« einen Sinn habe? Sind tausend Weizenkörner, nachdem sie ausgesäet sind, nicht

ENGLISH

others to a greater or lesser degree, and our way of regarding it cannot change that in the slightest. By contrast, I cannot say that the Number 1, or 100, or any other belongs to the pack of playing cards in itself, but at most in relation to our arbitrary way of regarding it—and even then not in such a way that we could simply ascribe the Number to it as a predicate. What we choose to call a complete deck is obviously an arbitrary stipulation, and the pack of playing cards knows nothing about it. But by considering the pack in this respect we may discover that we can call it two complete decks.

Someone who did not know what is called a complete deck would probably find some other Number in it sooner than two.

Mill[1] answers the question of what number belongs to as a property as follows:

"The name of a number denotes a property belonging to the aggregate of things that we call by the name; and this property is the characteristic way in which the aggregate is made up of parts, or can be separated into parts."

Here, to begin with, the definite article in the expression "the characteristic way" is a mistake; for there are very different ways in which an aggregate can be divided, and one cannot say that one alone is characteristic. A bundle of straw, for example, can be divided by cutting through all the straws, or by breaking it up into single straws, or by making two bundles out of it. Is a heap of a hundred grains of sand made up in the same way as a bundle of 100 straws? And yet we have the same number. The number word "one" in the expression "one straw" surely does not express how this straw is made up of cells or of molecules. The number 0 causes still more difficulty.

Must the straws form a bundle at all in order to be counted? Must all the blind people in the German Empire be gathered together in one assembly before the expression "number of blind people in the German Empire" can have a sense? Are a thousand grains of wheat, once they have been sown, no

8

[1] A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap., § 5.

[1] Op. cit., Book III, ch. XXIV, § 5.

GERMAN

mehr tausend Weizenkörner? Giebt es eigentlich Aggregate von Beweisen eines Lehrsatzes oder von Ereignissen? und doch kann man auch diese zählen. Dabei ist es gleichgiltig, ob die Ereignisse gleichzeitig oder durch Jahrtausende getrennt sind.

24.1 Damit kommen wir auf einen andern Grund, die Zahl nicht mit Farbe und Festigkeit zusammenzustellen: die bei weitem grössere Anwendbarkeit.

24.2 *Mill*[1] meint, die Wahrheit, dass, was aus Theilen zusammengesetzt ist, aus Theilen dieser Theile zusammengesetzt ist, sei von allen Naturerscheinungen giltig, weil alle gezählt werden könnten. Aber kann nicht noch weit mehr gezählt werden? *Locke*[2] sagt: »Die Zahl findet Anwendung auf Menschen, Engel, Handlungen, Gedanken, jedes Ding, das existirt oder vorgestellt werden kann«. *Leibniz*[3] verwirft die Meinung der Scholastiker, dass die Zahl auf unkörperliche Dinge unanwendbar sei, und nennt die Zahl gewissermaassen eine unkörperliche Figur, entstanden aus der Vereinigung irgendwelcher Dinge, z. B. Gottes, eines Engels, eines Menschen, der Bewegung, welche zusammen vier sind. Daher, meint er, ist die Zahl etwas ganz Allgemeines und zur Metaphysik gehörig.

An einer andern Stelle[4] sagt er: »Gewogen kann nicht werden, was nicht Kraft und Vermögen hat; was keine Theile hat, hat demgemäss kein Maass; aber es giebt nichts, was nicht die Zahl zulässt. So ist die Zahl gleichsam die metaphysische Figur«.

9101112

24.3 Es wäre in der That wunderbar, wenn eine, von äussern Dingen abstrahirte Eigenschaft, auf Ereignisse, auf Vorstellungen, auf Begriffe ohne Aenderung des Sinnes übertragen werden könnte. Es wäre grade so, als ob man von einem schmelzbaren Ereignisse, einer blauen Vorstellung, einem salzigen Begriffe, einem zähen Urtheile reden wollte.

ENGLISH

longer a thousand grains of wheat? Are there really such things as aggregates of proofs of a theorem, or of events? And yet these too can be counted. And it makes no difference whether the events are simultaneous or thousands of years apart.

This brings us to another reason for not classing number with color and solidity: its far greater applicability.

Mill[1] thinks that the truth that whatever is made up of parts is made up of parts of those parts holds of all natural phenomena, since all of them can be counted. But cannot far more than that be counted? *Locke*[2] says: “Number applies to human beings, angels, actions, thoughts, every thing that exists or can be imagined.” *Leibniz*[3] rejects the opinion of the Scholastics that number cannot be applied to incorporeal things, and calls number a kind of incorporeal figure, arising from the union of any things whatever—for example God, an angel, a human being, and motion, which together are four. Hence, he holds, number is something entirely universal and belongs to metaphysics.

In another passage[4] he says: “What does not have force and power cannot be weighed; what has no parts accordingly has no measure; but there is nothing that does not admit of number. Thus number is, as it were, the metaphysical figure.”

It would indeed be a marvel if a property abstracted from external things could be transferred to events, to ideas, to concepts, without any change of sense. It would be just as if one wanted to speak of a fusible event, a blue idea, a salty concept, a viscous judgment.

9

[1] A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap. § 5. | [1] Op. cit., Book III, ch. XXIV, § 5.

10

[2] Baumann a. a. O. Bd. I, S. 409. | [2] Baumann, op. cit., vol. I, p. 409.

11

[3] Ebenda, Bd. II, S. 56. | [3] Ibid., vol. II, p. 56.

12

[4] Ebenda, Bd. II, S. 2. | [4] Ibid., vol. II, p. 2.

GERMAN

ENGLISH

24.4 Es ist ungereimt, dass an Unsinnlichem vorkomme, was seiner Natur nach sinnlich ist. Wenn wir eine blaue Fläche sehen, so haben wir einen eigenthümlichen Eindruck, der dem Worte »blau« entspricht; und diesen erkennen wir wieder, wenn wir eine andere blaue Fläche erblicken. Wollten wir annehmen, dass in derselben Weise beim Anblick eines Dreiecks etwas Sinnliches dem Worte »drei« entspräche, so müssten wir dies auch in drei Begriffen wiederfinden; etwas Unsinnliches würde etwas Sinnliches an sich haben. Man kann wohl zugeben, dass dem Worte »dreieckig« eine Art sinnlicher Eindrücke entspreche, aber man muss dabei dies Wort als Ganzes nehmen.

It is absurd that what is by its nature sensible should occur in what is not sensible. When we see a blue surface, we have a distinctive impression that corresponds to the word “blue”; and we recognize it again when we catch sight of another blue surface. If we wanted to assume that, in the same way, something sensible corresponded to the word “three” when we look at a triangle, then we would have to find this again in three concepts too; something non-sensible would have something sensible about it. One may well grant that a kind of sense impression corresponds to the word “triangular”; but then one must take this word as a whole.

Die Drei darin sehen wir nicht unmittelbar; sondern wir sehen etwas, woran eine geistige Thätigkeit anknüpfen kann, welche zu einem Urtheile führt, in dem die Zahl 3 vorkommt. Womit nehmen wir denn etwa die Anzahl der Schlussfiguren wahr, die Aristoteles aufstellt? etwa mit den Augen? wir sehen höchstens gewisse Zeichen für diese Schlussfiguren, nicht sie selbst. Wie sollen wir ihre Anzahl sehen können, wenn sie selbst unsichtbar bleiben? Aber, meint man vielleicht, es genügt, die Zeichen zu sehen; deren Zahl ist gleich der Zahl der Schlussfiguren. Woher weiss man denn das? Dazu muss man doch schon auf andere Weise die letztere bestimmt haben.

We do not see the three in it directly; rather, we see something to which a mental activity can attach, leading to a judgment in which the number 3 occurs. With what, for instance, do we perceive the Number of syllogistic figures that Aristotle sets out? With our eyes, perhaps? At most we see certain signs for these syllogistic figures, not the figures themselves. How are we supposed to see their Number if they themselves remain invisible? But, it may be said, it is enough to see the signs; their number is identical with the number of syllogistic figures. How, then, does one know that? For this one must surely already have determined the latter in some other way.

Oder ist der Satz »die Anzahl der Schlussfiguren ist vier« nur ein anderer Ausdruck für »die Anzahl der Zeichen der Schlussfiguren ist vier«? Nein! von den Zeichen soll nichts ausgesagt werden; von den Zeichen will niemand etwas wissen, wenn nicht deren Eigenschaft zugleich eine des Bezeichneten ausdrückt. Da ohne logischen Fehler dasselbe verschiedene Zeichen haben kann, braucht nicht einmal die Zahl der Zeichen mit der des Bezeichneten übereinzustimmen.

Or is the proposition “the Number of syllogistic figures is four” merely another way of saying “the Number of signs for the syllogistic figures is four”? No! Nothing is meant to be said about the signs; nobody wants to know anything about the signs unless their property at the same time expresses a property of what they signify. Since the same thing can, without any logical error, have different signs, the number of signs need not even agree with the number of things signified.

25.1 Während für *Mill* die Zahl etwas Physikalisches ist, besteht sie für *Locke* und *Leibniz* nur in der Idee. In der That sind, wie *Mill*[1] sagt, zwei Aepfel von drei Aepfeln, zwei Pferde von einem Pferd physikalisch verschieden, ein davon verschiedenes sichtliches und fühlbares Phänomen[2]. Aber ist daraus zu schliessen, dass die Zweiheit, Dreiheit, etwas Physikalisches ist? Ein Paar Stiefel kann dieselbe sichtbare und fühlbare Erscheinung sein, wie *zwei* Stiefel. Hier haben wir einen Zahlenunterschied, dem kein physikalischer entspricht;

Whereas for *Mill* number is something physical, for *Locke* and *Leibniz* it exists only in idea. It is true, as *Mill*[1] says, that two apples are physically different from three apples, and two horses from one horse—a different visible and tangible phenomenon.[2] But are we to infer from this that twoness, threeness, is something physical? A pair of boots can be the same visible and tangible phenomenon as *two* boots. Here we have a difference in number to which no physical difference corres-

GERMAN

ENGLISH

denn *zwei* und *Ein Paar* sind keineswegs dasselbe, wie *Mill* sonderbarer Weise zu glauben scheint. Wie ist es endlich möglich, dass sich zwei Begriffe von drei Begriffen physikalisch unterscheiden?

ponds; for *two* and *one pair* are by no means the same thing, as *Mill* oddly seems to believe. And finally, how is it possible for two concepts to differ physically from three concepts?

13 14

25.2 So sagt *Berkeley*[1]: »Es ist zu bemerken, dass die Zahl nichts Fixes und Festgestelltes ist, was realiter in den Dingen selber existirte. Sie ist gänzlich Geschöpf des Geistes, wenn er entweder eine Idee an sich oder eine Combination von Ideen betrachtet, der er einen Namen geben will und sie so für eine Einheit gelten lässt. Jenachdem der Geist seine Ideen variirend combinirt, variirt die Einheit, und wie die Einheit so variirt auch die Zahl, welche nur eine Sammlung von Einheiten ist. Ein Fenster = 1; ein Haus, in dem viele Fenster sind, = 1; viele Häuser machen Eine Stadt aus.«

Thus *Berkeley*[1] says: “It is to be noted that number is nothing fixed and settled, existing realiter [really] in things themselves. It is entirely a creature of the mind, when it considers either an idea by itself or a combination of ideas to which it wants to give a name, and so lets it count as a unit. According as the mind combines its ideas in varying ways, the unit varies; and as the unit varies, so too does number, which is only a collection of units. A window = 1; a house in which there are many windows = 1; many houses make up one city.”[15]

16

IS NUMBER SOMETHING SUBJECTIVE?

Frege argues that number is objective, like the North Sea or the earth’s axis, and not an idea.

GERMAN

ENGLISH

26.1 In diesem Gedankengange kommt man leicht dazu, die Zahl für etwas Subjectives anzusehen. Es scheint die Weise, wie die Zahl in uns entsteht, über ihr Wesen Aufschluss geben zu können. Auf eine psychologische Untersuchung also würde es dann ankommen. In diesem Sinne sagt wohl *Lipschitz*[1]:

Following this line of thought, one easily comes to regard number as something subjective. The way in which number arises in us seems capable of shedding light on its nature. Everything would then depend on a psychological investigation. It is presumably in this sense that *Lipschitz*[1] says:

17

26.2 »Wer über gewisse Dinge einen Ueberblick gewinnen will, der wird mit einem bestimmten Dinge beginnen und immer ein neues Ding den früheren hinzufügen«. Dies scheint viel besser darauf zu passen, wie wir etwa die Anschauung eines Sternbildes erhalten, als auf die

“Whoever wants to gain an overview of certain things will begin with one particular thing and keep adding a new thing to the earlier ones.” This seems to fit much better the way we obtain, say, the intuition of a constellation than the formation

13

[1] A. a. O. III. Buch, XXIV. Cap. § 5.

[1] Op. cit., Book III, ch. XXIV, § 5.

14

[2] Genau genommen müsste hinzugefügt werden: sobald sie überhaupt ein Phänomen sind. Wenn aber Jemand ein Pferd in Deutschland und eines in Amerika (und sonst keins) hat, so besitzt er zwei Pferde. Diese bilden jedoch kein Phänomen, sondern nur jedes Pferd für sich könnte so genannt werden.

[2] Strictly speaking one would have to add: insofar as they are a phenomenon at all. But if someone has one horse in Germany and one in America (and no others), he owns two horses. These, however, do not form a phenomenon; only each horse by itself could be called one.

15 George Berkeley (1685–1753), Irish philosopher; the passage comes from his *Essay toward a New Theory of Vision* (1709).

16

[1] Baumann a. a. O. Bd. II. S. 428.

[1] Baumann, op. cit., vol. II, p. 428.

17

[1] Lehrbuch der Analysis, S. 1. Ich nehme an, dass *Lipschitz* einen innern Vorgang im Sinne hat.

[1] Lehrbuch der Analysis, p. 1. I assume that *Lipschitz* has an inner process in mind.

	GERMAN	ENGLISH
	Zahlbildung. Die Absicht, einen Ueberblick zu gewinnen, ist unwesentlich; denn man wird kaum sagen können, dass eine Herde übersichtlicher wird, wenn man erfährt, aus wieviel Häuptern sie besteht.	of numbers. The aim of gaining an overview is inessential; for one can hardly say that a herd becomes easier to survey once one learns how many head it consists of.
26.3	Eine solche Beschreibung der innern Vorgänge, die der Fällung eines Zahlurtheils vorhergehen, kann nie, auch wenn sie zutreffender ist, eine eigentliche Begriffsbestimmung ersetzen. Sie wird nie zum Beweise eines arithmetischen Satzes herangezogen werden können; wir erfahren durch sie keine Eigenschaft der Zahlen. Denn die Zahl ist so wenig ein Gegenstand der Psychologie oder ein Ergebniss psychischer Vorgänge, wie es etwa die Nordsee ist. Der Objectivität der Nordsee thut es keinen Eintrag, dass es von unserer Willkühr abhängt, welchen Theil der allgemeinen Wasserbedeckung der Erde wir abgrenzen und mit dem Namen »Nordsee« belegen wollen. Das ist kein Grund, dies Meer auf psychologischem Wege erforschen zu wollen. So ist auch die Zahl etwas Objectives.	Such a description of the inner processes that precede the making of a judgment of number can never, even if it is more accurate, replace a genuine definition of the concept. It can never be drawn on in the proof of an arithmetical proposition; it teaches us no property of numbers. For number is no more an object of psychology, or a product of mental processes, than, say, the North Sea is. It does nothing to diminish the objectivity of the North Sea that it depends on our choice which part of the earth's general covering of water we mark off and decide to call "North Sea". That is no reason for wanting to investigate this sea by psychological means. So number too is something objective.
	Wenn man sagt »die Nordsee ist 10,000 Quadratmeilen gross,« so deutet man weder durch »Nordsee« noch durch »10,000« auf einen Zustand oder Vorgang in seinem Innern hin, sondern man behauptet etwas ganz Objectives, was von unsern Vorstellungen und dgl. unabhängig ist. Wenn wir etwa ein ander Mal die Grenzen der Nordsee etwas anders ziehen oder unter »10,000« etwas Anderes verstehen wollten, so würde nicht derselbe Inhalt falsch, der vorher richtig war; sondern an die Stelle eines wahren Inhalts wäre vielleicht ein falscher geschoben, wodurch die Wahrheit jenes ersteren in keiner Weise aufgehoben würde.	If one says "the North Sea is 10,000 square miles in area", then neither by "North Sea" nor by "10,000" does one point to a state or process within oneself; rather, one asserts something entirely objective, which is independent of our ideas and the like. If at some other time we chose to draw the boundaries of the North Sea somewhat differently, or to understand something else by "10,000", it would not be the same content, previously correct, that now became false; rather, a false content would perhaps have been substituted for a true one—and the truth of the former would in no way be canceled by that.
26.4	Der Botaniker will etwas ebenso Thatsächliches sagen, wenn er die Anzahl der Blumenblätter einer Blume, wie wenn er ihre Farbe angiebt. Das eine hängt so wenig wie das andere von unserer Willkühr ab. Eine gewisse Aehnlichkeit der Anzahl und der Farbe ist also da; aber diese besteht nicht darin, dass beide an äusseren Dingen sinnlich wahrnehmbar, sondern darin, dass beide objectiv sind.	When the botanist states the Number of petals of a flower, he means to say something just as factual as when he states its color. The one depends on our whim as little as the other. So there is a certain similarity between Number and color. But it does not consist in both being perceptible by the senses in external things; it consists in both being objective.
26.5	Ich unterscheide das Objective von dem Handgreiflichen, Räumlichen, Wirklichen. Die Erdaxe, der Massenmittelpunkt des Sonnensystems sind objectiv, aber ich möchte sie nicht wirklich nennen, wie die Erde selbst. Man nennt den Aequator oft eine *gedachte* Linie; aber es wäre falsch, ihn eine *erdachte* Linie zu nennen; er ist nicht durch Denken entstanden, das Ergebniss eines seelischen Vorgangs, sondern nur durch Denken erkannt,	I distinguish the objective from the palpable, the spatial, the actual. The earth's axis and the center of mass of the solar system are objective, but I would not call them actual, as the earth itself is. The equator is often called a *thought* line; but it would be wrong to call it a *thought-up* line. It did not come into being through thinking, as the res-

GERMAN

ergriffen. Wäre das Erkanntwerden ein Entstehen, so könnten wir nichts Positives von ihm aussagen in Bezug auf eine Zeit, die diesem vorgeblichen Entstehen vorherginge.

26.6 Der Raum gehört nach Kant der Erscheinung an. Es wäre möglich, dass er andern Vernunftwesen sich ganz anders als uns darstellte. Ja, wir können nicht einmal wissen, ob er dem einen Menschen so wie dem andern erscheint; denn wir können die Raumanschauung des einen nicht neben die des andern legen, um sie zu vergleichen. Aber dennoch ist darin etwas Objectives enthalten; Alle erkennen dieselben geometrischen Axiome, wenn auch nur durch die That, an und müssen es, um sich in der Welt zurechtzufinden. Objectiv ist darin das Gesetzmässige, Begriffliche, Beurtheilbare, was sich in Worten ausdrücken lässt. Das rein Anschauliche ist nicht mittheilbar.

Nehmen wir zur Verdeutlichung zwei Vernunftwesen an, denen nur die projectivischen Eigenschaften und Beziehungen anschaulich sind: das Liegen von drei Punkten in einer Gerade, von vier Punkten in einer Ebene u. s. w.; es möge dem einen das als Ebene erscheinen, was das andere als Punkt anschaut und umgekehrt. Was dem einen die Verbindungslinie von Punkten ist, möge dem andern die Schnittkante von Ebenen sein u. s. w. immer dualistisch entsprechend. Dann könnten sie sich sehr wohl mit einander verständigen und würden die Verschiedenheit ihres Anschauens nie gewahr werden, weil in der projectivischen Geometrie jedem Lehrsatze ein anderer dualistisch gegenübersteht; denn das Abweichen in einer ästhetischen Werthschätzung würde kein sicheres Zeichen sein.

In Bezug auf alle geometrische Lehrsätze wären sie völlig im Einklange; sie würden sich nur die Wörter in ihre Anschauung verschieden übersetzen. Mit dem Worte »Punkt« verbände etwa das eine diese, das andere jene Anschauung. So kann man immerhin sagen, dass ihnen dies Wort etwas Objectives bedeute; nur darf man unter dieser Bedeutung nicht das Besondere ihrer Anschauung verstehn. Und in diesem Sinne ist auch die Erdaxe objectiv.

26.7 Man denkt gewöhnlich bei »weiss« an eine gewisse Empfindung, die natürlich ganz subjectiv ist; aber schon im gewöhnlichen Sprachgebrauche, scheint mir, tritt ein objectiver Sinn vielfach hervor. Wenn man den Schnee weiss nennt, so will man eine objective Beschaffenheit

ENGLISH

ult of a mental process; it is only recognized, grasped, through thinking. If being recognized were a coming into being, we could assert nothing positive about the equator with respect to any time preceding this alleged coming into being.

According to Kant, space belongs to appearance. It would be possible for it to present itself to other rational beings quite differently from the way it presents itself to us. Indeed, we cannot even know whether it appears to one person as it does to another, for we cannot lay one person's intuition of space beside another's in order to compare them. And yet there is something objective in it. Everyone recognizes the same geometrical axioms, if only in practice, and must do so in order to find their way about in the world. What is objective in it is what is law-governed, conceptual, judgeable, what can be expressed in words. The purely intuitive is not communicable.

To make this clearer, let us suppose two rational beings to whom only projective properties and relations are intuitable: three points lying on one straight line, four points lying in one plane, and so on. Suppose that what one of them intuits as a point appears to the other as a plane, and conversely. What is the line joining points for the one is the line of intersection of planes for the other, and so on, always in dual correspondence. Then they could understand each other perfectly well and would never become aware of the difference in their intuitions, because in projective geometry every theorem has a dual counterpart; a divergence in aesthetic appreciation would be no reliable sign.

They would be in complete agreement about all geometrical theorems; they would merely translate the words into their intuitions differently. With the word "point", say, one would connect this intuition and the other that one. So one can still say that this word means something objective to them; only we must not understand by this meaning what is peculiar to their intuition. And in this sense the earth's axis, too, is objective.

With "white" we usually think of a certain sensation, which is of course wholly subjective. But even in ordinary usage, it seems to me, an objective sense often comes to the fore. When we call snow white, we mean to express an objective qual-

GERMAN

ausdrücken, die man beim gewöhnlichen Tageslicht an einer gewissen Empfindung erkennt. Wird er farbig beleuchtet, so bringt man das bei der Beurtheilung in Anschlag. Man sagt vielleicht: er *erscheint* jetzt roth, aber er ist weiss. Auch der Farbenblinde kann von roth und grün reden, obwohl er diese Farben in der Empfindung nicht unterscheidet. Er erkennt den Unterschied daran, dass Andere ihn machen, oder vielleicht durch einen physikalischen Versuch.

So bezeichnet das Farbenwort oft nicht unsere subjective Empfindung, von der wir nicht wissen können, dass sie mit der eines Andern übereinstimmt – denn offenbar verbürgt das die gleiche Benennung keineswegs – sondern eine objective Beschaffenheit. So verstehe ich unter Objectivität eine Unabhängigkeit von unserm Empfinden, Anschauen und Vorstellen, von dem Entwerfen innerer Bilder aus den Erinnerungen früherer Empfindungen, aber nicht eine Unabhängigkeit von der Vernunft; denn die Frage beantworten, was die Dinge unabhängig von der Vernunft sind, hiesse urtheilen, ohne zu urtheilen, den Pelz waschen, ohne ihn nass zu machen.

27.1 Deswegen kann ich auch *Schloemilch*[1] nicht zustimmen, der die Zahl Vorstellung der Stelle eines Objects in einer Reihe nennt[2]. Wäre die Zahl eine Vorstellung, so wäre die Arithmetik Psychologie. Das ist sie so wenig, wie etwa die Astronomie es ist. Wie sich diese nicht mit den Vorstellungen der Planeten, sondern mit den Planeten selbst beschäftigt, so ist auch der Gegenstand der Arithmetik keine Vorstellung. Wäre die Zwei eine Vorstellung, so wäre es zunächst nur die meine. Die Vorstellung eines Andern ist schon als solche eine andere. Wir hätten dann vielleicht viele Millionen Zweien. Man müsste sagen: meine Zwei, deine Zwei, eine Zwei, alle Zweien. Wenn man latente oder unbewusste Vorstellungen annimmt, so hätte man auch unbewusste Zweien, die dann später wieder bewusste würden.

Mit den heranwachsenden Menschen entständen immer neue Zweien, und wer weiss, ob sie sich nicht in Jahrtausenden so veränderten, dass 2 × 2 = 5 würde. Trotzdem wäre es zweifelhaft, ob es, wie man gewöhnlich meint, unendlich viele Zahlen gäbe. Vielleicht wäre 10^10 nur ein leeres Zeichen, und es gäbe gar keine Vorstellung, in irgendeinem Wesen, die so benannt werden könnte.

ENGLISH

ity, which in ordinary daylight we recognize by a certain sensation. If the snow is lit with colored light, we take that into account in our judgment. We may say: it *looks* red now, but it is white. Even someone who is color-blind can speak of red and green, although he does not distinguish these colors in sensation. He recognizes the difference by the fact that others make it, or perhaps by a physical experiment.

So a color word often signifies not our subjective sensation—which we cannot know to agree with anyone else's, for using the same name plainly guarantees nothing of the kind—but an objective quality. Thus by objectivity I understand independence of our sensing, intuiting and forming ideas, of our sketching inner pictures out of memories of earlier sensations; but not independence of reason. For to answer the question what things are independently of reason would be to judge without judging, to wash the fur without getting it wet.[18]

That is also why I cannot agree with *Schlömilch*[1], who calls number the idea of the position of an object in a series[2]. If number were an idea, arithmetic would be psychology. It is no more that than astronomy is. Just as astronomy is concerned not with ideas of the planets but with the planets themselves, so the object of arithmetic is not an idea either. If two were an idea, it would in the first instance be mine alone. Another person's idea is, simply as such, a different one. We would then have perhaps many millions of twos. We would have to say: my two, your two, a two, all twos. If one admits latent or unconscious ideas, we would also have unconscious twos, which would later become conscious again.[19]

With every new generation growing up, new twos would keep arising, and who knows whether over thousands of years they might not change so much that 2 × 2 = 5. Even so, it would be doubtful whether there are, as is usually supposed, infinitely many numbers. Perhaps 10^10 would be only an empty sign, and there would be no idea at all, in

18 An allusion to the German proverb "Wash my fur, but don't make me wet", said of someone who wants a thing without its unavoidable consequences.

19 Oskar Schlömilch (1823–1901), German mathematician.

GERMAN | ENGLISH

any being whatever, that could be called by that name.

21 22

27.2 Wir sehen, zu welchen Wunderlichkeiten es führt, wenn man den Gedanken etwas weiter ausspinnt, dass die Zahl eine Vorstellung sei. Und wir kommen zu dem Schlusse, dass die Zahl weder räumlich und physikalisch ist, wie Mills Haufen von Kieselsteinen und Pfeffernüssen, noch auch subjectiv wie die Vorstellungen, sondern unsinnlich und objectiv. Der Grund der Objectivität kann ja nicht in dem Sinneseindrucke liegen, der als Affection unserer Seele ganz subjectiv ist, sondern, soweit ich sehe, nur in der Vernunft.

We see what oddities result when the thought that number is an idea is spun out a little further. And we come to the conclusion that number is neither spatial and physical, like Mill's heaps of pebbles and gingerbread nuts, nor subjective like ideas, but non-sensory and objective. The ground of objectivity cannot, after all, lie in the sense impression, which, as an affection of our mind, is wholly subjective. As far as I can see, it can lie only in reason.

27.3 Es wäre wunderbar, wenn die allerexacteste Wissenschaft sich auf die noch zu unsicher tastende Psychologie stützen sollte.

It would be strange if the most exact of all sciences had to rely on psychology, which is still feeling its way far too uncertainly.

NUMBER AS A SET

Definitions of Number as a set or plurality are found too vague and to exclude 0 and 1.

GERMAN | ENGLISH

28.1 Einige Schriftsteller erklären die Anzahl als eine Menge, Vielheit oder Mehrheit. Ein Uebelstand besteht hierbei darin, dass die Zahlen 0 und 1 von dem Begriffe ausgeschlossen werden. Jene Ausdrücke sind recht unbestimmt: bald nähern sie sich mehr der Bedeutung von »Haufe,« »Gruppe,« »Aggregat« – wobei an ein räumliches Zusammensein gedacht wird – bald werden sie fast gleichbedeutend mit »Anzahl« gebraucht, nur unbestimmter. Eine Auseinanderlegung des Begriffes der

Some writers define Number as a set, a plurality or a multiplicity. One drawback here is that the numbers 0 and 1 are excluded from the concept. These expressions are quite indefinite. Sometimes they come closer to the meaning of "heap", "group", "aggregate", where spatial togetherness is in mind; sometimes they are used almost synonymously with "Number", only more vaguely. So no analysis

20

[1] Handbuch der algebraischen Analysis, S. 1. | [1] Handbuch der algebraischen Analysis, p. 1.

21

[2] Man kann dagegen auch einwenden, dass dann immer dieselbe Vorstellung einer Stelle erscheinen müsste, wenn dieselbe Zahl auftritt, was offenbar falsch ist. Das Folgende würde nicht zutreffen, wenn er unter Vorstellung eine objective Idee verstehen wollte; aber welcher Unterschied wäre dann zwischen der Vorstellung der Stelle und der Stelle selbst? Die Vorstellung im subjectiven Sinne ist das, worauf sich die psychologischen Associationsgesetze beziehen; sie ist von sinnlicher, bildhafter Beschaffenheit. Die Vorstellung im objectiven Sinne gehört der Logik an und ist wesentlich unsinnlich, obwohl das Wort, welches eine objective Vorstellung bedeutet, oft auch eine subjective mit sich führt, die jedoch nicht seine Bedeutung ist. Die subjective Vorstellung ist oft nachweisbar verschieden in verschiedenen Menschen, die objective für alle dieselbe.

[2] One can also object that the same idea of a position would then always have to appear whenever the same number occurs, which is plainly false. What follows would not apply if by "idea" he meant an objective idea; but then what difference would there be between the idea of the position and the position itself? The idea in the subjective sense is what the psychological laws of association are concerned with; it is sensory and pictorial in nature. The idea in the objective sense belongs to logic and is essentially non-sensory, although the word that means an objective idea often carries a subjective one along with it, which, however, is not its meaning. The subjective idea is often demonstrably different in different people; the objective idea is the same for all.

22

Die objectiven Vorstellungen kann man eintheilen in Gegenstände und Begriffe. Ich werde, um Verwirrung zu vermeiden, »Vorstellung« nur im subjectiven Sinne gebrauchen. Dadurch, dass Kant mit diesem Worte beide Bedeutungen verband, hat er seiner Lehre eine sehr subjective, idealistische Färbung gegeben und das Treffen seiner wahren Meinung erschwert. Die hier gemachte Unterscheidung ist so berechtigt wie die zwischen Psychologie und Logik. Möchte man diese immer recht streng auseinanderhalten!

Objective ideas can be divided into objects and concepts. To avoid confusion, I shall use "idea" only in the subjective sense. By combining both meanings in this word, Kant gave his doctrine a very subjective, idealist coloring and made it harder to hit on what he really meant. The distinction drawn here is as justified as that between psychology and logic. If only these were always kept strictly apart!

GERMAN

Anzahl kann darum in einer solchen Erklärung nicht gefunden werden. *Thomae*[1] verlangt zur Bildung der Zahl, dass verschiedenen Objectenmengen verschiedene Namen gegeben werden. Damit ist offenbar eine schärfere Bestimmung jener Objectenmengen gemeint, für welche die Namengebung nur das äussere Zeichen ist. Welcher Art nun diese Bestimmung sei, das ist die Frage.

Es würde offenbar die Idee der Zahl nicht entstehen, wenn man für »3 Sterne,« »3 Finger,« »7 Sterne« Namen einführen wollte, in denen keine gemeinsamen Bestandtheile erkennbar wären. Es kommt nicht darauf an, dass überhaupt Namen gegeben werden, sondern dass für sich bezeichnet werde, was Zahl daran ist. Dazu ist nöthig, dass es in seiner Besonderheit erkannt sei.

24

28.2 Noch ist folgende Verschiedenheit zu beachten. Einige nennen die Zahl eine Menge von Dingen oder Gegenständen; Andere wie schon *Euklid*[1], erklären sie als eine Menge von Einheiten. Dieser Ausdruck bedarf einer besondern Erörterung.

25

ENGLISH

of the concept of Number can be found in such a definition. *Thomae*[1] requires, for the formation of number, that different names be given to different sets of objects. This obviously means a sharper determination of those sets of objects, for which the giving of names is only the outward sign. What kind of determination this is: that is the question.[23]

Plainly the idea of number would not arise if we introduced names for “3 stars”, “3 fingers”, “7 stars” in which no common components could be discerned. What matters is not that names are given at all, but that what is numerical about them is designated on its own. For this, it must be recognized in its particularity.

The following difference must also be noted. Some call number a set of things or objects; others, as *Euclid*[1] did long ago, define it as a set of units. This expression needs special discussion.

23 Carl Johannes Thomae (1840–1921), German mathematician and Frege’s colleague at Jena.

24

[1] Elementare Theorie der analytischen Functionen, S. 1.

[1] Elementare Theorie der analytischen Functionen, p. 1.

25

[1] 7. Buch der Elemente im Anfange: Μονάς έστι, καθ' ήν έκαστον τών όντων έν λέγεται. Άριθμός δέ τό έκ μονάδων συγκείμενον πλήθος.

[1] Beginning of Book 7 of the Elements: Μονάς έστι, καθ' ήν έκαστον τών όντων έν λέγεται. Άριθμός δέ τό έκ μονάδων συγκείμενον πλήθος. [A unit is that in virtue of which each of the things that exist is called one. And a number is the multitude composed of units.]

III. Views on Unity and One

Meinungen über Einheit und Eins
Does "one" express a property of objects? Are units identical with one another? Attempts to overcome the difficulty, and its solution.

DRÜCKT DAS ZAHLWORT »EIN« EINE EIGENSCHAFT VON GEGENSTÄNDEN AUS?

GERMAN

29.1 In den Definitionen, die Euklid am Anfange des 7. Buches der Elemente giebt, scheint er mit dem Worte »μονάς« bald einen zu zählenden Gegenstand, bald eine Eigenschaft eines solchen, bald die Zahl Eins zu bezeichnen. Ueberall kommt man mit der Uebersetzung »Einheit« durch, aber nur, weil dies Wort selbst in diesen verschiedenen Bedeutungen schillert.

29.2 *Schröder*[1] sagt: »Jedes der zu zählenden Dinge wird Einheit genannt.« Es fragt sich, weshalb man die Dinge erst unter den Begriff der Einheit bringt und nicht einfach erklärt: Zahl ist eine Menge von Dingen, womit wir wieder auf das Vorige zurückgeworfen wären. Man könnte zunächst in der Benennung der Dinge als Einheiten eine nähere Bestimmung finden wollen, indem man der sprachlichen Form folgend »Ein« als Eigenschaftswort ansieht und »Eine Stadt« so auffasst wie »weiser Mann«. Dann würde eine Einheit ein Gegenstand sein, dem die Eigenschaft »Ein« zukäme und würde sich zu »Ein« ähnlich verhalten wie »ein Weiser« zu dem Adjectiv »weise«. Zu den Gründen, die oben dagegen geltend gemacht sind, dass die Zahl eine Eigenschaft von Dingen sei, treten hier noch einige besondere hinzu.

Auffallend wäre zunächst, dass jedes Ding diese Eigenschaft hätte. Es wäre unverständlich, weshalb man überhaupt noch einem Dinge ausdrücklich die Eigenschaft beilegt. Nur durch die Möglichkeit, dass etwas nicht weise sei, gewinnt die Behauptung, Solon sei weise, einen Sinn. Der Inhalt eines Begriffes nimmt ab, wenn sein Umfang zunimmt; wird dieser allumfassend, so muss der Inhalt ganz verloren gehen. Es ist nicht leicht zu denken, wie die Sprache dazu käme, ein Eigenschaftswort zu schaffen, das gar nicht dazu dienen könnte, einen Gegenstand näher zu bestimmen.

2

ENGLISH

In the definitions Euclid gives at the beginning of Book 7 of the Elements, he seems to use the word "μονάς" [unit] to designate now an object to be counted, now a property of such an object, now the number one. The translation "unit" works everywhere, but only because this word itself shimmers with these different meanings.

Schröder[1] says: "Each of the things to be counted is called a unit." The question is why we first bring things under the concept of unit instead of simply defining: number is a set of things. But that would throw us back on the previous point. One might at first try to find a closer determination in calling things units, by following the linguistic form, treating "one" as an adjective and taking "one city" in the same way as "wise man". A unit would then be an object to which the property "one" belonged, and it would stand to "one" much as "a wise man" stands to the adjective "wise". To the reasons urged above against number's being a property of things, some special ones are added here.

It would be striking, first of all, that every thing would have this property. It would be incomprehensible why anyone should still explicitly ascribe the property to a thing. Only the possibility that something is not wise gives the assertion that Solon is wise a sense. The content of a concept diminishes as its extension increases; if its extension becomes all-embracing, its content must be lost altogether. It is not easy to see how language would come to create an adjective that could not serve at all to determine an object more closely.[1]

1 Solon (c. 640–c. 560 BC), Athenian statesman and lawgiver, counted among the Seven Sages of Greece.

GERMAN

29.3 Wenn »Ein Mensch« ähnlich wie »weiser Mensch« aufzufassen wäre, so sollte man denken, dass »Ein« auch als Praedicat gebraucht werden könnte, sodass man wie »Solon war weise« auch sagen könnte »Solon war Ein« oder »Solon war Einer«. Wenn nun der letzte Ausdruck auch vorkommen kann, so ist er doch für sich allein nicht verständlich. Er kann z. B. heissen: Solon war ein Weiser, wenn »Weiser« aus dem Zusammenhange zu ergänzen ist. Aber allein scheint »Ein« nicht Praedicat sein zu können[1]. Noch deutlicher zeigt sich dies beim Plural. Während man »Solon war weise« und »Thales war weise« zusammenziehen kann in »Solon und Thales waren weise,« kann man nicht sagen »Solon und Thales waren Ein«.

Hiervon wäre die Unmöglichkeit nicht einzusehen, wenn »Ein« sowie »weise« eine Eigenschaft sowohl des Solon als auch des Thales wäre.

4

30.1 Damit hangt es zusammen, dass man keine Definition der Eigenschaft »Ein« hat geben können. Wenn *Leibniz*[1] sagt: »Eines ist, was wir durch Eine That des Verstandes zusammenfassen«, so erklärt er »Ein« durch sich selbst. Und können wir nicht auch Vieles durch Eine That des Verstandes zusammenfassen? Dies wird von *Leibniz* an derselben Stelle zugestanden. Aehnlich sagt *Baumann*[2]: »Eines ist, was wir als Eines auffassen« und weiter: »Was wir als Punkt setzen oder nicht mehr als getheilt setzen wollen, das sehen wir als Eines an; aber jedes Eins der äussern Anschauung, der reinen wie der empirischen, können wir auch als Vieles ansehen.

Jede Vorstellung ist Eine, wenn abgegränzt gegen eine andere Vorstellung; aber in sich kann sie wieder in Vieles unterschieden werden.« So verwischt sich jede sachliche Begrenzung des Begriffes und alles hangt von unserer Auffassung ab. Wir fragen wieder: welchen Sinn kann es haben, irgendeinem Gegenstande die Eigenschaft »Ein« beizulegen, wenn je nach der Auffassung jeder Einer sein und auch nicht sein kann? Wie kann auf einem so verschwommenen Begriffe eine Wissenschaft beruhen,

ENGLISH

If “one man” were to be understood like “wise man”, we would expect that “one” could also be used as a predicate, so that, just as we say “Solon was wise”, we could also say “Solon was one” or “Solon was a one”. Now even if the latter expression can occur, it is not intelligible on its own. It can mean, for example, “Solon was a wise one”, if “wise” is to be supplied from the context. But on its own “one” seems unable to be a predicate[1]. This shows even more clearly in the plural. While “Solon was wise” and “Thales was wise” can be combined into “Solon and Thales were wise”, we cannot say “Solon and Thales were one”.[3]

Why this is impossible could not be understood if “one”, like “wise”, were a property both of Solon and of Thales.

Connected with this is the fact that no one has been able to give a definition of the property “one”. When *Leibniz*[1] says, “One is what we grasp together by one act of the understanding”, he is defining “one” in terms of itself. And can we not also grasp many things together by one act of the understanding? *Leibniz* concedes this in the same passage. Similarly *Baumann*[2] says: “One is what we take as one”, and further: “What we posit as a point, or no longer wish to posit as divided, we regard as one; but every one of outer intuition, pure as well as empirical, we can also regard as many.

Every idea is one when it is marked off from another idea; but within itself it can again be distinguished into many.” Thus every objective boundary of the concept is blurred, and everything depends on our way of viewing. We ask again: what sense can it have to ascribe the property “one” to any object, if, depending on our way of viewing, every object can both be one and not be one? How can a science that seeks its glory precisely in the

2

[1] A. a. O. S. 5.

[1] Op. cit., p. 5.

3 Thales of Miletus (c. 624–c. 546 BC), Greek philosopher, also counted among the Seven Sages.

4

[1] Es kommen Wendungen vor, die dem zu widersprechen scheinen; aber bei genauerer Betrachtung wird man finden, dass ein Begriffswort zu ergänzen ist, oder dass »Ein« nicht als Zahlwort gebraucht wird, dass nicht die Einzigkeit, sondern die Einheitlichkeit behauptet werden soll.

[1] There are turns of phrase that seem to contradict this. But on closer inspection one will find that a concept word must be supplied, or that “one” is not being used as a number word: what is meant to be asserted is not uniqueness but unity.

GERMAN	ENGLISH
die grade in der grössten Bestimmtheit und Genauigkeit ihren Ruhm sucht?	greatest definiteness and precision rest on so hazy a concept?
56	
31.1 Obwohl nun *Baumann*[1] den Begriff der Eins auf innerer Anschauung beruhen lässt, so nennt er doch in der eben angeführten Stelle als Merkmale die Ungetheiltheit und die Abgegränztheit. Wenn diese zuträfen, so wäre zu erwarten, dass auch Thiere eine gewisse Vorstellung von Einheit haben könnten. Ob wohl ein Hund beim Anblick des Mondes eine wenn auch noch so unbestimmte Vorstellung von dem hat, was wir mit dem Worte »Ein« bezeichnen? Schwerlich! Und doch unterscheidet er gewiss einzelne Gegenstände: ein andrer Hund, sein Herr, ein Stein, mit dem er spielt, erscheinen ihm gewiss ebenso abgegrenzt, für sich bestehend, ungetheilt wie uns.	Although *Baumann*[1] makes the concept of one rest on inner intuition, in the passage just quoted he nevertheless names undividedness and boundedness as its characteristic marks. If these were correct, we should expect animals, too, to be able to have some idea of unity. Does a dog, looking at the moon, have any idea, however indefinite, of what we designate by the word “one”? Hardly! And yet it certainly distinguishes individual objects. Another dog, its master, a stone it plays with, surely appear to it just as bounded, existing by themselves and undivided as they do to us.
Zwar wird er einen Unterschied merken, ob er sich gegen viele Hunde zu vertheidigen hat oder nur gegen Einen, aber dies ist der von *Mill* physikalisch genannte Unterschied. Es käme darauf besonders an, ob er von dem Gemeinsamen, welches wir durch das Wort »Ein« ausdrücken, ein wenn auch noch so dunkles Bewusstsein hat z. B. in den Fällen, wo er von Einem grössern Hunde gebissen wird, und wo er Eine Katze verfolgt. Das ist mir unwahrscheinlich. Ich folgere daraus, dass die Idee der Einheit nicht, wie *Locke*[2] meint, dem Verstande durch jenes Object draussen und jede Idee innen zugeführt, sondern von uns durch die höhern Geisteskräfte erkannt wird, die uns vom Thiere unterscheiden.	To be sure, it will notice a difference between having to defend itself against many dogs and against only one; but this is the difference that *Mill* calls physical. What would matter in particular is whether it has any awareness, however dim, of the common element we express by the word “one”, say in the cases where it is bitten by one larger dog and where it chases one cat. I find that unlikely. I conclude from this that the idea of unity is not, as *Locke*[2] thinks, conveyed to the understanding by every object outside and every idea within, but is recognized by us through the higher mental powers that distinguish us from animals.
Dann können solche Eigenschaften der Dinge wie Ungetheiltheit und Abgegrenztheit, die von den Thieren ebenso gut wie von uns bemerkt werden, nicht das Wesentliche an unserm Begriffe sein.	In that case such properties of things as undividedness and boundedness, which animals notice just as well as we do, cannot be what is essential to our concept.
78	
32.1 Doch kann man einen gewissen Zusammenhang vermuthen. Darauf deutet die Sprache hin, indem sie von »Ein« »einig« ableitet. Etwas ist desto mehr geeignet, als besonderer Gegenstand aufgefasst zu werden, je mehr die	Still, we may suspect a certain connection. Language points to one by deriving “einig” [united] from “Ein” [one]. Something is the better suited to being taken as a distinct object, the more the dif-

5

[1] Baumann a. a. O. Bd. II. S. 2; Erdm. S. 8. | [1] Baumann, op. cit., vol. II, p. 2; Erdm. p. 8.

6

[2] A. a. O. Bd. II. S. 669. | [2] Op. cit., vol. II, p. 669.

7

[1] A. a. O. Bd. II. S. 669. | [1] Op. cit., vol. II, p. 669.

8

[2] Baumann a. a. O. Bd. I. S. 409. | [2] Baumann, op. cit., vol. I, p. 409.

GERMAN

Unterschiede in ihm gegenüber den Unterschieden von der Umgebung zurücktreten, je mehr der innere Zusammenhang den mit der Umgebung überwiegt. So bedeutet »einig« eine Eigenschaft, die dazu veranlasst, etwas in der Auffassung von der Umgebung abzusondern und für sich zu betrachten. Wenn das französische »uni« »eben,« »glatt« heisst, so ist dies so zu erklären. Auch das Wort »Einheit« wird in ähnlicher Weise gebraucht, wenn von politischer Einheit eines Landes, Einheit eines Kunstwerks gesprochen wird[1].

Aber in diesem Sinne gehört »Einheit« weniger zu »Ein« als zu »einig« oder »einheitlich.« Denn, wenn man sagt, die Erde habe Einen Mond, so will man diesen damit nicht für einen abgegrenzten, für sich bestehenden, ungetheilten Mond erklären; sondern man sagt dies im Gegensatze zu dem, was bei der Venus, dem Mars oder dem Jupiter vorkommt. In Bezug auf Abgegrenztheit und Ungetheiltheit könnten sich die Monde des Jupiter wohl mit unserm messen und sind in dem Sinne ebenso einheitlich.

10

33.1 Die Ungetheiltheit wird von einigen Schriftstellern bis zur Untheilbarkeit gesteigert. *G. Köpp*[1] nennt jedes unzerlegbar und für sich bestehend gedachte sinnlich oder nicht sinnlich wahrnehmbare Ding ein Einzelnes und die zu zählenden Einzelnen Einse, wo offenbar »Eins« in dem Sinne von »Einheit« gebraucht wird. Indem *Baumann* seine Meinung, die äussern Dinge stellten keine strengen Einheiten dar, damit begründet, dass wir die Freiheit hätten, sie als Vieles zu betrachten, giebt auch er die Unzerlegbarkeit für ein Merkmal der strengen Einheit aus. Dadurch dass man den innern Zusammenhang bis zum Unbedingten steigert, will man offenbar ein Merkmal der Einheit gewinnen, das von der willkührlichen Auffassung unabhängig ist. Dieser Versuch scheitert daran, dass dann fast nichts übrig bliebe, was Einheit genannt und gezählt werden dürfte.

ENGLISH

ferences within it recede compared with its differences from its surroundings, the more its inner coherence outweighs its coherence with its surroundings. So “einig” means a property that prompts us, in our way of viewing, to separate something off from its surroundings and consider it on its own. That the French “uni” means “level”, “smooth” is to be explained in this way. The word “unity”, too, is used in a similar way when one speaks of the political unity of a country or the unity of a work of art[1].

But in this sense “unity” belongs less with “one” than with “einig” or “einheitlich” [unified]. For when we say that the earth has one moon, we do not mean to declare it a bounded, self-standing, undivided moon. We say it in contrast to what is the case with Venus, Mars or Jupiter. In respect of boundedness and undividedness the moons of Jupiter could well bear comparison with ours, and in that sense they are just as unified.

Some writers heighten undividedness into indivisibility. *G. Köpp*[1] calls every thing, whether perceptible by the senses or not, that is thought of as indecomposable and as existing by itself an individual, and he calls the individuals to be counted “ones”, where “one” is plainly used in the sense of “unit”. When *Baumann* bases his view that external things do not present strict units on the ground that we are free to regard them as many, he too makes indecomposability a characteristic mark of the strict unit. By heightening inner coherence to the absolute, one obviously wants to obtain a characteristic mark of the unit that is independent of our arbitrary way of viewing. This attempt founders on the fact that almost nothing would then be left that could be called a unit and counted.[11]

10

[1] Ueber die Geschichte des Wortes »Einheit« vergl. Eucken, Geschichte der philosophischen Terminologie. S. 122–3, S. 136, S. 220.

[1] On the history of the word “Einheit”, cf. Eucken, Geschichte der philosophischen Terminologie, pp. 122–3, p. 136, p. 220.[9]

9 Rudolf Eucken (1846–1926), German philosopher at Jena; Nobel Prize in Literature 1908.

11 Gustav Köpp, author of a school arithmetic textbook (Eisenach, 1867).

GERMAN

Deshalb wird auch sofort der Rückzug damit angetreten, dass man nicht die Unzerlegbarkeit selbst, sondern das als unzerlegbar Gedachtwerden als Merkmal aufstellt. Damit ist man denn bei der schwankenden Auffassung wieder angekommen. Und wird denn dadurch etwas gewonnen, dass man sich die Sachen anders denkt als sie sind? Im Gegentheil! aus einer falschen Annahme können falsche Folgerungen fliessen. Wenn man aber aus der Unzerlegbarkeit nichts schliessen will, was nützt sie dann? wenn man von der Strenge des Begriffes ohne Schaden etwas ablassen kann, ja es sogar muss, wozu dann diese Strenge? Aber vielleicht soll man an die Zerlegbarkeit nur nicht denken. Als ob durch Mangel an Denken etwas erreicht werden könnte!

Es giebt aber Fälle, wo man gar nicht vermeiden kann, an die Zerlegbarkeit zu denken, wo sogar ein Schluss auf der Zusammensetzung der Einheit beruht, z. B. bei der Aufgabe: Ein Tag hat 24 Stunden, wieviel Stunden haben 3 Tage?

ENGLISH

That is why the retreat is sounded at once: the characteristic mark is taken to be not indecomposability itself but being thought of as indecomposable. And with that we are back at the wavering way of viewing. And is anything gained by thinking of things otherwise than as they are? On the contrary! From a false assumption false conclusions may follow. But if one does not want to infer anything from indecomposability, what use is it? If one can relax the strictness of the concept a little without harm—indeed, must do so—what is this strictness for? But perhaps one is merely not supposed to think of decomposability. As if anything could be achieved by lack of thought!

But there are cases where we cannot avoid thinking of decomposability at all, where an inference even rests on the unit's being composite. For example, the problem: one day has 24 hours; how many hours do 3 days have?

12

ARE UNITS IDENTICAL WITH ONE ANOTHER?

The units to be counted must be both identical and distinguishable, which seems contradictory.

GERMAN

34.1 So misslingt denn jeder Versuch, die Eigenschaft »Ein« zu erklären, und wir müssen wohl darauf verzichten, in der Bezeichnung der Dinge als Einheiten eine nähere Bestimmung zu sehen. Wir kommen wieder auf unsere Frage zurück: weshalb nennt man die Dinge Einheiten, wenn »Einheit« nur ein andrer Name für Ding ist, wenn alle Dinge Einheiten sind oder als solche aufgefasst werden können? *E. Schröder*[1] giebt als Grund die den Objecten der Zählung zugeschriebene Gleichheit an. Zunächst ist nicht zu sehen, warum die Wörter »Ding« und »Gegenstand« dies nicht ebenso gut andeuten könnten. Dann fragt es sich: weshalb wird den Gegenständen der Zählung Gleichheit zugeschrieben? Wird sie ihnen nur zugeschrieben, oder sind sie wirklich gleich? Jedenfalls sind nie zwei Gegenstände durchaus gleich.

Andrerseits kann man wohl fast immer eine Hinsicht ausfindig machen, in der zwei Gegenstände übereinstimmen. So sind wir wieder bei der willkührlichen Auffassung angelangt, wenn wir nicht gegen die Wahrheit den Dingen eine weitergehende

ENGLISH

So every attempt to define the property "one" fails, and we must presumably give up seeing a closer determination in calling things units. We return to our question: why do we call things units, if "unit" is only another name for thing, if all things are units or can be taken as such? *E. Schröder*[1] gives as the reason the identity ascribed to the objects of counting. First, it is not clear why the words "thing" and "object" could not indicate this just as well. Then the question arises: why is identity ascribed to the objects of counting? Is it merely ascribed to them, or are they really identical? In any case, no two objects are ever completely identical.

On the other hand, we can almost always find some respect in which two objects agree. So we are back at the arbitrary way of viewing, unless, against the truth, we want to ascribe to things a more far-reaching identity than belongs to them.

12

[1] Schularithmetik. Eisenach 1867. S. 5 u. 6.

[1] Schularithmetik. Eisenach 1867. pp. 5 and 6.

GERMAN

Gleichheit zuschreiben wollen, als ihnen zukommt. In der That nennen viele Schriftsteller die Einheiten ohne Einschränkung gleich. *Hobbes*[2] sagt: »Die Zahl, absolut gesagt, setzt in der Mathematik unter sich gleiche Einheiten voraus, aus denen sie hergestellt wird.« *Hume*[3] hält die zusammensetzenden Theile der Quantität und Zahl für ganz gleichartig. *Thomae*[4] nennt ein Individuum der Menge Einheit und sagt: »Die Einheiten sind einander gleich.« Ebenso gut oder vielmehr richtiger könnte man sagen: die Individuen der Menge sind von einander verschieden. Was hat nun diese vorgebliche Gleichheit für die Zahl zu bedeuten?

Die Eigenschaften, durch die sich die Dinge unterscheiden, sind für ihre Anzahl etwas Gleichgiltiges und Fremdes. Darum will man sie fern halten. Aber das gelingt in dieser Weise nicht. Wenn man, wie *Thomae* verlangt, »von den Eigenthümlichkeiten der Individuen einer Objectenmenge abstrahirt« oder »bei der Betrachtung getrennter Dinge von den Merkmalen absieht, durch welche sich die Dinge unterscheiden,« so bleibt nicht, wie *Lipschitz* meint, »der Begriff der Anzahl der betrachteten Dinge« zurück, sondern man erhält einen allgemeinen Begriff, unter den jene Dinge fallen. Diese selbst verlieren dadurch nichts von ihren Besonderheiten. Wenn ich z. B. bei der Betrachtung einer weissen und einer schwarzen Katze von den Eigenschaften absehe, durch die sie sich unterscheiden, so erhalte ich etwa den Begriff »Katze«.

Wenn ich nun auch beide unter diesen Begriff bringe und sie etwa Einheiten nenne, so bleibt die weisse doch immer weiss und die schwarze schwarz. Auch dadurch, dass ich an die Farben nicht denke oder mir vornehme, keine Schlüsse aus deren Verschiedenheit zu ziehen, werden die Katzen nicht farblos und bleiben ebenso verschieden, wie sie waren. Der Begriff »Katze,« der durch die Abstraction gewonnen ist, enthält zwar die Besonderheiten nicht mehr, ist aber eben dadurch nur Einer.

13141516

35.1 Durch blos begriffliche Verfahrungsweisen gelingt es nicht, verschiedene Dinge gleich zu machen; gelänge es

ENGLISH

In fact many writers call units identical without qualification. *Hobbes*[2] says: “Number, said absolutely, presupposes in mathematics units identical among themselves, out of which it is produced.” *Hume*[3] holds the component parts of quantity and number to be entirely homogeneous. *Thomae*[4] calls an individual of the set a unit and says: “The units are identical with one another.” One could just as well, or rather more correctly, say: the individuals of the set are different from one another. What, then, is this alleged identity supposed to mean for number?

The properties by which things differ are something indifferent and alien to their Number. That is why one wants to keep them out. But this does not succeed in this way. If, as *Thomae* demands, we “abstract from the peculiarities of the individuals of a set of objects”, or “in considering separate things disregard the characteristic marks by which the things differ”, what remains is not, as *Lipschitz* thinks, “the concept of the Number of the things considered”. Rather, we obtain a general concept under which those things fall. The things themselves lose none of their particularities thereby. If, for example, in considering a white cat and a black cat I disregard the properties by which they differ, I obtain, say, the concept “cat”.

Even if I now bring both under this concept and call them, say, units, the white one still remains white and the black one black. Nor do the cats become colorless because I do not think of their colors, or resolve to draw no conclusions from their difference; they remain just as different as they were. The concept “cat”, obtained by abstraction, does indeed no longer contain the particularities; but for that very reason it is only one.

Purely conceptual procedures do not succeed in making different things identical; and if they did succeed, we would no longer have things but only

13

[1] A. a. O. S. 5. | [1] Op. cit., p. 5.

14

[2] Baumann a. a. O. Bd. I. S. 242. | [2] Baumann, op. cit., vol. I, p. 242.

15

[3] Ebenda Bd. II. S. 568. | [3] Ibid., vol. II, p. 568.

GERMAN

aber, so hätte man nicht mehr Dinge, sondern nur Ein Ding; denn, wie *Descartes*[1] sagt, die Zahl – besser: die Mehrzahl – in den Dingen entspringt aus deren Unterscheidung. *E. Schröder*[2] behauptet mit Recht: »Die Anforderung Dinge zu zählen kann vernünftiger Weise nur gestellt werden, wo solche Gegenstände vorliegen, welche deutlich von einander unterscheidbar z. B. räumlich und zeitlich getrennt und gegen einander abgegrenzt erscheinen.« In der That erschwert zuweilen die zu grosse Aehnlichkeit z. B. der Stäbe eines Gitters die Zählung. Mit besonderer Schärfe drückt sich *W. Stanley Jevons*[3] in diesem Sinne aus: »Zahl ist nur ein andrer Name für Verschiedenheit.

Genaue Identität ist Einheit, und mit Verschiedenheit entsteht Mehrheit.« Und weiter (S. 157): »Es ist oft gesagt, dass Einheiten Einheiten sind, insofern sie einander vollkommen gleichen; aber, obwohl sie in einigen Rücksichten vollkommen gleich sein mögen, müssen sie mindestens in Einem Punkte verschieden sein; sonst wäre der Begriff der Mehrheit auf sie unanwendbar. Wenn drei Münzen so gleich wären, dass sie denselben Raum zu derselben Zeit einnähmen, so wären sie nicht drei Münzen, sondern Eine Münze.«

171819

36.1 Aber es zeigt sich bald, dass die Ansicht von der Verschiedenheit der Einheiten auf neue Schwierigkeiten stösst. *Jevons* erklärt: »Eine Einheit (unit) ist irgendein Gegenstand des Denkens, der von irgendeinem andern Gegenstande unterschieden werden kann, der als Einheit in derselben Aufgabe behandelt wird.« Hier ist Einheit durch sich selbst erklärt und der Zusatz »der von irgendeinem andern Gegenstande unterschieden werden kann« enthält keine nähere Bestimmung, weil er selbstverständlich ist. Wir nennen den Gegenstand eben nur darum einen andern, weil wir ihn vom ersten unterscheiden können. *Jevons*[1] sagt ferner: »Wenn ich das Symbol 5 schreibe, meine ich eigentlich 1 + 1 + 1 + 1 + 1 und es ist vollkommen klar, dass jede dieser Einheiten von jeder andern verschieden ist.

ENGLISH

one thing. For, as *Descartes*[1] says, number—better: multiplicity—in things arises from their being distinguished. *E. Schröder*[2] rightly maintains: "The demand to count things can reasonably be made only where objects are present that appear clearly distinguishable from one another, for example separated in space and time and marked off from one another." Indeed, too great a similarity, as with the bars of a grating, sometimes makes counting harder. *W. Stanley Jevons*[3] expresses himself in this sense with particular sharpness: "Number is only another name for diversity.

Exact identity is unity, and with diversity arises multiplicity." And further (p. 157): "It has often been said that units are units insofar as they are perfectly alike; but although they may be perfectly alike in some respects, they must differ in at least one point, otherwise the concept of multiplicity would be inapplicable to them. If three coins were so alike that they occupied the same space at the same time, they would not be three coins but one coin."

But it soon turns out that the view that units are different runs into new difficulties. *Jevons* declares: "A unit (unit) is any object of thought that can be distinguished from any other object treated as a unit in the same problem." Here unit is defined in terms of itself, and the addition "that can be distinguished from any other object" contains no closer determination, because it goes without saying. We call the object another one precisely because we can distinguish it from the first. *Jevons*[1] says further: "When I write the symbol 5, I really mean 1 + 1 + 1 + 1 + 1, and it is perfectly clear that each of these units is different from every other.[20]

16

[4] A. a. O. S. 1. | [4] Op. cit., p. 1.

17

[1] Baumann a. a. O. Bd. I. S. 103. | [1] Baumann, op. cit., vol. I, p. 103.

18

[2] A. a. O. S. 3. | [2] Op. cit., p. 3.

19

[3] The principles of Science, 3 d. Ed. S. 156. | [3] The Principles of Science, 3rd ed., p. 156.

20 Frege adds Jevons's English word "unit" in brackets to fix the sense of the German Einheit.

GERMAN

Wenn erforderlich, kann ich sie so bezeichnen: 1′ + 1′′ + 1′′′ + 1′′′′ + 1′′′′′.« Gewiss ist es erforderlich, sie verschieden zu bezeichnen, wenn sie verschieden sind; sonst würde ja die grösste Verwirrung entstehen. Wenn schon die verschiedene Stelle, an der die Eins erschiene, eine Verschiedenheit bedeuten sollte, so müsste das als ausnahmslose Regel hingestellt werden, weil man sonst nie wüsste, ob 1 + 1 2 bedeuten solle oder 1. Dann müsste man die Gleichung 1 = 1 verwerfen und wäre in der Verlegenheit, nie dasselbe Ding zum zweiten Male bezeichnen zu können. Das geht offenbar nicht an.

Wenn man aber verschiedenen Dingen verschiedene Zeichen geben will, so ist nicht einzusehen, weshalb man in diesen noch einen gemeinsamen Bestandtheil festhält und nicht lieber statt 1′ + 1′′ + 1′′′ + 1′′′′ + 1′′′′′ schreibt a + b + c + d + e.

21

36.2 Die Gleichheit ist doch nun einmal verloren gegangen, und die Andeutung einer gewissen Aehnlichkeit nützt nichts. So zerrinnt uns die Eins unter den Händen; wir behalten die Gegenstände mit allen ihren Besonderheiten. Diese Zeichen 1′, 1′′, 1′′′ sind ein sprechender Ausdruck für die Verlegenheit: wir haben die Gleichheit nöthig; deshalb die 1; wir haben die Verschiedenheit nöthig; deshalb die Indices, die nur leider die Gleichheit wieder aufheben.

37.1 Bei andern Schriftstellern stossen wir auf dieselbe Schwierigkeit. *Locke*[1] sagt: »Durch Wiederholung der Idee einer Einheit und Hinzufügung derselben zu einer andern Einheit machen wir demnach eine collective Idee, die durch das Wort »zwei« bezeichnet wird. Und wer das thun und so weitergehen kann, immer noch Eins hinzufügend zu der letzten collectiven Idee, die er von einer Zahl hatte, und ihr einen Namen geben kann, der kann zählen.« *Leibniz*[2] definirt Zahl als 1 und 1 und 1 oder als Einheiten. *Hesse*[3] sagt: »Wenn man sich eine Vorstellung machen kann von der Einheit, die in der Algebra mit dem Zeichen 1 ausgedrückt wird, … so kann man sich auch eine zweite gleichberechtigte Einheit denken und weitere derselben Art.

Die Vereinigung der zweiten mit der ersten zu einem Ganzen giebt die Zahl 2«.

ENGLISH

If required, I can designate them thus: 1′ + 1′′ + 1′′′ + 1′′′′ + 1′′′′′." Certainly it is required to designate them differently if they are different; otherwise the greatest confusion would result. If the mere difference in the place where the one appeared were supposed to signify a difference, this would have to be laid down as a rule without exception, since otherwise we would never know whether 1 + 1 was supposed to mean 2 or 1. Then we would have to reject the equation 1 = 1 and would be in the predicament of never being able to designate the same thing a second time. That obviously will not do.

But if we want to give different things different signs, it is impossible to see why we should still keep a common component in them, rather than writing a + b + c + d + e instead of 1′ + 1′′ + 1′′′ + 1′′′′ + 1′′′′′.

Identity, after all, is now lost, and hinting at a certain similarity is of no use. So the one melts away in our hands; we are left with the objects and all their particularities. These signs 1′, 1′′, 1′′′ are an eloquent expression of the predicament: we need identity—hence the 1; we need difference—hence the indices, which unfortunately cancel the identity again.

We meet the same difficulty in other writers. *Locke*[1] says: "By repeating the idea of a unit and adding it to another unit, we accordingly make a collective idea, designated by the word 'two'. And whoever can do this and go on in this way, always adding one more to the last collective idea he had of a number, and can give it a name, can count." *Leibniz*[2] defines number as 1 and 1 and 1, or as units. *Hesse*[3] says: "If one can form an idea of the unit that is expressed in algebra by the sign 1, … one can also think of a second unit with equal rights, and further ones of the same kind.[22]

The union of the second with the first into a whole gives the number 2."

21

[1] A. a. O. S. 162. | [1] Op. cit., p. 162.

22 Ludwig Otto Hesse (1811–1874), German mathematician; his *Die vier Species* appeared in 1872.

GERMAN ENGLISH

232425

37.2 Hier ist auf die Beziehung zu achten, in der die Bedeutungen der Wörter »Einheit« und »Eins« zu einander stehen. *Leibniz* versteht unter Einheit einen Begriff, unter den die Eins und die Eins und die Eins fallen, wie er denn auch sagt: »Das Abstracte von Eins ist die Einheit.« *Locke* und *Hesse* scheinen Einheit und Eins gleichbedeutend zu gebrauchen. Im Grunde thut dies wohl auch *Leibniz*; denn indem er die einzelnen Gegenstände, die unter den Begriff der Einheit fallen, sämmtlich Eins nennt, bezeichnet er mit diesem Worte nicht den einzelnen Gegenstand, sondern den Begriff, unter den sie fallen.

Here we must attend to the relation in which the meanings of the words “unit” and “one” stand to each other. *Leibniz* understands by unit a concept under which one and one and one fall, as indeed he also says: “The abstract of one is unity.” *Locke* and *Hesse* seem to use unit and one synonymously. At bottom *Leibniz* probably does so too; for in calling the individual objects that fall under the concept of unit all one, he designates by this word not the individual object but the concept under which they fall.

38.1 Um nicht Verwirrung einreissen zu lassen, wird es jedoch gut sein, einen Unterschied zwischen Einheit und Eins streng aufrecht zu erhalten. Man sagt »die Zahl Eins« und deutet mit dem bestimmten Artikel einen bestimmten, einzelnen Gegenstand der wissenschaftlichen Forschung an. Es giebt nicht verschiedene Zahlen Eins, sondern nur Eine. Wir haben in 1 einen Eigennamen, der als solcher eines Plurals ebenso unfähig ist wie »Friedrich der Grosse« oder »das chemische Element Gold.« Es ist nicht Zufall und nicht eine ungenaue Bezeichnungsweise, dass man 1 ohne unterscheidende Striche schreibt. Die Gleichung 3 − 2 = 1 würde St.

Jevons etwa so wiedergeben: $(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'$ Was würde aber das Ergebniss von $(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1''''')$ sein? Jedenfalls nicht $1'$. Daraus geht hervor, dass es nach seiner Auffassung nicht nur verschiedene Einsen, sondern auch verschiedene Zweien u. s. w. geben würde; denn $1'' + 1'''$ könnte nicht durch $1'''' + 1'''''$ vertreten werden. Man sieht hieraus recht deutlich, dass die Zahl nicht eine Anhäufung von Dingen ist. Die Arithmetik würde aufgehoben werden, wollte man statt der Eins, die immer dieselbe ist, verschiedene Dinge einführen, wenn auch in noch so ähnlichen Zeichen; gleich dürften sie ja ohne Fehler nicht sein.

Man kann doch nicht annehmen, dass das tiefste Bedürfniss der Arithmetik eine fehlerhafte Schreibung sei. Darum ist es unmöglich 1 als Zeichen für verschiedene Gegenstände anzusehen, wie Island,

To keep confusion from setting in, however, it will be well to maintain a strict distinction between unit and one. We say “the number one”, and with the definite article we indicate a definite, single object of scientific inquiry. There are not different numbers one, but only one. In 1 we have a proper name, which as such is as incapable of a plural as “Frederick the Great” or “the chemical element gold”. It is neither chance nor imprecise notation that 1 is written without distinguishing strokes. The equation 3 − 2 = 1 would be rendered by Stanley

Jevons something like this: $(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'$. But what would be the result of $(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1''''')$? Certainly not $1'$. It follows that on his view there would be not only different ones but also different twos, and so on; for $1'' + 1'''$ could not be replaced by $1'''' + 1'''''$. This shows very clearly that number is not an accumulation of things. Arithmetic would be abolished if, instead of the one, which is always the same, we tried to introduce different things, however similar the signs for them; after all, they could not be identical without error.

Surely we cannot suppose that the deepest need of arithmetic is a faulty notation. It is therefore impossible to regard 1 as a sign for different objects, such as Iceland, Aldebaran, Solon and the like. The

23

[1] Baumann a. a. O. Bd. I. S. 409–411. [1] Baumann, op. cit., vol. I, pp. 409–411.

24

[2] Baumann a. a. O. Bd. II. S. 3. [2] Baumann, op. cit., vol. II, p. 3.

25

[3] Vier Species. S. 2. [3] Vier Species, p. 2.

	GERMAN	ENGLISH
	Aldebaran, Solon u. dgl. Am greifbarsten wird der Unsinn, wenn man an den Fall denkt, dass eine Gleichung drei Wurzeln hat, nämlich 2 und 5 und 4. Schreibt man nun nach *Jevons* für 3: 1′ + 1′′ + 1′′′, so würde 1′ hier 2, 1′′ 5 und 1′′′ 4 bedeuten, wenn man unter 1′, 1′′, 1′′′ Einheiten und folglich nach *Jevons* die hier vorliegenden Gegenstände des Denkens versteht. Wäre es dann nicht verständlicher für 1′ + 1′′ + 1′′′ zu schreiben 2 + 5 + 4?	absurdity becomes most palpable if we think of the case where an equation has three roots, namely 2 and 5 and 4. If, following *Jevons*, we now write 1′ + 1′′ + 1′′′ for 3, then 1′ would here mean 2, 1′′ 5 and 1′′′ 4, if by 1′, 1′′, 1′′′ we understand units and hence, according to *Jevons*, the objects of thought present here. Would it not then be more intelligible to write 2 + 5 + 4 instead of 1′ + 1′′ + 1′′′?
38.2	Ein Plural ist nur von Begriffswörtern möglich. Wenn man also von »Einheiten« spricht, so kann man dies Wort nicht gleichbedeutend mit dem Eigennamen »Eins« gebrauchen, sondern als Begriffswort. Wenn »Einheit« »zu zählender Gegenstand« bedeutet, so kann man nicht Zahl als Einheiten definiren. Wenn man unter »Einheit« einen Begriff versteht, der die Eins und nur diese unter sich fasst, so hat ein Plural keinen Sinn, und es ist wieder unmöglich, mit *Leibniz* Zahl als Einheiten oder als 1 und 1 und 1 zu definiren. Wenn man das »und« so gebraucht wie in »Bunsen und Kirchhof,« so ist 1 und 1 und 1 nicht 3, sondern 1, sowie Gold und Gold und Gold nie etwas anderes als Gold ist.	A plural is possible only for concept words. So if we speak of “units”, we cannot use this word synonymously with the proper name “one”, but only as a concept word. If “unit” means “object to be counted”, we cannot define number as units. If by “unit” we understand a concept under which one, and only one, falls, a plural makes no sense, and it is again impossible to define number, with *Leibniz*, as units or as 1 and 1 and 1. If we use “and” as in “Bunsen and Kirchhoff”, then 1 and 1 and 1 is not 3 but 1, just as gold and gold and gold is never anything but gold.[26]
	Das Pluszeichen in 1 + 1 + 1 = 3 muss also anders als das »und« aufgefasst werden, das eine Sammlung, eine »collective Idee« bezeichnen hilft.	The plus sign in 1 + 1 + 1 = 3 must therefore be understood differently from the “and” that helps to designate a collection, a “collective idea”.
39.1	Wir stehen demnach vor folgender Schwierigkeit:	We are thus faced with the following difficulty:
39.2	Wenn wir die Zahl durch Zusammenfassung von verschiedenen Gegenständen entstehen lassen wollen, so erhalten wir eine Anhäufung, in der die Gegenstände mit eben den Eigenschaften enthalten sind, durch die sie sich unterscheiden, und das ist nicht die Zahl. Wenn wir die Zahl andrerseits durch Zusammenfassung von Gleichem bilden wollen, so fliesst dies immerfort in eins zusammen, und wir kommen nie zu einer Mehrheit.	If we try to make number arise by combining different objects, we get an accumulation in which the objects are contained with precisely the properties by which they differ, and that is not number. If, on the other hand, we try to form number by combining what is identical, it keeps flowing together into one, and we never arrive at a multiplicity.
39.3	Wenn wir mit 1 jeden der zu zählenden Gegenstände bezeichnen, so ist das ein Fehler, weil Verschiedenes dasselbe Zeichen erhält. Versehen wir die 1 mit unterscheidenden Strichen, so wird sie für die Arithmetik unbrauchbar.	If we designate each of the objects to be counted by 1, that is a mistake, because different things receive the same sign. If we furnish the 1 with distinguishing strokes, it becomes useless for arithmetic.
39.4	Das Wort »Einheit« ist vortrefflich geeignet, diese Schwierigkeit zu verhüllen; und das ist der – wenn auch unbewusste – Grund, warum man es den Wörtern »Gegenstand« und »Ding« vorzieht. Man nennt zunächst die zu zählenden Dinge Einheiten, wobei die Verschiedenheit ihr Recht erhält; dann geht die	The word “unit” is admirably suited to veiling this difficulty; and that is the reason—if an unconscious one—why it is preferred to the words “object” and “thing”. First the things to be counted are called units, and difference gets its due. Then combining, collecting, uniting, adding, or whatever

26 Robert Bunsen (1811–1899) and Gustav Kirchhoff (1824–1887), German scientists who together developed spectral analysis.

	GERMAN	ENGLISH
	Zusammenfassung, Sammlung, Vereinigung, Hinzufügung, oder wie man es sonst nennen will, in den Begriff der arithmetischen Addition über und das Begriffswort »Einheit« verwandelt sich unvermerkt in den Eigennamen »Eins«. Damit hat man dann die Gleichheit. Wenn ich an den Buchstaben *u* ein *n* und daran ein *d* füge, so sieht jeder leicht ein, dass das nicht die Zahl 3 ist.	one wants to call it, passes over into the concept of arithmetical addition, and the concept word "unit" turns imperceptibly into the proper name "one". And with that we have identity. If I add an *n* to the letter *u*, and a *d* to that, anyone can easily see that this is not the number 3.
	Wenn ich aber *u*, *n* und *d* unter den Begriff »Einheit« bringe und nun für »*u* und *n* und *d*« sage »eine Einheit und eine Einheit und noch eine Einheit« oder »1 und 1 und 1«, so glaubt man leicht damit die 3 zu haben. Die Schwierigkeit wird durch das Wort »Einheit« so gut versteckt, dass gewiss nur wenige Menschen eine Ahnung von ihr haben.	But if I bring *u*, *n* and *d* under the concept "unit" and now say, instead of "*u* and *n* and *d*", "a unit and a unit and another unit" or "1 and 1 and 1", it is easy to believe that this gives us 3. The difficulty is so well hidden by the word "unit" that surely few people have any inkling of it.
39.5	Hier könnte *Mill* mit Recht tadelnd von einem kunstfertigen Handhaben der Sprache reden; denn hier ist es nicht die äussere Erscheinung eines Denkvorganges, sondern es spiegelt einen solchen nur vor. Hier hat man in der That den Eindruck, als ob den von Gedanken leeren Worten eine gewisse geheimnissvolle Kraft beigelegt werde, wenn Verschiedenes blos dadurch, dass man es Einheit nennt, gleich werden soll.	Here *Mill* could rightly complain of a skillful handling of language; for here language is not the outward appearance of a thought process but merely feigns one. Here we really do get the impression that a certain mysterious power is being ascribed to words empty of thought, when different things are supposed to become identical merely by being called units.

ATTEMPTS TO OVERCOME THE DIFFICULTY

Appeals to space, time, series and abstraction fail to reconcile identity with difference.

	GERMAN	ENGLISH
40.1	Wir betrachten nun einige Ausführungen, die sich als Versuche zur Ueberwindung dieser Schwierigkeit darstellen, wenn sie auch wohl nicht immer mit klarem Bewusstsein in dieser Absicht gemacht sind.	We now consider some lines of argument that present themselves as attempts to overcome this difficulty, even if they were probably not always put forward with this aim clearly in mind.
40.2	Man kann zunächst eine Eigenschaft des Raumes und der Zeit zu Hilfe rufen. Ein Raumpunkt ist nämlich von einem andern, eine Gerade oder Ebene von einer andern, congruente Körper, Flächen- oder Linienstücke von einander, für sich allein betrachtet, gar nicht zu unterscheiden, sondern nur in ihrem Zusammensein als Bestandteile einer Gesammtanschauung. So scheint sich hier Gleichheit mit Unterscheidbarkeit zu vereinen. Aehnliches gilt von der Zeit. Daher meint wohl *Hobbes*,[1] dass die Gleichheit der Einheiten anders als durch Theilung des Continuums entstehe, könne kaum gedacht werden.	We can first call on a property of space and time for help. A point of space, namely, cannot be distinguished at all from another, nor a straight line or plane from another, nor congruent bodies, pieces of surface or line segments from one another, when each is considered by itself. They can be distinguished only in their coexistence as components of a total intuition. So identity seems here to be united with distinguishability. The same holds of time. That is presumably why *Hobbes*[1] thinks it hardly conceivable that the identity of units should arise otherwise than by division of the continuum.
	Thomae[2] sagt: »Stellt man eine Menge von Individuen oder Einheiten im Raume vor und zählt man sie	*Thomae*[2] says: "If one pictures a set of individuals or units in space and counts them successively,

GERMAN

successive, wozu Zeit erforderlich ist, so bleibt bei aller Abstraction als unterscheidendes Merkmal der Einheiten noch ihre verschiedene Stellung im Raume und ihre verschiedene Aufeinanderfolge in der Zeit übrig.«

27 28

40.3 Zunächst erhebt sich das Bedenken gegen eine solche Auffassungsweise, dass dann das Zählbare auf das Räumliche und Zeitliche beschränkt wäre. Schon *Leibniz*[1] weist die Meinung der Scholastiker zurück, die Zahl entstehe aus der blossen Theilung des Continuums und könne nicht auf unkörperliche Dinge angewandt werden. *Baumann*[2] betont die Unabhängigkeit von Zahl und Zeit. Der Begriff der Einheit sei auch ohne die Zeit denkbar. *St. Jevons*[3] sagt: »Drei Münzen sind drei Münzen, ob wir sie nun nach einander zählen oder sie alle zugleich betrachten. In vielen Fällen ist weder Zeit noch Raum der Grund des Unterschiedes, sondern allein Qualität.

Wir können Gewicht, Trägheit und Härte des Goldes als drei Eigenschaften auffassen, obgleich keine von diesen vor noch nach der andern ist weder im Raum noch in der Zeit. Jedes Mittel der Unterscheidung kann eine Quelle der Vielheit sein.« Ich füge hinzu: wenn die gezählten Gegenstände nicht wirklich auf einander folgen, sondern nur nach einander gezählt werden, so kann die Zeit nicht der Grund der Unterscheidung sein. Denn, um sie nach einander zählen zu können, müssen wir schon unterscheidende Kennzeichen haben. Die Zeit ist nur ein psychologisches Erforderniss zum Zählen, hat aber mit dem Begriffe der Zahl nichts zu thun.

Wenn man unräumliche und unzeitliche Gegenstände durch Raum- oder Zeitpunkte vertreten lässt, so kann dies vielleicht für die Ausführung der Zählung vortheilhaft sein; grundsätzlich wird aber dabei die Anwendbarkeit des Zahlbegriffes auf Unräumliches und Unzeitliches vorausgesetzt.

29 30 31

ENGLISH

which requires time, then, for all abstraction, there still remain as distinguishing marks of the units their different positions in space and their different succession in time."

The first objection to such a way of viewing is that the countable would then be confined to the spatial and temporal. *Leibniz*[1] already rejects the opinion of the Scholastics that number arises from the mere division of the continuum and cannot be applied to incorporeal things. *Baumann*[2] stresses the independence of number and time: the concept of unit, he says, is thinkable even without time. *Stanley Jevons*[3] says: "Three coins are three coins whether we count them one after another or regard them all at once. In many cases neither time nor space is the ground of difference, but quality alone.

We can conceive of the weight, inertia and hardness of gold as three properties, although none of them is before or after another, either in space or in time. Any means of distinction can be a source of plurality." I add: if the objects counted do not actually follow one another but are only counted one after another, time cannot be the ground of distinction. For in order to be able to count them one after another, we must already have distinguishing marks. Time is only a psychological requirement for counting; it has nothing to do with the concept of number.

If we let non-spatial and non-temporal objects be represented by points of space or time, this may perhaps be advantageous for carrying out the count; but in principle it presupposes that the concept of number is applicable to what is non-spatial and non-temporal.

27

[1] Baumann a. a. O. Bd. I. S. 242. | [1] Baumann, op. cit., vol. I, p. 242.

28

[2] Elementare Theorie der analyt. Functionen, S. 1. | [2] Elementare Theorie der analyt. Functionen, p. 1.

29

[1] Baumann a. a. O. Bd. II. S. 2. | [1] Baumann, op. cit., vol. II, p. 2.

30

[2] A. a. O. Bd. II. S. 668. | [2] Op. cit., vol. II, p. 668.

31

[3] The Principles of Science, S. 157. | [3] The Principles of Science, p. 157.

	GERMAN	ENGLISH
41.1	Wird denn aber der Zweck der Vereinigung von Unterscheidbarkeit und Gleichheit wirklich erreicht, wenn wir von allen unterscheidenden Kennzeichen ausser den räumlichen und zeitlichen absehen? Nein! Wir sind der Lösung nicht um Einen Schritt näher gekommen. Die grössere oder geringere Aehnlichkeit der Gegenstände thut nichts zur Sache, wenn sie doch zuletzt aus einander gehalten werden müssen. Ich darf die einzelnen Punkte, Linien u. s. f. hier ebenso wenig alle mit 1 bezeichnen, als ich sie bei geometrischen Betrachtungen sämmtlich A nennen darf; denn hier wie dort ist es nöthig, sie zu unterscheiden. Nur für sich, ohne Rücksicht auf ihre räumlichen Beziehungen sind die Raumpunkte einander gleich.	But is the aim of uniting distinguishability and identity really achieved if we disregard all distinguishing marks except the spatial and temporal ones? No! We have not come one step closer to the solution. The greater or lesser similarity of the objects makes no difference if in the end they must still be kept apart. I may no more designate the individual points, lines and so on all by 1 here than I may call them all A in geometrical arguments; for here as there it is necessary to distinguish them. Only by themselves, without regard to their spatial relations, are points of space identical with one another.
	Soll ich sie aber zusammenfassen, so muss ich sie in ihrem räumlichen Zusammensein betrachten, sonst schmelzen sie unrettbar in Einem zusammen. Punkte stellen in ihrer Gesammtheit vielleicht irgendeine sternbildartige Figur vor oder sind irgendwie auf einer Geraden angeordnet, gleiche Strecken bilden vielleicht mit den Endpunkten zusammenstossend eine einzige Strecke oder liegen getrennt von einander. Die so entstehenden Gebilde können für dieselbe Zahl ganz verschieden sein. So würden wir auch hier verschiedene Fünfen, Sechsen u. s. w. haben. Die Zeitpunkte sind durch kurze oder lange, gleiche oder ungleiche Zwischenzeiten getrennt. Alles dies sind Verhältnisse, die mit der Zahl an sich gar nichts zu thun haben. Ueberall mischt sich etwas Besonderes ein, worüber die Zahl in ihrer Allgemeinheit weit erhaben ist.	But if I am to combine them, I must consider them in their spatial coexistence; otherwise they merge irretrievably into one. Taken all together, points may perhaps represent some constellation-like figure or be arranged somehow on a straight line; equal segments may perhaps meet at their endpoints to form a single segment, or lie apart from one another. The configurations arising in this way can be quite different for the same number. So here too we would have different fives, sixes and so on. Points of time are separated by short or long, equal or unequal intervals. All these are relations that have nothing whatever to do with number as such. Everywhere something particular gets mixed in, something far beneath number in its generality.
	Sogar ein einzelner Moment hat etwas Eigenthümliches, wodurch er sich etwa von einem Raumpunkte unterscheidet, und wovon nichts in dem Zahlbegriffe vorkommt.	Even a single moment has something peculiar to it, by which it differs, say, from a point of space, and of which there is nothing in the concept of number.
42.1	Auch der Ausweg, räumliche und zeitliche Anordnung durch einen allgemeinern Reihenbegriff zu ersetzen, führt nicht zum Ziele; denn die Stelle in der Reihe kann nicht der Grund des Unterscheidens der Gegenstände sein, weil diese schon irgendworan unterschieden sein müssen, um in eine Reihe geordnet werden zu können. Eine solche Anordnung setzt immer Beziehungen zwischen den Gegenständen voraus, seien es nun räumliche oder zeitliche oder logische oder Tonintervalle oder welche sonst, durch die man sich von einem zum andern leiten lässt, und die mit deren Unterscheidung nothwendig verbunden sind.	Nor does the way out of replacing spatial and temporal arrangement by a more general concept of series lead to the goal. For position in the series cannot be the ground for distinguishing the objects, since they must already be distinguished by something in order to be arranged in a series. Such an arrangement always presupposes relations between the objects—whether spatial, temporal, logical, intervals of pitch or any others—by which we are led from one to the next, and which are necessarily bound up with their being distinguished.
42.2	Wenn *Hankel*[1] ein Object 1 mal, 2 mal, 3 mal denken oder setzen lässt, so scheint auch dies ein Versuch zu	When *Hankel*[1] has an object thought or posited 1 time, 2 times, 3 times, this too seems to be an at-

GERMAN

sein, die Unterscheidbarkeit mit der Gleichheit des zu Zählenden zu vereinen. Aber man sieht auch sofort, dass es kein gelungener ist; denn diese Vorstellungen oder Anschauungen desselben Gegenstandes müssen, um nicht in Eine zusammenzufliessen, irgendwie verschieden sein. Ich meine auch, dass man berechtigt ist, von 45 Millionen Deutschen zu sprechen, ohne vorher 45 Millionen mal einen Normal-Deutschen gedacht oder gesetzt zu haben; das möchte etwas umständlich sein.

32

43.1 Wahrscheinlich um die Schwierigkeiten zu vermeiden, die sich ergeben, wenn man mit *St. Jevons* jedes Zeichen 1 einen der gezählten Gegenstände bedeuten lässt, will E. *Schröder* dadurch einen Gegenstand nur abbilden. Die Folge ist, dass er nur das Zahlzeichen, nicht die Zahl erklärt. Er sagt nämlich[1]: »Um nun ein Zeichen zu erhalten, welches fähig ist auszudrücken, *wieviele* jener Einheiten[2] vorhanden sind, richtet man die Aufmerksamkeit der Reihe nach einmal auf eine jede derselben und bildet sie mit einem Strich: 1 (eine *Eins*, ein *Einer*) ab; diese Einer setzt man in eine Zeile neben einander, verbindet sie jedoch unter sich durch das Zeichen + (plus), da sonst zum Beispiel 111 nach der gewöhnlichen Zahlenbezeichnung als einhundert und elf gelesen würde.

Man erhält auf diese Weise ein Zeichen wie: 1 + 1 + 1 + 1 + 1, dessen Zusammensetzung man dadurch beschreiben kann, dass man sagt: »*Eine natürliche Zahl ist eine Summe von Einern.*«

33 34

43.2 Hieraus sieht man, dass für Schröder die Zahl ein *Zeichen* ist. Was durch dies Zeichen ausgedrückt wird, das, was ich bisher Zahl genannt habe, setzt er mit den Worten »wieviele jener Einheiten vorhanden sind« als bekannt voraus. Auch unter dem Worte »Eins« versteht er das Zeichen 1, nicht dessen Bedeutung. Das Zeichen + dient ihm zunächst nur als äusserliches Verbindungsmittel ohne eignen Inhalt; erst später wird die Addition erklärt. Er hätte wohl kürzer so sagen können: man schreibt ebensoviele Zeichen 1 neben einander, als man zu zählende Gegenstände hat, und verbindet sie durch das

ENGLISH

tempt to unite the distinguishability of what is to be counted with its identity. But we also see at once that it is not a successful one; for these ideas or intuitions of the same object must differ in some way if they are not to flow together into one. I also think we are entitled to speak of 45 million Germans without first having thought or posited a standard German 45 million times; that might be somewhat laborious.

Probably in order to avoid the difficulties that arise if, with *Stanley Jevons*, we let each sign 1 mean one of the objects counted, E. *Schröder* wants it merely to depict an object. The consequence is that he defines only the numeral, not the number. For he says[1]: "Now, to obtain a sign capable of expressing *how many* of those units[2] are present, one directs one's attention in turn once to each of them and depicts it by a stroke: 1 (a *one*, a *single one*). These ones are set side by side in a row, but are joined to one another by the sign + (plus), since otherwise, for example, 111 would be read in the usual numerical notation as one hundred and eleven.

In this way one obtains a sign such as 1 + 1 + 1 + 1 + 1, whose composition can be described by saying: '*A natural number is a sum of ones.*'"

From this we see that for Schröder number is a *sign*. What is expressed by this sign, what I have so far called number, he presupposes as known, with the words "how many of those units are present". By the word "one", too, he understands the sign 1, not its meaning. The sign + serves him at first only as an external means of connection without content of its own; addition is defined only later. He could have put it more briefly thus: one writes as many signs 1 side by side as one has objects to be

32

[1] Theorie der complexen Zahlensysteme, S. 1.

[1] Theorie der complexen Zahlensysteme, p. 1.

33

[1] Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, S. 5 ff.

[1] Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, pp. 5 ff.

34

[2] zu zählenden Gegenstände.

[2] objects to be counted.

GERMAN

Zeichen +. Die Null würde dadurch auszudrücken sein, dass man nichts hinschreibt.

44.1 Um nicht die unterscheidenden Kennzeichen der Dinge in die Zahl mitaufzunehmen, sagt *St. Jevons*[1]:

35

44.2 »Es wird jetzt wenig schwierig sein, eine klare Vorstellung von der Zahlen-Abstraction zu bilden. Sie besteht im Abstrahiren von dem Charakter der Verschiedenheit, aus der Vielheit entspringt, indem man lediglich ihr Vorhandensein beibehält. Wenn ich von *drei Männern* spreche, so brauche ich nicht gleich die Kennzeichen einzeln anzugeben, an denen man jeden von ihnen von jedem unterscheiden kann. Diese Kennzeichen müssen vorhanden sein, wenn sie wirklich drei Männer und nicht ein und derselbe sind, und indem ich von ihnen als von vielen rede, behaupte ich damit zugleich das Vorhandensein der erforderlichen Unterschiede. Unbenannte Zahl ist also *die leere Form der Verschiedenheit*.«

44.3 Wie ist das zu verstehn? Man kann entweder von den unterscheidenden Eigenschaften der Dinge abstrahiren, bevor man sie zu einem Ganzen vereinigt; oder man kann erst ein Ganzes bilden und dann von der Art der Unterschiede abstrahiren. Auf dem ersten Wege würden wir gar nicht zur Unterscheidung der Dinge kommen und also auch das Vorhandensein der Unterschiede nicht festhalten können; den zweiten Weg scheint *Jevons* zu meinen. Aber ich glaube nicht, dass wir so die Zahl 10000 gewinnen würden, weil wir nicht im Stande sind, so viele Unterschiede gleichzeitig aufzufassen und ihr Vorhandensein festzuhalten; denn, wenn es nach einander geschähe, so würde die Zahl nie fertig werden. Wir zählen zwar in der Zeit; aber dadurch gewinnen wir nicht die Zahl, sondern bestimmen sie nur.

Uebrigens ist die Angabe der Weise des Abstrahirens keine Definition.

44.4 Was soll man sich unter der »leeren Form der Verschiedenheit« denken? etwa einen Satz wie »a ist verschieden von b«, wobei a und b unbestimmt bleiben? Wäre dieser Satz etwa die Zahl 2? Ist der Satz »die Erde hat zwei Pole« gleichbedeutend mit »der Nordpol ist vom Südpol verschieden«? Offenbar nicht. Der zweite Satz

ENGLISH

counted, and connects them by the sign +. Zero would be expressed by writing nothing down.

In order not to take the distinguishing marks of things into number along with it, *Stanley Jevons*[1] says:

"It will now be not very difficult to form a clear idea of numerical abstraction. It consists in abstracting from the character of the difference from which plurality arises, retaining merely its existence. When I speak of *three men*, I need not at once specify one by one the marks by which each of them can be distinguished from each of the others. These marks must exist if they really are three men and not one and the same, and in speaking of them as many I thereby at the same time assert the existence of the requisite differences. Abstract number is thus *the empty form of difference*."

How is this to be understood? We can either abstract from the distinguishing properties of the things before combining them into a whole, or we can first form a whole and then abstract from the nature of the differences. On the first path we would never even get as far as distinguishing the things, and so we could not retain the presence of the differences either. It is the second path that *Jevons* seems to mean. But I do not believe that we would obtain the number 10000 in this way, because we are not able to apprehend so many differences at once and retain their presence; and if it happened one after another, the number would never be finished. We do count in time; but in doing so we do not obtain the number, we only determine it.

Besides, stating the manner of abstracting is not a definition.

What are we supposed to think of under the "empty form of difference"? A proposition such as "a is different from b", perhaps, where a and b remain indeterminate? Would this proposition then be the number 2? Does the proposition "the earth has two poles" mean the same as "the North Pole

35

[1] A. a. O. S. 158.

[1] Op. cit., p. 158.

GERMAN

könnte ohne den ersten und dieser ohne jenen bestehen. Für die Zahl 1000 würden wir dann (1000 · 999)/(1 · 2) solche Sätze haben, die eine Verschiedenheit ausdrücken.

44.5 Was *Jevons* sagt, passt insbesondere gar nicht auf die 0 und die 1. Wovon soll man eigentlich abstrahiren, um z. B. vom Monde auf die Zahl 1 zu kommen? Durch Abstrahiren erhält man wohl die Begriffe: Begleiter der Erde, Begleiter eines Planeten, Himmelskörper ohne eignes Licht, Himmelskörper, Körper, Gegenstand; aber die 1 ist in dieser Reihe nicht anzutreffen; denn sie ist kein Begriff, unter den der Mond fallen könnte. Bei der 0 hat man gar nicht einmal einen Gegenstand, von dem bei der Abstraction auszugehen wäre. Man wende nicht ein, dass 0 und 1 nicht Zahlen in demselben Sinne seien wie 2 und 3! Die Zahl antwortet auf die Frage wieviel? und wenn man z. B. fragt: wieviel Monde hat dieser Planet?

so kann man sich ebenso gut auf die Antwort 0 oder 1 wie 2 oder 3 gefasst machen, ohne dass der Sinn der Frage ein andrer wird. Zwar hat die Zahl 0 etwas Besonderes und ebenso die 1, aber das gilt im Grunde von jeder ganzen Zahl; nur fällt es bei den grösseren immer weniger in die Augen. Es ist durchaus willkührlich, hier einen Artunterschied zu machen. Was nicht auf 0 oder 1 passt, kann für den Begriff der Zahl nicht wesentlich sein.

44.6 Endlich wird durch die Annahme dieser Entstehungsweise der Zahl die Schwierigkeit gar nicht gehoben, auf die wir bei der Betrachtung der Bezeichnung $1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$ für 5 gestossen sind. Diese Schreibung steht gut im Einklange mit dem, was *Jevons* über die zahlenbildende Abstraction sagt; die obern Striche deuten nämlich an, dass eine Verschiedenheit da ist, ohne jedoch ihre Art anzugeben. Aber das blosse Bestehen der Verschiedenheit genügt schon, wie wir gesehen haben, um bei der *Jevons*'schen Auffassung verschiedene Einsen, Zweien, Dreien hervorzubringen, was mit dem Bestande der Arithmetik durchaus unverträglich ist.

ENGLISH

is different from the South Pole"? Obviously not. The second proposition could hold without the first, and the first without the second. For the number 1000 we would then have (1000 · 999)/(1 · 2) such propositions expressing a difference.

What *Jevons* says does not fit 0 and 1 at all, in particular. What exactly are we supposed to abstract from in order to get from the moon, for example, to the number 1? By abstracting we do obtain the concepts: satellite of the earth, satellite of a planet, heavenly body without light of its own, heavenly body, body, object. But 1 is nowhere to be met with in this series, for it is not a concept under which the moon could fall. In the case of 0 we do not even have an object from which the abstraction could start. Let no one object that 0 and 1 are not numbers in the same sense as 2 and 3! Number answers the question "how many?", and if we ask, for example, "how many moons does this planet have?"

we may be prepared for the answer 0 or 1 just as well as for 2 or 3, without the sense of the question changing. The number 0 does have something special about it, to be sure, and so does 1; but at bottom that holds of every whole number, only it is less and less noticeable in the larger ones. It is entirely arbitrary to make a difference in kind here. What does not fit 0 or 1 cannot be essential to the concept of number.

Finally, assuming that number arises in this way does nothing at all to remove the difficulty we ran into when considering the notation $1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$ for 5. This notation agrees well with what *Jevons* says about the abstraction that forms number: the strokes above indicate that there is a difference, without stating what kind it is. But, as we have seen, the mere existence of difference is already enough, on *Jevons*'s view, to produce different ones, twos and threes—which is utterly incompatible with arithmetic as it stands.

SOLUTION OF THE DIFFICULTY

Frege summarizes the results so far and begins to set out his own answer.

GERMAN

ENGLISH

45.1

	GERMAN	ENGLISH
	Ueberblicken wir nun das bisher von uns Festgestellte und die noch unbeantwortet gebliebenen Fragen!	Let us now survey what we have established so far, and the questions that have remained unanswered!
45.2	Die Zahl ist nicht in der Weise wie Farbe, Gewicht, Härte von den Dingen abstrahirt, ist nicht in dem Sinne wie diese Eigenschaft der Dinge. Es blieb noch die Frage, von wem durch eine Zahlangabe etwas ausgesagt werde.	Number is not abstracted from things in the way that color, weight and hardness are; it is not a property of things in the sense that these are. The question remained: of what is something asserted by a statement of number?
45.3	Die Zahl ist nichts Physikalisches, aber auch nichts Subjectives, keine Vorstellung.	Number is nothing physical, but nothing subjective either; it is not an idea.
45.4	Die Zahl entsteht nicht durch Hinzufügung von Ding zu Ding. Auch die Namengebung nach jeder Hinzufügung ändert darin nichts.	Number does not arise by adding thing to thing. Nor does giving a name after each addition change anything here.
45.5	Die Ausdrücke »Vielheit,« »Menge,« »Mehrheit« sind wegen ihrer Unbestimmtheit ungeeignet, zur Erklärung der Zahl zu dienen.	The expressions “plurality”, “set” and “multiplicity” are unsuitable, because of their indeterminacy, for defining number.
45.6	In Bezug auf Eins und Einheit blieb die Frage, wie die Willkühr der Auffassung zu beschränken sei, die jeden Unterschied zwischen Einem und Vielen zu verwischen schien.	With regard to one and unit, there remained the question of how to restrict the arbitrariness in our way of regarding things, which seemed to blur every difference between one and many.
45.7	Die Abgegrenztheit, die Ungetheiltheit, die Unzerlegbarkeit sind keine brauchbaren Merkmale für das, was wir durch das Wort »Ein« ausdrücken.	Being delimited, being undivided and being indivisible are not usable characteristic marks for what we express by the word “one”.
45.8	Wenn man die zu zählenden Dinge Einheiten nennt, so ist die unbedingte Behauptung, dass die Einheiten gleich seien, falsch. Dass sie in gewisser Hinsicht gleich sind, ist zwar richtig aber werthlos. Die Verschiedenheit der zu zählenden Dinge ist sogar nothwendig, wenn die Zahl grösser als 1 werden soll.	If we call the things to be counted units, then the unconditional assertion that the units are identical is false. That they are identical in a certain respect is correct, but worthless. Difference between the things to be counted is in fact necessary if the number is to be greater than 1.
45.9	So schien es, dass wir den Einheiten zwei widersprechende Eigenschaften beilegen müssten: die Gleichheit und die Unterscheidbarkeit.	So it seemed that we had to ascribe two contradictory properties to the units: identity and distinguishability.
45.10	Es ist ein Unterschied zwischen Eins und Einheit zu machen. Das Wort »Eins« ist als Eigenname eines Gegenstandes der mathematischen Forschung eines Plurals unfähig. Es ist also sinnlos, Zahlen durch Zusammenfassen von Einsen entstehen zu lassen. Das Pluszeichen in 1 + 1 = 2 kann nicht eine solche Zusammenfassung bedeuten.	A distinction must be drawn between one and unit. The word “one”, as the proper name of an object of mathematical inquiry, does not admit of a plural. It is therefore senseless to make numbers arise by putting ones together. The plus sign in 1 + 1 = 2 cannot mean such a putting together.

A STATEMENT OF NUMBER IS ABOUT A CONCEPT

Frege argues that a statement of number contains an assertion about a concept.

	GERMAN	ENGLISH
46.1	Um Licht in die Sache zu bringen, wird es gut sein, die Zahl im Zusammenhange eines Urtheils zu betrachten, wo ihre ursprüngliche Anwendungsweise hervortritt. Wenn ich in Ansehung derselben äussern Erscheinung mit derselben Wahrheit sagen kann: »dies ist eine Baumgruppe« und »dies sind fünf Bäume« oder »hier sind vier Compagnien« und »hier sind 500 Mann,« so ändert sich dabei weder das Einzelne noch das Ganze, das Aggregat, sondern meine Benennung. Das ist aber nur das Zeichen der Ersetzung eines Begriffes durch einen andern. Damit wird uns als Antwort auf die erste Frage des vorigen Paragraphen nahe gelegt, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte. Am deutlichsten ist dies vielleicht bei der Zahl 0.	To shed light on the matter, it will be good to consider number in the context of a judgment, where its original manner of application comes out. If, faced with the same external phenomenon, I can say with equal truth "this is a group of trees" and "these are five trees", or "here are four companies" and "here are 500 men", then what changes is neither the individual nor the whole, the aggregate, but my naming. But that is only the sign that one concept has been replaced by another. This suggests to us, as the answer to the first question of the previous section, that a statement of number contains an assertion about a concept. This is perhaps clearest in the case of the number 0.
	Wenn ich sage: »die Venus hat 0 Monde«, so ist gar kein Mond oder Aggregat von Monden da, von dem etwas ausgesagt werden könnte; aber dem *Begriffe* »Venusmond« wird dadurch eine Eigenschaft beigelegt, nämlich die, nichts unter sich zu befassen. Wenn ich sage: »der Wagen des Kaisers wird von vier Pferden gezogen,« so lege ich die Zahl vier dem Begriffe »Pferd, das den Wagen des Kaisers zieht,« bei.	If I say "Venus has 0 moons", then there is no moon or aggregate of moons at all of which anything could be asserted; but a property is thereby ascribed to the *concept* "moon of Venus", namely that of including nothing under it. If I say "the Emperor's carriage is drawn by four horses", then I ascribe the number four to the concept "horse that draws the Emperor's carriage".
46.2	Man mag einwenden, dass ein Begriff wie z. B. »Angehöriger des deutschen Reiches,« obwohl seine Merkmale unverändert bleiben, eine von Jahr zu Jahr wechselnde Eigenschaft haben würde, wenn die Zahlangabe eine solche von ihm aussagte. Man kann dagegen geltend machen, dass auch Gegenstände ihre Eigenschaften ändern, was nicht verhindere, sie als dieselben anzuerkennen. Hier lässt sich aber der Grund noch genauer angeben. Der Begriff »Angehöriger des deutschen Reiches« enthält nämlich die Zeit als veränderlichen Bestandtheil, oder, um mich mathematisch auszudrücken, ist eine Function der Zeit. Für »a ist ein Angehöriger des deutschen Reiches« kann man sagen: »a gehört dem deutschen Reiche an« und dies bezieht sich auf den gerade gegenwärtigen Zeitpunkt. So ist also in dem Begriffe selbst schon etwas Fliessendes.	It may be objected that a concept such as "citizen of the German Empire", although its characteristic marks remain unchanged, would have a property that changed from year to year, if the statement of number asserted such a property of it. One can reply that objects too change their properties, and this does not prevent us from recognizing them as the same. But here the reason can be given more precisely. The concept "citizen of the German Empire" contains time as a variable component; or, to put it mathematically, it is a function of time. For "a is a citizen of the German Empire" one can say "a belongs to the German Empire", and this refers to the present moment. So there is already something fluid in the concept itself.
	Dagegen kommt dem Begriffe »Angehöriger des deutschen Reiches zu Jahresanfang 1883 berliner Zeit« in alle Ewigkeit dieselbe Zahl zu.	By contrast, the same number belongs for all eternity to the concept "citizen of the German Empire at the beginning of the year 1883, Berlin time".
47.1	Dass eine Zahlangabe etwas Thatsächliches von unserer Auffassung Unabhängiges ausdrückt, kann nur den Wunder nehmen, welcher den Begriff für etwas	That a statement of number expresses something factual, independent of our way of regarding things, can surprise only someone who takes the

GERMAN

Subjectives gleich der Vorstellung hält. Aber diese Ansicht ist falsch. Wenn wir z. B. den Begriff des Körpers dem des Schweren oder den des Wallfisches dem des Säugethiers unterordnen, so behaupten wir damit etwas Objectives. Wenn nun die Begriffe subjectiv wären, so wäre auch die Unterordnung des einen unter den andern als Beziehung zwischen ihnen etwas Subjectives wie eine Beziehung zwischen Vorstellungen. Freilich auf den ersten Blick scheint der Satz »alle Wallfische sind Säugethiere« von Thieren, nicht von Begriffen zu handeln; aber, wenn man fragt, von welchem Thiere denn die Rede sei, so kann man kein einziges aufweisen.

Gesetzt, es liege ein Wallfisch vor, so behauptet doch von diesem unser Satz nichts. Man könnte aus ihm nicht schliessen, das vorliegende Thier sei ein Säugethier, ohne den Satz hinzuzunehmen, dass es ein Wallfisch ist, wovon unser Satz nichts enthält. Ueberhaupt ist es unmöglich, von einem Gegenstande zu sprechen, ohne ihn irgendwie zu bezeichnen oder zu benennen. Das Wort »Wallfisch« benennt aber kein Einzelwesen. Wenn man erwidert, allerdings sei nicht von einem einzelnen, bestimmten Gegenstande die Rede, wohl aber von einem unbestimmten, so meine ich, dass »unbestimmter Gegenstand« nur ein andrer Ausdruck für »Begriff« ist, und zwar ein schlechter, widerspruchsvoller. Mag immerhin unser Satz nur durch Beobachtung an einzelnen Thieren gerechtfertigt werden können, dies beweist nichts für seinen Inhalt.

Für die Frage, wovon er handelt, ist es gleichgiltig, ob er wahr ist oder nicht, oder aus welchen Gründen wir ihn für wahr halten. Wenn nun der Begriff etwas Objectives ist, so kann auch eine Aussage von ihm etwas Thatsächliches enthalten.

48.1 Der Schein, der vorhin bei einigen Beispielen entstand, dass demselben verschiedene Zahlen zukämen, erklärt sich daraus, dass dabei Gegenstände als Träger der Zahl angenommen wurden. Sobald wir den wahren Träger, den Begriff, in seine Rechte einsetzen, zeigen sich die Zahlen so ausschliessend wie in ihrem Bereiche die Farben.

48.2 Wir sehen nun auch, wie man dazu kommt, die Zahl durch Abstraction von den Dingen gewinnen zu wollen. Was man dadurch erhält, ist der Begriff, an dem man dann die Zahl entdeckt. So geht die Abstraction in der That oft der Bildung eines Zahlurtheils vorher. Die Verwechselung ist dieselbe, wie wenn man sagen wollte: der Begriff der Feuergefährlichkeit wird erhalten, indem

ENGLISH

concept to be something subjective, like an idea. But this view is false. If, for example, we subordinate the concept of body to that of what has weight, or the concept of whale to that of mammal, we thereby assert something objective. Now if concepts were subjective, then the subordination of one to another, as a relation between them, would also be something subjective, like a relation between ideas. Admittedly, at first glance the proposition “all whales are mammals” seems to be about animals, not about concepts; but if we ask which animal is being spoken of, we cannot point to a single one.

Suppose a whale is lying in front of us: our proposition still asserts nothing about it. We could not infer from it that the animal in front of us is a mammal without adding the proposition that it is a whale, and of that our proposition contains nothing. In general, it is impossible to speak of an object without designating or naming it in some way. But the word “whale” names no individual creature. If someone replies that, admittedly, what is spoken of is not a single, determinate object, but an indeterminate one, then I hold that “indeterminate object” is only another expression for “concept”—and a bad, self-contradictory one at that. Granted that our proposition can be justified only by observing individual animals, this proves nothing about its content.

For the question of what it is about, it makes no difference whether it is true or not, or on what grounds we take it to be true. Now if the concept is something objective, then an assertion about it can also contain something factual.

The appearance that arose earlier with some examples, that different numbers belonged to the same thing, is explained by the fact that objects were there taken to be the bearers of number. As soon as we restore the true bearer, the concept, to its rights, numbers prove to be just as mutually exclusive as colors are in their domain.

We now also see how people come to want to obtain number by abstraction from things. What one obtains in this way is the concept, in which one then discovers the number. Thus abstraction does in fact often precede the forming of a judgment of number. The confusion is the same as if one wanted to say: the concept of fire hazard is ob-

	GERMAN	ENGLISH
	man ein Wohnhaus aus Fachwerk mit einem Brettergiebel und Strohdach baut, dessen Schornsteine undicht sind.	tained by building a half-timbered house with a board gable and a thatched roof, whose chimneys leak.
48.3	Die sammelnde Kraft des Begriffes übertrifft weit die vereinigende der synthetischen Apperception. Durch diese wäre es nicht möglich, die Angehörigen des deutschen Reiches zu einem Ganzen zu verbinden; wohl aber kann man sie unter dem Begriff »Angehöriger des deutschen Reiches« bringen und zählen.	The gathering power of the concept far surpasses the unifying power of synthetic apperception. By means of the latter it would not be possible to combine the citizens of the German Empire into a whole; but we can bring them under the concept "citizen of the German Empire" and count them.[36]
48.4	Nun wird auch die grosse Anwendbarkeit der Zahl erklärlich. Es ist in der That räthselhaft, wie dasselbe von äussern und zugleich von innern Erscheinungen, von Räumlichem und Zeitlichem und von Raum- und Zeitlosem ausgesagt werden könne. Dies findet nun in der Zahlangabe auch gar nicht statt. Nur den Begriffen, unter die das Aeussere und Innere, das Räumliche und Zeitliche, das Raum- und Zeitlose gebracht ist, werden Zahlen beigelegt.	Now the wide applicability of number also becomes explicable. It is indeed puzzling how the same thing could be asserted of outer and at the same time of inner phenomena, of what is spatial and temporal and of what is neither spatial nor temporal. And in fact this does not happen at all in a statement of number. Numbers are ascribed only to the concepts under which the outer and the inner, the spatial and the temporal, the non-spatial and the non-temporal have been brought.
49.1	Wir finden für unsere Ansicht eine Bestätigung bei *Spinoza*, der sagt[1]: »Ich antworte, dass ein Ding blos rücksichtlich seiner Existenz, nicht aber seiner Essenz eines oder einzig genannt wird; denn wir stellen die Dinge unter Zahlen nur vor, nachdem sie auf ein gemeinsames Maass gebracht sind. Wer z. B.	We find confirmation of our view in *Spinoza*, who says[1]: "I answer that a thing is called one or unique only with respect to its existence, not its essence; for we conceive things under numbers only after they have been brought to a common measure. Whoever, for example,[37]
	ein Sesterz und einen Imperial in der Hand hält, wird an die Zweizahl nicht denken, wenn er nicht dieses Sesterz und diesen Imperial mit einem und dem nämlichen Namen, nämlich Geldstück oder Münze belegen kann: dann kann er bejahen, dass er zwei Geldstücke oder Münzen habe; weil er nicht nur das Sesterz, sondern auch den Imperial mit den Namen Münze bezeichnet.« Wenn er fortfährt: »Hieraus ist klar, dass ein Ding eins oder einzig genannt wird, nur nachdem ein anderes Ding ist vorgestellt worden, das (wie gesagt) mit ihm übereinkommt,« und wenn er meint, dass man nicht im eigentlichen Sinne Gott einen oder einzig nennen könne, weil wir von seiner Essenz keinen abstracten Begriff bilden könnten, so irrt er in der Meinung, der Begriff könne nur unmittelbar durch Abstraction von mehren Gegenständen gewonnen werden.	holds a sesterce and an imperial in his hand will not think of the number two unless he can give this sesterce and this imperial one and the same name, namely piece of money or coin. Then he can affirm that he has two pieces of money or coins, because he designates not only the sesterce but also the imperial by the name coin." When he goes on: "From this it is clear that a thing is called one or unique only after another thing has been conceived that (as has been said) agrees with it", and when he holds that God cannot properly be called one or unique because we could form no abstract concept of his essence, he is mistaken in thinking that a concept can only be obtained directly, by abstraction from several objects.[38]
	Vielmehr kann man auch von den Merkmalen aus zu dem Begriffe gelangen; und dann ist es möglich, das kein Ding	On the contrary, one can also arrive at the concept starting from the characteristic marks; and then it

36 "Synthetic apperception" is *Kant*'s term for the activity of consciousness that unites a manifold of representations into one.
37 Baruch Spinoza (1632–1677), Dutch philosopher; the passage comes from his letter of 1674 to Jarig Jelles (Letter 50).
38 The sesterce was an ancient Roman coin; the "imperial" (Latin *imperialis*) was a coin of the Holy Roman Empire, the imperial thaler.

GERMAN

unter ihn fällt. Wenn dies nicht vorkäme, würde man nie die Existenz verneinen können, und damit verlöre auch die Bejahung der Existenz ihren Inhalt.

39

50.1 E. *Schröder*[1] hebt hervor, dass, wenn von Häufigkeit eines Dinges solle gesprochen werden können, der Name dieses Dinges stets ein *Gattungsname*, ein allgemeines Begriffswort (notio communis) sein müsse: »Sobald man nämlich einen Gegenstand vollständig – mit allen seinen Eigenschaften und Beziehungen – in's Auge fasst, so wird derselbe einzig in der Welt dastehen und seines gleichen nicht weiter haben. Der Name des Gegenstandes wird alsdann den Charakter eines *Eigennamens* (nomen proprium) tragen und kann der Gegenstand nicht als ein wiederholt vorkommender gedacht werden.

Dieses gilt aber nicht allein von *concreten* Gegenständen, es gilt überhaupt von jedem Dinge, mag dessen Vorstellung auch durch *Abstractionen* zu Stande kommen, wofern nur diese Vorstellung solche Elemente in sich schliesst, welche genügen, das betreffende Ding zu einem *völlig* bestimmten zu machen. ... Das letztere« (Object der Zählung zu werden) »wird bei einem Dinge erst insofern möglich, als man von einigen ihm eigenthümlichen Merkmalen und Beziehungen, durch die es sich von allen andern Dingen unterscheidet, dabei absieht oder *abstrahirt*, wodurch dann erst der Name des Dinges zu einem auf mehre Dinge anwendbaren Begriffe wird.«

40

51.1 Das Wahre in dieser Ausführung ist in so schiefe und irreführende Ausdrücke gekleidet, dass eine Entwirrung und Sichtung geboten ist. Zunächst ist es unpassend, ein allgemeines Begriffswort Namen eines Dinges zu nennen. Dadurch entsteht der Schein, als ob die Zahl Eigenschaft eines Dinges wäre. Ein allgemeines Begriffswort bezeichnet eben einen Begriff. Nur mit dem bestimmten Artikel oder einem Demonstrativpronomen gilt es als Eigenname eines Dinges, hört aber damit auf, als Begriffswort zu gelten. Der Name eines Dinges ist ein Eigenname. Ein Gegenstand kommt nicht wiederholt vor, sondern mehre Gegenstände fallen unter einen Begriff. Dass ein Begriff nicht nur durch Abstraction von den

ENGLISH

is possible that no thing falls under it. If this never happened, we could never deny existence, and then the affirmation of existence would lose its content too.

E. *Schröder*[1] stresses that, if we are to be able to speak of the frequency of a thing, the name of this thing must always be a *generic name*, a general concept word (notio communis [common notion]): "For as soon as one takes an object fully into view —with all its properties and relations—it will stand alone in the world and have no equal anywhere. The name of the object will then bear the character of a *proper name* (nomen proprium [proper name]), and the object cannot be thought of as occurring repeatedly.

But this holds not only of *concrete* objects; it holds generally of every thing, even if the idea of it comes about through *abstractions*, provided only that this idea contains elements sufficient to make the thing in question *completely* determinate. ... The latter" (becoming an object of counting) "becomes possible for a thing only insofar as one disregards, or *abstracts* from, some of the characteristic marks and relations peculiar to it, by which it is distinguished from all other things; only then does the name of the thing become a concept applicable to several things."

What is true in this account is dressed up in such skewed and misleading expressions that it needs to be disentangled and sifted. First, it is inappropriate to call a general concept word the name of a thing. This creates the appearance that number is a property of a thing. A general concept word designates precisely a concept. Only with the definite article or a demonstrative pronoun does it count as the proper name of a thing, and with that it ceases to count as a concept word. The name of a thing is a proper name. An object does not occur repeatedly; rather, several objects fall under one concept. That a concept is not obtained only by ab-

39

[1] Baumann a. a. O. Bd. I, S. 169. | [1] Baumann, op. cit., vol. I, p. 169.

40

[1] A. a. O. S. 6. | [1] Op. cit., p. 6.

GERMAN

Dingen erhalten wird, die unter ihn fallen, ist schon *Spinoza* gegenüber bemerkt.

Hier füge ich hinzu, dass ein Begriff dadurch nicht aufhört, Begriff zu sein, dass nur ein einziges Ding unter ihn fällt, welches demnach völlig durch ihn bestimmt ist. Einem solchen Begriffe (z. B. Begleiter der Erde) kommt eben die Zahl 1 zu, die in demselben Sinne Zahl ist wie 2 und 3. Bei einem Begriffe fragt es sich immer, ob etwas und was etwa unter ihn falle. Bei einem Eigennamen sind solche Fragen sinnlos. Man darf sich nicht dadurch täuschen lassen, dass die Sprache einen Eigennamen, z. B. Mond, als Begriffswort verwendet und umgekehrt; der Unterschied bleibt trotzdem bestehen. Sobald ein Wort mit dem unbestimmten Artikel oder im Plural ohne Artikel gebraucht wird, ist es Begriffswort.

52.1 Eine weitere Bestätigung für die Ansicht, dass die Zahl Begriffen beigelegt wird, kann in dem deutschen Sprachgebrauche gefunden werden, dass man zehn Mann, vier Mark, drei Fass sagt. Der Singular mag hier andeuten, dass der Begriff gemeint ist, nicht das Ding. Der Vorzug dieser Ausdrucksweise tritt besonders bei der Zahl 0 hervor. Sonst freilich legt die Sprache den Gegenständen, nicht dem Begriffe Zahl bei: man sagt »Zahl der Ballen,« wie man »Gewicht der Ballen« sagt. So spricht man scheinbar von Gegenständen, während man in Wahrheit von einem Begriffe etwas aussagen will. Dieser Sprachgebrauch ist verwirrend. Der Ausdruck »vier edle Rosse« erweckt den Schein, als ob »vier« den Begriff »edles Ross« ebenso wie »edel« den Begriff »Ross« näher bestimme.

Jedoch ist nur »edel« ein solches Merkmal; durch das Wort »vier« sagen wir etwas von einem Begriffe aus.

53.1 Unter Eigenschaften, die von einem Begriffe ausgesagt werden, verstehe ich natürlich nicht die Merkmale, die den Begriff zusammensetzen. Diese sind Eigenschaften der Dinge, die unter den Begriff fallen, nicht des Begriffes. So ist »rechtwinklig« nicht eine Eigenschaft des Begriffes »rechtwinkliges Dreieck«; aber der Satz, dass es kein rechtwinkliges, geradliniges, gleichseitiges Dreieck gebe, spricht eine Eigenschaft des Begriffes »rechtwinkliges, geradliniges, gleichseitiges Dreieck« aus; diesem wird die Nullzahl beigelegt.

ENGLISH

straction from the things that fall under it has already been remarked in answer to *Spinoza*.

Here I add that a concept does not cease to be a concept merely because only a single thing falls under it, a thing which is accordingly completely determined by it. To such a concept (e.g. satellite of the earth) there belongs precisely the number 1, which is a number in the same sense as 2 and 3. With a concept the question is always whether anything falls under it, and if so, what. With a proper name such questions are senseless. We must not let ourselves be deceived by the fact that language uses a proper name, e.g. moon, as a concept word, and vice versa; the distinction remains all the same. As soon as a word is used with the indefinite article, or in the plural without an article, it is a concept word.

A further confirmation of the view that number is ascribed to concepts can be found in the German usage of saying *zehn Mann, vier Mark, drei Fass* [literally "ten man, four mark, three barrel"]. The singular here may indicate that it is the concept that is meant, not the thing. The advantage of this way of speaking comes out especially with the number 0. Otherwise, admittedly, language ascribes number to objects, not to the concept: we say "number of the bales" just as we say "weight of the bales". So we seem to be speaking of objects, when in truth we mean to assert something of a concept. This usage is confusing. The expression "four thoroughbred horses" creates the appearance that "four" qualifies the concept "thoroughbred horse" in the same way that "thoroughbred" qualifies the concept "horse".

But only "thoroughbred" is a characteristic mark of this kind; by the word "four" we assert something of a concept.

By properties asserted of a concept I naturally do not mean the characteristic marks that make up the concept. These are properties of the things that fall under the concept, not of the concept. Thus "right-angled" is not a property of the concept "right-angled triangle"; but the proposition that there is no right-angled, rectilinear, equilateral triangle does state a property of the concept "right-angled, rectilinear, equilateral triangle": the number zero is ascribed to it.

	GERMAN	ENGLISH
53.2	In dieser Beziehung hat die Existenz Aehnlichkeit mit der Zahl. Es ist ja Bejahung der Existenz nichts Anderes als Verneinung der Nullzahl. Weil Existenz Eigenschaft des Begriffes ist, erreicht der ontologische Beweis von der Existenz Gottes sein Ziel nicht. Ebensowenig wie die Existenz ist aber die Einzigkeit Merkmal des Begriffes »Gott«. Die Einzigkeit kann nicht zur Definition dieses Begriffes gebraucht werden, wie man auch die Festigkeit, Geräumigkeit, Wohnlichkeit eines Hauses nicht mit Steinen, Mörtel und Balken zusammen bei seinem Baue verwenden kann. Man darf jedoch daraus, dass etwas Eigenschaft eines Begriffes ist, nicht allgemein schliessen, dass es aus dem Begriffe, d. h. aus dessen Merkmalen nicht gefolgert werden könne.	In this respect existence resembles number. Affirmation of existence is, after all, nothing other than denial of the number zero. Because existence is a property of the concept, the ontological proof of the existence of God fails to reach its goal. But uniqueness is no more a characteristic mark of the concept "God" than existence is. Uniqueness cannot be used in defining this concept, just as one cannot use the solidity, roominess and comfort of a house in building it, along with the stones, mortar and beams. However, one may not conclude in general, from the fact that something is a property of a concept, that it cannot be inferred from the concept, i.e. from its characteristic marks.[41]
	Unter Umständen ist dies möglich, wie man aus der Art der Bausteine zuweilen einen Schluss auf die Dauerhaftigkeit eines Gebäudes machen kann. Daher wäre es zuviel behauptet, dass niemals aus den Merkmalen eines Begriffes auf die Einzigkeit oder Existenz geschlossen werden könne; nur kann dies nie so unmittelbar geschehen, wie man das Merkmal eines Begriffes einem unter ihn fallenden Gegenstande als Eigenschaft beilegt.	Under certain circumstances this is possible, just as one can sometimes draw a conclusion about the durability of a building from the kind of stones it is built with. It would therefore be claiming too much to say that one can never infer uniqueness or existence from the characteristic marks of a concept; it is only that this can never happen as directly as when one ascribes a characteristic mark of a concept, as a property, to an object falling under it.
53.3	Es wäre auch falsch zu leugnen, dass Existenz und Einzigkeit jemals Merkmale von Begriffen sein könnten. Sie sind nur nicht Merkmale *der* Begriffe, denen man sie der Sprache folgend zuschreiben möchte. Wenn man z. B. alle Begriffe, unter welche nur Ein Gegenstand fällt, unter einen Begriff sammelt, so ist die Einzigkeit Merkmal dieses Begriffes. Unter ihn würde z. B. der Begriff »Erdmond,« aber nicht der sogenannte Himmelskörper fallen. So kann man einen Begriff unter einen höhern, so zu sagen einen Begriff zweiter Ordnung fallen lassen. Dies Verhältniss ist aber nicht mit dem der Unterordnung zu verwechseln.	It would also be wrong to deny that existence and uniqueness could ever be characteristic marks of concepts. They are just not characteristic marks of *those* concepts to which, following language, one would like to attribute them. If, for example, we gather all concepts under which only one object falls under a single concept, then uniqueness is a characteristic mark of this concept. Under it would fall, for example, the concept "moon of the earth", but not the so-called heavenly body itself. In this way we can let a concept fall under a higher concept—a concept of second order, so to speak. But this relation is not to be confused with that of subordination.
54.1	Jetzt wird es möglich sein, die Einheit befriedigend zu erklären. *E. Schröder* sagt auf S. 7 seines genannten Lehrbuches: »Jener Gattungsname oder Begriff wird die Benennung der auf die angegebene Weise gebildeten Zahl genannt und macht das Wesen ihrer Einheit aus.«	Now it will be possible to give a satisfactory account of the unit. *E. Schröder* says on p. 7 of the textbook mentioned: "That generic name or concept is called the denomination of the number formed in the way indicated, and constitutes the essence of its unit."
54.2	In der That, wäre es nicht am passendsten, einen Begriff Einheit zu nennen in Bezug auf die Anzahl, welche ihm	Indeed, would it not be most fitting to call a concept a unit with respect to the Number that be-

	GERMAN	ENGLISH
	zukommt? Wir können dann den Aussagen über die Einheit, dass sie von der Umgebung abgesondert und untheilbar sei, einen Sinn abgewinnen. Denn der Begriff, dem die Zahl beigelegt wird, grenzt im Allgemeinen das unter ihn Fallende in bestimmter Weise ab. Der Begriff »Buchstabe des Wortes Zahl« grenzt das Z gegen das a, dieses gegen das h u. s. w. ab. Der Begriff »Silbe des Wortes Zahl« hebt das Wort als ein Ganzes und in dem Sinne Untheilbares heraus, dass die Theile nicht mehr unter den Begriff »Silbe des Wortes Zahl« fallen. Nicht alle Begriffe sind so beschaffen. Wir können z. B.	longs to it? We can then make sense of the assertions about the unit, that it is separated from its surroundings and indivisible. For the concept to which number is ascribed in general delimits what falls under it in a definite way. The concept "letter of the word Zahl" delimits the Z from the a, the a from the h, and so on. The concept "syllable of the word Zahl" picks out the word as a whole, and as indivisible in the sense that its parts no longer fall under the concept "syllable of the word Zahl". Not all concepts are like this. We can, for example,[42]
	das unter den Begriff des Rothen Fallende in mannigfacher Weise zertheilen, ohne dass die Theile aufhören, unter ihn zu fallen. Einem solchen Begriffe kommt keine endliche Zahl zu. Der Satz von der Abgegrenztheit und Untheilbarkeit der Einheit lässt sich demnach so aussprechen:	divide what falls under the concept of red in all sorts of ways without the parts ceasing to fall under it. No finite number belongs to such a concept. The proposition that the unit is delimited and indivisible can accordingly be stated as follows:
54.3	Einheit in Bezug auf eine endliche Anzahl kann nur ein solcher Begriff sein, der das unter ihn Fallende bestimmt abgrenzt und keine beliebige Zertheilung gestattet.	Only a concept that delimits what falls under it in a definite way, and does not permit any arbitrary division of it, can be a unit with respect to a finite Number.
54.4	Man sieht aber, dass Untheilbarkeit hier eine besondere Bedeutung hat.	We can see, though, that indivisibility has a special meaning here.
54.5	Nun beantworten wir leicht die Frage, wie die Gleichheit mit der Unterscheidbarkeit der Einheiten zu versöhnen sei. Das Wort »Einheit« ist hier in doppeltem Sinne gebraucht. Gleich sind die Einheiten in der oben erklärten Bedeutung dieses Worts. In dem Satze: »Jupiter hat vier Monde« ist die Einheit »Jupitersmond«. Unter diesen Begriff fällt sowohl I als auch II, als auch III, als auch IV. Daher kann man sagen: die Einheit, auf die I bezogen wird, ist gleich der Einheit, auf die II bezogen wird u. s. f. Da haben wir die Gleichheit. Wenn man aber die Unterscheidbarkeit der Einheiten behauptet, so versteht man darunter die der gezählten Dinge.	Now we can easily answer the question of how the identity of the units is to be reconciled with their distinguishability. The word "unit" is used here in a double sense. The units are identical in the meaning of the word explained above. In the proposition "Jupiter has four moons" the unit is "moon of Jupiter". Under this concept falls I, and also II, and also III, and also IV. Hence we can say: the unit to which I is related is identical with the unit to which II is related, and so on. There we have identity. But when we assert the distinguishability of the units, we mean by this the distinguishability of the things counted.

41 The ontological proof, associated with Anselm and Descartes, argues that God's existence follows from the very concept of God.
42 *Zahl* is German for "number"; the example turns on its four letters and its single syllable.

IV. The Concept of Number

Der Begriff der Anzahl
Every individual number is a self-subsistent object; the sense of a numerical identity; the definition of number by one-to-one correlation; zero, one and the successor; infinite numbers.

JEDE EINZELNE ZAHL IST EIN SELBSTÄNDIGER GEGENSTAND.

	GERMAN	ENGLISH
55.1	Nachdem wir erkannt haben, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthält, können wir versuchen, die leibnizischen Definitionen der einzelnen Zahlen durch die der 0 und der 1 zu ergänzen.	Now that we have recognized that a statement of number contains an assertion about a concept, we can try to complete the Leibnizian definitions of the individual numbers with definitions of 0 and 1.
55.2	Es liegt nahe zu erklären: einem Begriffe kommt die Zahl 0 zu, wenn kein Gegenstand unter ihn fällt. Aber hier scheint an die Stelle der 0 das gleichbedeutende »kein« getreten zu sein; deshalb ist folgender Wortlaut vorzuziehen: einem Begriffe kommt die Zahl 0 zu, wenn allgemein, was auch a sei, der Satz gilt, dass a nicht unter diesen Begriff falle.	It is tempting to define: the number 0 belongs to a concept if no object falls under it. But here the equivalent "no" seems to have taken the place of 0; so the following wording is preferable: the number 0 belongs to a concept if, in general, whatever a may be, the proposition holds that a does not fall under this concept.
55.3	In ähnlicher Weise könnte man sagen: einem Begriffe F kommt die Zahl 1 zu, wenn nicht allgemein, was auch a sei, der Satz gilt, dass a nicht unter F falle, und wenn aus den Sätzen »a fällt unter F« und »b fällt unter F« allgemein folgt, dass a und b dasselbe sind.	In a similar way we could say: the number 1 belongs to a concept F if it is not the case that, in general, whatever a may be, the proposition holds that a does not fall under F; and if from the propositions "a falls under F" and "b falls under F" it follows in general that a and b are the same.
55.4	Es bleibt noch übrig, den Uebergang von einer Zahl zur nächstfolgenden allgemein zu erklären. Wir versuchen folgenden Wortlaut: dem Begriffe F kommt die Zahl (n + 1) zu, wenn es einen Gegenstand a giebt, der unter F fällt und so beschaffen ist, dass dem Begriffe »unter F fallend, aber nicht a« die Zahl n zukommt.	It remains to define, in general, the step from one number to the next. We try the following wording: the number (n + 1) belongs to the concept F if there is an object a that falls under F and is such that the number n belongs to the concept "falling under F, but not a".
56.1	Diese Erklärungen bieten sich nach unsern bisherigen Ergebnissen so ungezwungen dar, dass es einer Darlegung bedarf, warum sie uns nicht genügen können.	These definitions offer themselves so naturally, given our results so far, that it needs explaining why they cannot satisfy us.
56.2	Am ehesten wird die letzte Definition Bedenken erregen; denn genau genommen ist uns der Sinn des Ausdruckes »dem Begriffe G kommt die Zahl n zu« ebenso unbekannt wie der des Ausdruckes »dem Begriffe F kommt die Zahl (n + 1) zu.« Zwar können wir mittels dieser und der vorletzten Erklärung sagen, was es bedeute »dem Begriffe F kommt die Zahl 1 + 1 zu,« und dann, indem wir dies benutzen, den Sinn des Ausdruckes »dem Begriffe F	The last definition is the most likely to raise doubts. For, strictly speaking, the sense of the expression "the number n belongs to the concept G" is just as unknown to us as that of the expression "the number (n + 1) belongs to the concept F". True, by means of this definition and the one before it we can say what "the number 1 + 1 belongs to the concept F" means, and then, using that,

GERMAN

kommt die Zahl 1 + 1 + 1 zu« angeben u. s. w.; aber wir können – um ein krasses Beispiel zu geben – durch unsere Definitionen nie entscheiden, ob einem Begriffe die Zahl *Julius Caesar* zukomme, ob dieser bekannte Eroberer Galliens eine Zahl ist oder nicht.

Wir können ferner mit Hilfe unserer Erklärungsversuche nicht beweisen, dass a = b sein muss, wenn dem Begriffe F die Zahl a zukommt, und wenn demselben die Zahl b zukommt. Der Ausdruck »*die* Zahl, welche dem Begriffe F zukommt« wäre also nicht zu rechtfertigen und dadurch würde es überhaupt unmöglich, eine Zahlengleichheit zu beweisen, weil wir gar nicht eine bestimmte Zahl fassen könnten. Es ist nur Schein, dass wir die 0, die 1 erklärt haben; in Wahrheit haben wir nur den Sinn der Redensarten »die Zahl 0 kommt zu,« »die Zahl 1 kommt zu« festgestellt; aber es ist nicht erlaubt, hierin die 0, die 1 als selbständige, wiedererkennbare Gegenstände zu unterscheiden.

ENGLISH

state the sense of the expression "the number 1 + 1 + 1 belongs to the concept F", and so on. But we can never—to take a glaring example—decide by means of our definitions whether the number *Julius Caesar* belongs to a concept, or whether that well-known conqueror of Gaul is a number or not.

Further, with the help of our attempted definitions we cannot prove that a = b must hold if the number a belongs to the concept F and the number b also belongs to it. The expression "*the* number that belongs to the concept F" would therefore not be justified, and this would make it impossible to prove any identity of numbers at all, since we could not grasp a determinate number in the first place. It is only an appearance that we have defined 0 and 1. In truth we have only fixed the sense of the phrases "the number 0 belongs to" and "the number 1 belongs to"; but this does not allow us to pick out 0 and 1 here as self-subsistent objects that can be recognized again.

NUMBERS AS OBJECTS

Number words are treated as proper names, and numbers as objects that cannot be pictured.

GERMAN

57.1 Es ist hier der Ort, unsern Ausdruck, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthalte, etwas genauer ins Auge zu fassen. In dem Satze »dem Begriffe F kommt die Zahl 0 zu« ist 0 nur ein Theil des Praedicates, wenn wir als sachliches Subject den Begriff F betrachten. Deshalb habe ich es vermieden, eine Zahl wie 0, 1, 2 *Eigenschaft* eines Begriffes zu nennen. Die einzelne Zahl erscheint eben dadurch, dass sie nur einen Theil der Aussage bildet, als selbständiger Gegenstand. Ich habe schon oben darauf aufmerksam gemacht, dass man »die 1« sagt und durch den bestimmten Artikel 1 als Gegenstand hinstellt. Diese Selbständigkeit zeigt sich überall in der Arithmetik, z. B. in der Gleichung 1 + 1 = 2.

Da es uns hier darauf ankommt, den Zahlbegriff so zu fassen, wie er für die Wissenschaft brauchbar ist, so darf es uns nicht stören, dass im Sprachgebrauche des Lebens die Zahl auch attributiv erscheint. Dies lässt sich immer vermeiden. Z. B. kann man den Satz »Jupiter hat vier Monde« umsetzen in »die Zahl der Jupitersmonde ist vier«. Hier darf das »ist« nicht als blosse Copula betrachtet werden, wie in dem Satze »der Himmel ist blau«. Das zeigt sich darin, dass man sagen kann: »die

ENGLISH

This is the place to look somewhat more closely at our way of putting it, that a statement of number contains an assertion about a concept. In the proposition "the number 0 belongs to the concept F", 0 is only part of the predicate, if we regard the concept F as the real subject. That is why I have avoided calling a number such as 0, 1 or 2 a *property* of a concept. It is precisely because the individual number forms only part of the assertion that it appears as a self-subsistent object. I have already drawn attention above to the fact that we say "the 1" (German *die 1*), and with the definite article present 1 as an object. This self-subsistence shows itself everywhere in arithmetic, e.g. in the equation 1 + 1 = 2.

Since what matters to us here is to grasp the concept of number in the form in which it is usable for science, we must not be put off by the fact that in everyday usage number also appears as an attribute. This can always be avoided. For example, the proposition "Jupiter has four moons" can be recast as "the number of Jupiter's moons is four". Here the "is" must not be regarded as a mere copula, as in the proposition "the sky is blue". This

GERMAN

Zahl der Jupitersmonde ist die vier« oder »ist die Zahl 4«. Hier hat »ist« den Sinn von »ist gleich,« »ist dasselbe wie«.

Wir haben also eine Gleichung, die behauptet, dass der Ausdruck »die Zahl der Jupitersmonde« denselben Gegenstand bezeichne wie das Wort »vier.« Und die Form der Gleichung ist die herrschende in der Arithmetik. Gegen diese Auffassung streitet nicht, dass in dem Worte »vier« nichts von Jupiter oder von Mond enthalten ist. Auch in dem Namen »Columbus« liegt nichts von Entdecken oder von Amerika und dennoch wird derselbe Mann Columbus und der Entdecker Amerikas genannt.

58.1 Man könnte einwenden, dass wir uns von dem Gegenstande, den wir Vier oder die Anzahl der Jupitersmonde nennen, als von etwas Selbständigem durchaus keine Vorstellung[1] machen können. Aber die Selbständigkeit, die wir der Zahl gegeben haben, ist nicht Schuld daran. Zwar glaubt man leicht, dass in der Vorstellung von vier Augen eines Würfels etwas vorkomme, was dem Worte »vier« entspräche; aber das ist Täuschung. Man denke an eine grüne Wiese und versuche, ob sich die Vorstellung ändert, wenn man den unbestimmten Artikel durch das Zahlwort »Ein« ersetzt. Es kommt nichts hinzu, während doch dem Worte »grün« etwas in der Vorstellung entspricht. Wenn man sich das gedruckte Wort »Gold« vorstellt, wird man zunächst an keine Zahl dabei denken.

Fragt man sich nun, aus wieviel Buchstaben es bestehe, so ergiebt sich die Zahl 4; aber die Vorstellung wird dadurch nicht etwa bestimmter, sondern kann ganz unverändert bleiben. Der hinzutretende Begriff »Buchstabe des Wortes Gold« ist eben das, woran wir die Zahl entdecken. Bei den vier Augen eines Würfels ist die Sache etwas versteckter, weil der Begriff sich uns durch die Aehnlichkeit der Augen so unmittelbar aufdrängt, dass wir sein Dazwischentreten kaum bemerken. Die Zahl kann weder als selbständiger Gegenstand noch als Eigenschaft an einem äussern Dinge vorgestellt werden, weil sie weder etwas Sinnliches noch Eigenschaft eines äussern Dinges ist. Am deutlichsten ist die Sache wohl bei der Zahl 0. Man wird vergebens versuchen, sich 0 sichtbare Sterne vorzustellen.

Zwar kann man sich den Himmel ganz mit Wolken überzogen denken; aber hierin ist nichts, was dem Worte »Stern« oder der 0 entspräche. Man stellt sich nur eine Sachlage vor, die zu dem Urtheile veranlassen kann: es ist jetzt kein Stern zu sehen.

ENGLISH

is shown by the fact that we can say “the number of Jupiter’s moons is the four” or “is the number 4”. Here “is” has the sense of “is identical with”, “is the same as”.

So we have an equation asserting that the expression “the number of Jupiter’s moons” designates the same object as the word “four”. And the form of the equation is the dominant one in arithmetic. It is no objection to this view that the word “four” contains nothing about Jupiter or about moons. Nor is there anything about discovering or about America in the name “Columbus”, and yet the same man is called Columbus and the discoverer of America.

It might be objected that we can form no idea[1] whatever of the object we call four, or the Number of Jupiter’s moons, as something self-subsistent. But it is not the self-subsistence we have given to number that is to blame for this. True, it is easy to believe that in the idea of the four pips on a die there is something corresponding to the word “four”; but that is an illusion. Think of a green meadow, and see whether the idea changes if you replace the indefinite article by the number word “one”. Nothing is added, whereas something in the idea does correspond to the word “green”. If you picture the printed word “gold”, you will not at first think of any number.

If you now ask yourself how many letters it consists of, the number 4 results; but the idea does not thereby become any more determinate—it can remain completely unchanged. The added concept “letter of the word gold” is precisely that in which we discover the number. With the four pips on a die the matter is somewhat more hidden, because the similarity of the pips forces the concept on us so immediately that we hardly notice it stepping in. Number can be pictured neither as a self-subsistent object nor as a property in an external thing, because it is neither something perceptible by the senses nor a property of an external thing. The matter is perhaps clearest with the number 0. You will try in vain to picture 0 visible stars.

You can, to be sure, think of the sky as completely covered with clouds; but there is nothing in this that corresponds to the word “star” or to 0. You are only picturing a situation that can prompt the judgment: no star can be seen now.

GERMAN

ENGLISH

1

59.1 Jedes Wort erweckt vielleicht irgendeine Vorstellung in uns, sogar ein solches wie »nur«; aber sie braucht nicht dem Inhalte des Wortes zu entsprechen; sie kann in andern Menschen eine ganz andere sein. Man wird sich dann wohl eine Sachlage vorstellen, die zu einem Satze auffordert, in welchem das Wort vorkommt; oder es ruft etwa das gesprochene Wort das geschriebene ins Gedächtniss zurück.

Every word perhaps calls up some idea in us, even a word like “only”; but the idea need not correspond to the content of the word, and in other people it may be quite different. One will then perhaps picture a situation that invites a sentence in which the word occurs; or the spoken word may call the written word to mind.

59.2 Dies findet nicht nur bei Partikeln statt. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass wir keine Vorstellung unserer Entfernung von der Sonne haben. Denn, wenn wir auch die Regel kennen, wie oft wir einen Maasstab vervielfältigen müssen, so misslingt doch jeder Versuch, nach dieser Regel uns ein Bild zu entwerfen, das auch nur einigermaassen dem Gewollten nahe kommt. Das ist aber kein Grund, die Richtigkeit der Rechnung zu bezweifeln, durch welche die Entfernung gefunden ist, und hindert uns in keiner Weise, weitere Schlüsse auf das Bestehen dieser Entfernung zu gründen.

This happens not only with particles. There is surely no doubt that we have no idea of our distance from the sun. For even if we know the rule for how many times we must lay off a measuring rod, every attempt to sketch, by this rule, a picture that comes even roughly close to what is intended fails. But that is no reason to doubt the correctness of the calculation by which the distance was found, and it in no way prevents us from basing further inferences on the fact of this distance.

60.1 Selbst ein so concretes Ding wie die Erde können wir uns nicht so vorstellen, wie wir erkannt haben, dass es ist; sondern wir begnügen uns mit einer Kugel von mässiger Grösse, die uns als Zeichen für die Erde gilt; aber wir wissen, dass diese sehr davon verschieden ist. Obwohl nun unsere Vorstellung das Gewollte oft gar nicht trifft, so urtheilen wir doch mit grosser Sicherheit über einen Gegenstand wie die Erde auch da, wo die Grösse in Betracht kommt.

Even so concrete a thing as the earth we cannot picture as we have come to know it to be; instead we make do with a ball of moderate size that serves us as a sign for the earth, though we know that this is very different from it. Now although our idea often entirely misses what is intended, we still judge with great certainty about an object such as the earth, even where size comes into question.

60.2 Wir werden durch das Denken gar oft über das Vorstellbare hinausgeführt, ohne damit die Unterlage für unsere Schlüsse zu verlieren. Wenn auch, wie es scheint, uns Menschen Denken ohne Vorstellungen unmöglich ist, so kann doch deren Zusammenhang mit dem Gedachten ganz äusserlich, willkührlich und conventionell sein.

Thinking very often carries us beyond what can be pictured, without our thereby losing the basis for our inferences. Even if, as it seems, thinking without ideas is impossible for us humans, the connection of these ideas with what is thought can still be entirely external, arbitrary and conventional.

60.3 Es ist also die Unvorstellbarkeit des Inhaltes eines Wortes kein Grund, ihm jede Bedeutung abzusprechen oder es vom Gebrauche auszuschliessen. Der Schein des Gegentheils entsteht wohl dadurch, dass wir die Wörter vereinzelt betrachten und nach ihrer Bedeutung fragen, für welche wir dann eine Vorstellung nehmen. So scheint ein Wort keinen Inhalt zu haben, für welches uns ein entsprechendes inneres Bild fehlt. Man muss aber immer

So the fact that the content of a word cannot be pictured is no reason to deny it any meaning or to exclude it from use. The appearance to the contrary probably arises because we consider words in isolation and ask for their meaning, which we then take to be an idea. A word for which we lack a corresponding inner picture thus seems to have no content. But we must always keep a complete

1

[1] »Vorstellung« in dem Sinne von etwas Bildartigem genommen.

[1] “Idea” (*Vorstellung*) taken in the sense of something image-like.

	GERMAN	ENGLISH
	einen vollständigen Satz ins Auge fassen. Nur in ihm haben die Wörter eigentlich eine Bedeutung. Die innern Bilder, die uns dabei etwa vorschweben, brauchen nicht den logischen Bestandtheilen des Urtheils zu entsprechen. Es genügt, wenn der Satz als Ganzes einen Sinn hat; dadurch erhalten auch seine Theile ihren Inhalt.	sentence in view. Only in a sentence do words really have a meaning. The inner pictures that may float before us need not correspond to the logical components of the judgment. It is enough if the sentence as a whole has a sense; it is through this that its parts, too, receive their content.
60.4	Diese Bemerkung scheint mir geeignet, auf manche schwierige Begriffe wie den des Unendlichkleinen[1] ein Licht zu werfen, und ihre Tragweite beschränkt sich wohl nicht auf die Mathematik.	This remark seems to me fitted to throw light on many difficult concepts, such as that of the infinitesimal[1], and its scope is probably not limited to mathematics.
2		
60.5	Die Selbständigkeit, die ich für die Zahl in Anspruch nehme, soll nicht bedeuten, dass ein Zahlwort ausser dem Zusammenhange eines Satzes etwas bezeichne, sondern ich will damit nur dessen Gebrauch als Praedicat oder Attribut ausschliessen, wodurch seine Bedeutung etwas verändert wird.	The self-subsistence I claim for number is not meant to imply that a number word designates something outside the context of a sentence; I mean by it only to exclude its use as a predicate or attribute, which somewhat alters its meaning.
61.1	Aber, wendet man vielleicht ein, mag auch die Erde eigentlich unvorstellbar sein, so ist sie doch ein äusseres Ding, das einen bestimmten Ort hat; aber wo ist die Zahl 4? sie ist weder ausser uns noch in uns. Das ist in räumlichem Sinne verstanden richtig. Eine Ortsbestimmung der Zahl 4 hat keinen Sinn; aber daraus folgt nur, dass sie kein räumlicher Gegenstand ist, nicht, dass sie überhaupt keiner ist. Nicht jeder Gegenstand ist irgendwo. Auch unsere Vorstellungen[1] sind in diesem Sinne nicht in uns (subcutan). Da sind Ganglienzellen, Blutkörperchen und dergl., aber keine Vorstellungen. Räumliche Praedicate sind auf sie nicht anwendbar: die eine ist weder rechts noch links von der andern; Vorstellungen haben keine in Millimetern angebbaren Entfernungen von einander.	But, it may be objected, even if the earth cannot really be pictured, it is still an external thing with a definite place; but where is the number 4? It is neither outside us nor inside us. Understood in a spatial sense, that is correct. To assign a location to the number 4 makes no sense; but all that follows is that it is not a spatial object, not that it is no object at all. Not every object is somewhere. Our ideas[1], too, are not inside us in this sense (under the skin). There are ganglion cells, blood corpuscles and the like in there, but no ideas. Spatial predicates do not apply to them: one idea is neither to the right nor to the left of another; ideas are not at distances from one another that could be stated in millimeters.
	Wenn wir sie dennoch in uns nennen, so wollen wir sie damit als subjectiv bezeichnen.	If we nonetheless say they are inside us, what we mean is that they are subjective.
3		
61.2	Aber wenn auch das Subjective keinen Ort hat, wie ist es möglich, dass die objective Zahl 4 nirgendwo sei? Nun ich behaupte, dass darin gar kein Widerspruch liegt. Sie ist in der That genau dieselbe für jeden, der sich mit ihr	But even if what is subjective has no place, how is it possible for the objective number 4 to be nowhere? Well, I maintain that there is no contradiction in this whatever. It is in fact exactly the

2

[1] Es kommt darauf an, den Sinn einer Gleichung wie df(x) = g(x) dx zu definiren, nicht aber darauf, eine von zwei verschiedenen Punkten begrenzte Strecke aufzuweisen, deren Länge dx wäre.

[1] What matters is to define the sense of an equation such as df(x) = g(x) dx, not to exhibit a segment bounded by two distinct points whose length would be dx.

3

[1] Dies Wort rein psychologisch, nicht psychophysisch verstanden.

[1] The word understood purely psychologically, not psychophysically.

GERMAN	ENGLISH
beschäftigt; aber dies hat mit Räumlichkeit nichts zu schaffen. Nicht jeder objective Gegenstand hat einen Ort.	same for everyone who concerns himself with it; but that has nothing to do with being in space. Not every objective object has a place.

6 Georg Cantor (1845–1918), mathematician and founder of set theory.

THE SENSE OF A NUMERICAL IDENTITY

Words mean something only in the context of a sentence; Number is to be fixed through identity statements.

GERMAN

62.1 Wie soll uns denn eine Zahl gegeben sein, wenn wir keine Vorstellung oder Anschauung von ihr haben können? Nur im Zusammenhange eines Satzes bedeuten die Wörter etwas. Es wird also darauf ankommen, den Sinn eines Satzes zu erklären, in dem ein Zahlwort vorkommt. Das giebt zunächst noch viel der Willkühr anheim. Aber wir haben schon festgestellt, dass unter den Zahlwörtern selbständige Gegenstände zu verstehen sind. Damit ist uns eine Gattung von Sätzen gegeben, die einen Sinn haben müssen, der Sätze, welche ein Wiedererkennen ausdrücken. Wenn uns das Zeichen a einen Gegenstand bezeichnen soll, so müssen wir ein Kennzeichen haben, welches überall entscheidet, ob b dasselbe sei wie a, wenn es auch nicht immer in unserer Macht steht, dies Kennzeichen anzuwenden.

In unserm Falle müssen wir den Sinn des Satzes »die Zahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist dieselbe, welche dem Begriffe G zukommt« erklären; d. h. wir müssen den Inhalt dieses Satzes in anderer Weise wiedergeben, ohne den Ausdruck »die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt« zu gebrauchen. Damit geben wir ein allgemeines Kennzeichen für die Gleichheit von Zahlen an. Nachdem wir so ein Mittel erlangt haben, eine bestimmte Zahl zu fassen und als dieselbe wiederzuerkennen, können wir ihr ein Zahlwort zum Eigennamen geben.

63.1 Ein solches Mittel nennt schon *Hume*[1]: »Wenn zwei Zahlen so combinirt werden, dass die eine immer eine Einheit hat, die jeder Einheit der andern entspricht, so geben wir sie als gleich an.« Es scheint in neuerer Zeit die Meinung unter den Mathematikern[2] vielfach Anklang gefunden zu haben, dass die Gleichheit der Zahlen mittels der eindeutigen Zuordnung definirt werden müsse. Aber es erheben sich zunächst logische Bedenken und Schwierigkeiten, an denen wir nicht ohne Prüfung vorbeigehen dürfen.

57

ENGLISH

How, then, is a number to be given to us, if we cannot have any idea or intuition of it? Only in the context of a sentence do words mean something. So it will be a matter of defining the sense of a sentence in which a number word occurs. At first this still leaves a great deal to arbitrary choice. But we have already established that number words are to be understood as standing for self-subsistent objects. This gives us a class of sentences that must have a sense: sentences that express a recognition. If the sign a is to designate an object for us, we must have a criterion that decides in every case whether b is the same as a, even if it is not always in our power to apply this criterion.

In our case we must define the sense of the sentence "the number that belongs to the concept F is the same as the number that belongs to the concept G"; that is, we must render the content of this sentence in another way, without using the expression "the Number that belongs to the concept F". In doing so we give a general criterion for the identity of numbers. Once we have acquired in this way a means of grasping a determinate number and recognizing it as the same, we can give it a number word as its proper name.

Hume[1] already names such a means: "When two numbers are so combined that the one always has a unit corresponding to every unit of the other, we declare them equal." In recent times the view seems to have found wide favor among mathematicians[2] that the identity of numbers must be defined by means of one-to-one correlation. But logical doubts and difficulties arise first, and we must not pass them by without examination.[4]

4 David Hume (1711–1776); the passage is from *A Treatise of Human Nature*, Book I, Part III, Section 1.

5

[1] Baumann a. a. O. Bd. II. S. 565.

[1] Baumann, op. cit., vol. II, p. 565.

7

[2] Vergl. E. Schröder a. a. O. S. 7 und 8. E. Kossak, die Elemente der Arithmetik, Programm des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums. Berlin, 1872. S. 16. G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Leipzig, 1883.

[2] Cf. E. Schröder, op. cit., pp. 7 and 8; E. Kossak, *Die Elemente der Arithmetik* [The Elements of Arithmetic], program of the Friedrichs-Werder Gymnasium, Berlin, 1872, p. 16; G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* [Foundations of a General Theory of Manifolds], Leipzig, 1883.[6]

GERMAN

63.2 Das Verhältniss der Gleichheit kommt nicht nur bei Zahlen vor. Daraus scheint zu folgen, dass es nicht für diesen Fall besonders erklärt werden darf. Man sollte denken, dass der Begriff der Gleichheit schon vorher feststände, und dass dann aus ihm und dem Begriffe der Anzahl sich ergeben müsste, wann Anzahlen einander gleich wären, ohne dass es dazu noch einer besondern Definition bedürfte.

63.3 Hiergegen ist zu bemerken, dass für uns der Begriff der Anzahl noch nicht feststeht, sondern erst mittels unserer Erklärung bestimmt werden soll. Unsere Absicht ist, den Inhalt eines Urtheils zu bilden, der sich so als eine Gleichung auffassen lässt, dass jede Seite dieser Gleichung eine Zahl ist. Wir wollen also nicht die Gleichheit eigens für diesen Fall erklären, sondern mittels des schon bekannten Begriffes der Gleichheit, das gewinnen, was als gleich zu betrachten ist. Das scheint freilich eine sehr ungewöhnliche Art der Definition zu sein, welche wohl von den Logikern noch nicht genügend beachtet ist; dass sie aber nicht unerhört ist, mögen einige Beispiele zeigen.

64.1 Das Urtheil: »die Gerade a ist parallel der Gerade b,« in Zeichen: a || b, kann als Gleichung aufgefasst werden. Wenn wir dies thun, erhalten wir den Begriff der Richtung und sagen: »die Richtung der Gerade a ist gleich der Richtung der Gerade b«. Wir ersetzen also das Zeichen || durch das allgemeinere =, indem wir den besondern Inhalt des ersteren an a und b vertheilen. Wir zerspalten den Inhalt in anderer als der ursprünglichen Weise und gewinnen dadurch einen neuen Begriff. Oft fasst man freilich die Sache umgekehrt auf, und manche Lehrer definiren: parallele Geraden sind solche von gleicher Richtung.

Der Satz: »wenn zwei Geraden einer dritten parallel sind, so sind sie einander parallel« lässt sich dann mit Berufung auf den ähnlich lautenden Gleichheitssatz sehr bequem beweisen. Nur schade, dass der wahre Sachverhalt damit auf den Kopf gestellt wird! Denn alles Geometrische muss doch wohl ursprünglich anschaulich sein. Nun frage ich, ob jemand eine Anschauung von der Richtung einer Gerade hat. Von der Gerade wohl! aber unterscheidet man in der Anschauung von dieser Gerade noch ihre Richtung? Schwerlich! Dieser Begriff wird erst durch eine an die Anschauung anknüpfende geistige Thätigkeit gefunden. Dagegen hat man eine Vorstellung von parallelen Geraden.

ENGLISH

The relation of identity does not occur only with numbers. From this it seems to follow that it must not be defined specially for this case. One would think that the concept of identity was already settled beforehand, and that from it, together with the concept of Number, it would then have to follow when Numbers are identical with one another, without any further special definition being needed.

Against this it must be pointed out that for us the concept of Number is not yet settled, but is first to be determined by means of our definition. Our aim is to construct the content of a judgment that can be taken as an equation in such a way that each side of the equation is a number. So we do not mean to define identity specially for this case, but to use the already familiar concept of identity to obtain what is to be regarded as identical. This does seem, admittedly, a very unusual kind of definition, one that logicians have probably not yet given enough attention to; but a few examples may show that it is not unheard of.

The judgment “the line a is parallel to the line b”, in symbols a || b, can be taken as an equation. If we do this, we obtain the concept of direction and say: “the direction of the line a is identical with the direction of the line b”. So we replace the sign || by the more general =, distributing the particular content of the former between a and b. We split up the content in a way different from the original one, and thereby obtain a new concept. Often, admittedly, the matter is taken the other way round, and many teachers define: parallel lines are lines with the same direction.

The proposition “if two lines are parallel to a third, they are parallel to each other” can then be proved very conveniently by appeal to the similarly worded proposition about identity. Only it is a pity that this turns the true state of affairs on its head! For everything geometrical must surely be originally intuitive. Now I ask whether anyone has an intuition of the direction of a line. Of the line, certainly! But in the intuition of this line, does one also distinguish its direction? Hardly! This concept is found only through a mental activity that takes intuition as its starting point. On the other hand, we do have an idea of parallel lines.

	GERMAN	ENGLISH
	Jener Beweis kommt nur durch eine Erschleichung zu Stande, indem man durch den Gebrauch des Wortes »Richtung« das zu Beweisende voraussetzt; denn wäre der Satz: »wenn zwei Geraden einer dritten parallel sind, so sind sie einander parallel« unrichtig, so könnte man a ‖ b nicht in eine Gleichung verwandeln.	That proof works only by sleight of hand, presupposing what is to be proved through the use of the word "direction"; for if the proposition "if two lines are parallel to a third, they are parallel to each other" were incorrect, a ‖ b could not be turned into an equation.
64.2	So kann man aus dem Parallelismus von Ebenen einen Begriff erhalten, der dem der Richtung bei Geraden entspricht. Ich habe dafür den Namen »Stellung« gelesen. Aus der geometrischen Aehnlichkeit geht der Begriff der Gestalt hervor, so dass man z. B. statt »die beiden Dreiecke sind ähnlich« sagt: »die beiden Dreiecke haben gleiche Gestalt« oder »die Gestalt des einen Dreiecks ist gleich der Gestalt des andern«. So kann man auch aus der collinearen Verwandtschaft geometrischer Gebilde einen Begriff gewinnen, für den ein Name wohl noch fehlt.	In the same way we can obtain from the parallelism of planes a concept corresponding to that of direction for lines. I have seen the name "orientation" used for it. From geometrical similarity there arises the concept of shape, so that, for example, instead of "the two triangles are similar" we say "the two triangles have the same shape" or "the shape of the one triangle is identical with the shape of the other". In the same way we can also obtain, from the collinear relationship between geometrical figures, a concept for which there is probably as yet no name.
65.1	Um nun z. B. vom Parallelismus[1] auf den Begriff der Richtung zu kommen, versuchen wir folgende Definition:	Now, to get from parallelism[1], for example, to the concept of direction, we try the following definition:
8		
65.2	der Satz »die Gerade a ist parallel der Gerade b« sei gleichbedeutend mit »die Richtung der Gerade a ist gleich der Richtung der Gerade b«.	the proposition "the line a is parallel to the line b" is to mean the same as "the direction of the line a is identical with the direction of the line b".
65.3	Diese Erklärung weicht insofern von dem Gewohnten ab, als sie scheinbar die schon bekannte Beziehung der Gleichheit bestimmt, während sie in Wahrheit den Ausdruck »die Richtung der Gerade a« einführen soll, der nur nebensächlich vorkommt. Daraus entspringt ein zweites Bedenken, ob wir nicht durch eine solche Festsetzung in Widersprüche mit den bekannten Gesetzen der Gleichheit verwickelt werden könnten. Welches sind diese? Sie werden als analytische Wahrheiten aus dem Begriffe selbst entwickelt werden können. Nun definirt *Leibniz*[1]: »Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate«. Diese Erklärung eigne ich mir für die Gleichheit an. Ob man wie *Leibniz* »dasselbe« sagt oder »gleich«, ist unerheblich.	This definition departs from the usual in that it seems to determine the already familiar relation of identity, while in truth it is meant to introduce the expression "the direction of the line a", which occurs in it only incidentally. From this springs a second doubt: whether such a stipulation might not entangle us in contradictions with the familiar laws of identity. What are these laws? They can be developed as analytic truths from the concept itself. Now *Leibniz* defines[1]: "Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate" [Those things are the same of which one can be substituted for the other without loss of truth]. I adopt this definition for identity. Whether one says "the same", like *Leibniz*, or "identical", is immaterial.
	»Dasselbe« scheint zwar eine vollkommene Uebereinstimmung, »gleich« nur eine in dieser oder	"The same" does seem to express complete agreement, and "identical" only agreement in this or

8

[1] Um mich bequemer ausdrücken zu können und leichter verstanden zu werden, spreche ich hier vom Parallelismus. Das Wesentliche dieser Erörterungen wird leicht auf den Fall der Zahlengleichheit übertragen werden können.

[1] I speak of parallelism here so as to express myself more conveniently and be more easily understood. The essentials of this discussion can easily be carried over to the case of identity of numbers.

GERMAN

jener Hinsicht auszudrücken; man kann aber eine solche Redeweise annehmen, dass dieser Unterschied wegfällt, indem man z. B. statt »die Strecken sind in der Länge gleich« sagt »die Länge der Strecken ist gleich« oder »dieselbe,« statt »die Flächen sind in der Farbe gleich« »die Farbe der Flächen ist gleich«. Und so haben wir das Wort oben in den Beispielen gebraucht. In der allgemeinen Ersetzbarkeit sind nun in der That alle Gesetze der Gleichheit enthalten.

9

65.4 Um unsern Definitionsversuch der Richtung einer Gerade zu rechtfertigen, müssten wir also zeigen, dass man die Richtung von a überall durch die Richtung von b ersetzen könne, wenn die Gerade a der Gerade b parallel ist. Dies wird dadurch vereinfacht, dass man zunächst von der Richtung einer Gerade keine andere Aussage kennt als die Uebereinstimmung mit der Richtung einer andern Gerade. Wir brauchten also nur die Ersetzbarkeit in einer solchen Gleichheit nachzuweisen oder in Inhalten, welche solche Gleichheiten als Bestandtheile[1] enthalten würden. Alle andern Aussagen von Richtungen müssten erst erklärt werden und für diese Definitionen können wir die Regel aufstellen, dass die Ersetzbarkeit der Richtung einer Gerade durch die einer ihr parallelen gewahrt bleiben muss.

10

66.1 Aber noch ein drittes Bedenken erhebt sich gegen unsern Definitionsversuch. In dem Satze »die Richtung von a ist gleich der Richtung von b« erscheint die Richtung von a als Gegenstand[1] und wir haben in unserer Definition ein Mittel, diesen Gegenstand wiederzuerkennen, wenn er etwa in einer andern Verkleidung etwa als Richtung von b auftreten sollte. Aber dies Mittel reicht nicht für alle Fälle aus. Man kann z. B. danach nicht entscheiden, ob England dasselbe sei wie die Richtung der Erdaxe. Man verzeihe dies unsinnig scheinende Beispiel! Natürlich wird niemand England mit der Richtung der Erdaxe verwechseln; aber dies ist nicht das Verdienst unserer Erklärung.

Diese sagt nichts darüber, ob der Satz »die Richtung von a ist gleich q« zu bejahen oder zu verneinen ist, wenn nicht

ENGLISH

that respect; but we can adopt a way of speaking in which this difference disappears—for example, by saying, instead of "the segments are identical in length", "the length of the segments is identical" or "the same", and instead of "the surfaces are identical in color", "the color of the surfaces is identical". And that is how we used the word in the examples above. Now universal substitutability does in fact contain all the laws of identity.

To justify our attempted definition of the direction of a line, we would therefore have to show that the direction of a can everywhere be replaced by the direction of b, if the line a is parallel to the line b. This is simplified by the fact that, to begin with, we know of no assertion about the direction of a line other than its agreement with the direction of another line. So we would only need to prove substitutability in such an identity, or in contents that would contain such identities as components[1]. All other assertions about directions would first have to be defined, and for these definitions we can lay down the rule that it must remain possible to replace the direction of a line by that of a line parallel to it.

But a third doubt arises about our attempted definition. In the proposition "the direction of a is identical with the direction of b", the direction of a appears as an object[1], and in our definition we have a means of recognizing this object again in case it should happen to appear in some other guise, say as the direction of b. But this means does not suffice for all cases. It does not allow us to decide, for example, whether England is the same as the direction of the earth's axis. Forgive this apparently nonsensical example! Of course no one will confuse England with the direction of the earth's axis; but that is no thanks to our definition.

Our definition says nothing about whether the proposition "the direction of a is identical with q"

9

[1] Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Erdm. S. 94.

[1] Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis [A not inelegant example of proof in abstract matters]. Erdm. p. 94.

10

[1] In einem hypothetischen Urtheile könnte z. B. eine Gleichheit von Richtungen als Bedingung oder Folge vorkommen.

[1] In a hypothetical judgment, for example, an identity of directions could occur as the condition or as the consequence.

GERMAN

q selbst in der Form »die Richtung von b« gegeben ist. Es fehlt uns der Begriff der Richtung; denn hätten wir diesen, so könnten wir festsetzen; wenn q keine Richtung ist, so ist unser Satz zu verneinen; wenn q eine Richtung ist, so entscheidet die frühere Erklärung. Es liegt nun nahe zu erklären: q ist eine Richtung, wenn es eine Gerade b giebt, deren Richtung q ist. Aber nun ist klar, dass wir uns im Kreise gedreht haben.

Um diese Erklärung anwenden zu können, müssen wir schon in jedem Falle wissen, ob der Satz »q ist gleich der Richtung von b« zu bejahen oder zu verneinen wäre.

ENGLISH

is to be affirmed or denied unless q itself is given in the form "the direction of b". What we lack is the concept of direction. If we had it, we could stipulate: if q is not a direction, our proposition is to be denied; if q is a direction, the earlier definition decides. Now it is tempting to define: q is a direction if there is a line b whose direction is q. But then it is clear that we have gone round in a circle.

To be able to apply this definition, we must already know in every case whether the proposition "q is identical with the direction of b" would have to be affirmed or denied.

11

67.1 Wenn man sagen wollte: q ist eine Richtung, wenn es durch die oben ausgesprochene Definition eingeführt ist, so würde man die Weise, wie der Gegenstand q eingeführt ist, als dessen Eigenschaft behandeln, was sie nicht ist. Die Definition eines Gegenstandes sagt als solche eigentlich nichts von ihm aus, sondern setzt die Bedeutung eines Zeichens fest. Nachdem das geschehen ist, verwandelt sie sich in ein Urtheil, das von dem Gegenstande handelt, aber führt ihn nun auch nicht mehr ein und steht mit andern Aussagen von ihm in gleicher Linie.

Man würde, wenn man diesen Ausweg wählte, voraussetzen, dass ein Gegenstand nur auf eine einzige Weise gegeben werden könnte; denn sonst würde daraus, dass q nicht durch unsere Definition eingeführt ist, nicht folgen, dass es nicht so eingeführt werden könnte. Alle Gleichungen würden darauf hinauskommen, dass das als dasselbe anerkannt würde, was uns auf dieselbe Weise gegeben ist. Aber dies ist so selbstverständlich und so unfruchtbar, dass es nicht verlohnte, es auszusprechen. Man könnte in der That keinen Schluss daraus ziehen, der von jeder der Voraussetzungen verschieden wäre. Die vielseitige und bedeutsame Verwendbarkeit der Gleichungen beruht vielmehr darauf, dass man etwas wiedererkennen kann, obwohl es auf verschiedene Weise gegeben ist.

Suppose someone wanted to say: q is a direction if it is introduced by means of the definition stated above. Then they would be treating the way in which the object q is introduced as a property of it, which it is not. The definition of an object, as such, really asserts nothing about it; it lays down the meaning of a sign. Once that has been done, it turns into a judgment that deals with the object. But then it no longer introduces the object, and it stands on the same footing as other statements about it.

If we chose this way out, we would be presupposing that an object can be given in only one single way. Otherwise it would not follow from the fact that q is not introduced by our definition that it could not be introduced in that way. All equations would then come down to this: that what is given to us in the same way is recognized as the same. But this is so self-evident and so unfruitful that it would not be worth stating. Indeed, one could draw no conclusion from it that differed from every one of the premises. Rather, the many-sided and significant applicability of equations rests on the fact that we can recognize something again even though it is given in different ways.

11

[1] Der bestimmte Artikel deutet dies an. Begriff ist für mich ein mögliches Praedicat eines singulären beurtheilbaren Inhalts, Gegenstand ein mögliches Subject eines solchen. Wenn wir in dem Satze »die Richtung der Fernrohraxe ist gleich der Richtung der Erdaxe« die Richtung der Fernrohraxe als Subject ansehen, so ist das Praedicat »gleich der Richtung der Erdaxe«. Dies ist ein Begriff. Aber die Richtung der Erdaxe ist nur ein Theil des Praedicates; sie ist ein Gegenstand, da sie auch zum Subjecte gemacht werden kann.

[1] The definite article indicates this. For me a concept is a possible predicate of a singular judgeable content, and an object is a possible subject of one. If, in the proposition "the direction of the telescope's axis is identical with the direction of the earth's axis", we regard the direction of the telescope's axis as the subject, then the predicate is "identical with the direction of the earth's axis". This is a concept. But the direction of the earth's axis is only part of the predicate; it is an object, since it can also be made the subject.

THE DEFINITION OF NUMBER

Frege defines the Number of a concept as the extension of the concept "equinumerous with" it.

	GERMAN	ENGLISH
68.1	Da wir so keinen scharf begrenzten Begriff der Richtung und aus denselben Gründen keinen solchen der Anzahl gewinnen können, versuchen wir einen andern Weg. Wenn die Gerade a der Gerade b parallel ist, so ist der Umfang des Begriffes »Gerade parallel der Gerade a« gleich dem Umfange des Begriffes »Gerade parallel der Gerade b«; und umgekehrt: wenn die Umfänge der genannten Begriffe gleich sind, so ist a parallel b. Versuchen wir also zu erklären: die Richtung der Gerade a ist der Umfang des Begriffes »parallel der Gerade a«; die Gestalt des Dreiecks d ist der Umfang des Begriffes »ähnlich dem Dreiecke d«!	Since in this way we cannot obtain a sharply delimited concept of direction, nor, for the same reasons, such a concept of Number, let us try another route. If line a is parallel to line b, then the extension of the concept "line parallel to line a" is identical with the extension of the concept "line parallel to line b". Conversely, if the extensions of these concepts are identical, then a is parallel to b. Let us try, then, to define: the direction of line a is the extension of the concept "parallel to line a"; the shape of triangle d is the extension of the concept "similar to triangle d".
68.2	Wenn wir dies auf unsern Fall anwenden wollen, so haben wir an die Stelle der Geraden oder der Dreiecke Begriffe zu setzen und an die Stelle des Parallelismus oder der Aehnlichkeit die Möglichkeit die unter den einen den unter den andern Begriff fallenden Gegenständen beiderseits eindeutig zuzuordnen. Ich will der Kürze wegen den Begriff F dem Begriffe G *gleichzahlig* nennen, wenn diese Möglichkeit vorliegt, muss aber bitten, dies Wort als eine willkührlich gewählte Bezeichnungsweise zu betrachten, deren Bedeutung nicht der sprachlichen Zusammensetzung, sondern dieser Festsetzung zu entnehmen ist.	If we want to apply this to our own case, we must put concepts in place of the lines or triangles. In place of parallelism or similarity we must put the possibility of correlating one-to-one the objects falling under the one concept with those falling under the other. For brevity I shall call the concept F *equinumerous* with the concept G if this possibility obtains. But I must ask that this word be regarded as an arbitrarily chosen notation, whose meaning is to be gathered not from its linguistic composition but from this stipulation.[12]
68.3	Ich definire demnach: die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang[1] des Begriffes »gleichzahlig dem Begriffe F«	Accordingly I define: the Number which belongs to the concept F is the extension[1] of the concept "equinumerous with the concept F".
13		
69.1	Dass diese Erklärung zutreffe, wird zunächst vielleicht wenig einleuchten. Denkt man sich unter dem Umfange eines Begriffes nicht etwas Anderes? Was man sich darunter denkt, erhellt aus den ursprünglichen Aussagen, die von Begriffsumfängen gemacht werden	That this definition is correct will perhaps not seem very evident at first. Does one not think of something else under the extension of a concept? What one thinks of under it becomes clear from the primary statements that can be made about extensions of concepts. They are the following: 1.

12 German "gleichzahlig", literally "equal-numbered"; hence Frege's warning not to read the meaning off the compound.

13

[1] Ich glaube, dass für »Umfang des Begriffes« einfach »Begriff« gesagt werden könnte. Aber man würde zweierlei einwenden: 1. dies stehe im Widerspruche mit meiner früheren Behauptung, dass die einzelne Zahl ein Gegenstand sei, was durch den bestimmten Artikel in Ausdrücken wie »die Zwei« und durch die Unmöglichkeit angedeutet werde, von Einsen, Zweien u. s. w. im Plural zu sprechen, sowie dadurch, dass die Zahl nur einen Theil des Praedicats der Zahlangabe ausmache; 2. dass Begriffe von gleichem Umfange sein können, ohne zusammenzufallen. Ich bin nun zwar der Meinung, dass beide Einwände gehoben werden können; aber das möchte hier zu weit führen. Ich setze voraus, dass man wisse, was der Umfang eines Begriffes sei.

[1] I believe that for "extension of the concept" one could simply say "concept". But two objections would be raised. 1. This contradicts my earlier assertion that the individual number is an object. That is indicated by the definite article in expressions like "the two", by the impossibility of speaking of ones, twos, etc. in the plural, and by the fact that the number makes up only part of the predicate of the statement of number. 2. Concepts can have the same extension without coinciding. I do indeed hold that both objections can be met; but that would take us too far afield here. I assume that it is known what the extension of a concept is.

	GERMAN	ENGLISH
	können. Es sind folgende: 1. die Gleichheit, 2. dass der eine umfassender als der andere sei.	identity; 2. that one is more comprehensive than the other.
69.2	Nun ist der Satz: der Umfang des Begriffes »gleichzahlig dem Begriffe F« ist gleich dem Umfange des Begriffes »gleichzahlig dem Begriffe G« immer dann und nur dann wahr, wenn auch der Satz »dem Begriffe F kommt dieselbe Zahl wie dem Begriffe G zu« wahr ist. Hier ist also voller Einklang.	Now the proposition "the extension of the concept 'equinumerous with the concept F' is identical with the extension of the concept 'equinumerous with the concept G'" is true always and only when the proposition "the same number belongs to the concept F as to the concept G" is also true. Here, then, there is complete agreement.
69.3	Man sagt zwar nicht, dass eine Zahl umfassender als eine andere sei in dem Sinne, wie der Umfang eines Begriffes umfassender als der eines andern ist; aber der Fall, dass der Umfang des Begriffes »gleichzahlig dem Begriffe F« umfassender sei als der Umfang des Begriffes »gleichzahlig dem Begriffe G« kann auch gar nicht vorkommen; sondern, wenn alle Begriffe, die dem G gleichzahlig sind, auch dem F gleichzahlig sind, so sind auch umgekehrt alle Begriffe, die dem F gleichzahlig sind, dem G gleichzahlig. Dies »umfassender« darf natürlich nicht mit dem »grösser« verwechselt werden, das bei Zahlen vorkommt.	It is true that we do not say one number is more comprehensive than another in the sense in which the extension of one concept is more comprehensive than that of another. But the case where the extension of the concept "equinumerous with the concept F" is more comprehensive than the extension of the concept "equinumerous with the concept G" cannot arise at all. Rather, if all concepts equinumerous with G are also equinumerous with F, then conversely all concepts equinumerous with F are also equinumerous with G. This "more comprehensive" must of course not be confused with the "greater" that occurs with numbers.
69.4	Freilich ist noch der Fall denkbar, dass der Umfang des Begriffes »gleichzahlig dem Begriffe F« umfassender oder weniger umfassend wäre als ein anderer Begriffsumfang, der dann nach unserer Erklärung keine Anzahl sein könnte; und es ist nicht üblich, eine Anzahl umfassender oder weniger umfassend als den Umfang eines Begriffes zu nennen; aber es steht auch nichts im Wege, eine solche Redeweise anzunehmen, falls solches einmal vorkommen sollte.	Admittedly, it is still conceivable that the extension of the concept "equinumerous with the concept F" should be more or less comprehensive than some other extension of a concept, which then, by our definition, could not be a Number. And it is not usual to call a Number more or less comprehensive than the extension of a concept. But nothing prevents us from adopting such a way of speaking, should this case ever arise.

TESTING THE DEFINITION

Equinumerosity is defined by one-to-one correlation, using only logical relations.

	GERMAN	ENGLISH
70.1	Definitionen bewähren sich durch ihre Fruchtbarkeit. Solche, die ebensogut wegbleiben könnten, ohne eine Lücke in der Beweisführung zu öffnen, sind als völlig werthlos zu verwerfen.	Definitions prove their worth by their fruitfulness. Those that could just as well be left out without opening a gap in the chain of proof are to be rejected as utterly worthless.
70.2	Versuchen wir also, ob sich bekannte Eigenschaften der Zahlen aus unserer Erklärung der Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ableiten lassen! Wir werden uns hier mit den einfachsten begnügen.	Let us see, then, whether familiar properties of numbers can be derived from our definition of the Number which belongs to the concept F. We shall content ourselves here with the simplest.
70.3		

GERMAN

Dazu ist es nöthig, die Gleichzahligkeit noch etwas genauer zu fassen. Wir erklärten sie mittels der beiderseits eindeutigen Zuordnung, und wie ich diesen Ausdruck verstehen will, ist jetzt darzulegen, weil man leicht etwas Anschauliches darin vermuthen könnte.

70.4 Betrachten wir folgendes Beispiel! Wenn ein Kellner sicher sein will, dass er ebensoviele Messer als Teller auf den Tisch legt, braucht er weder diese noch jene zu zählen, wenn er nur rechts neben jeden Teller ein Messer legt, sodass jedes Messer auf dem Tische sich rechts neben einem Teller befindet. Die Teller und Messer sind so beiderseits eindeutig einander zugeordnet und zwar durch das gleiche Lagenverhältniss. Wenn wir in dem Satze »α liegt rechts neben A« für α und A andere und andere Gegenstände eingesetzt denken, so macht der hierbei unverändert bleibende Theil des Inhalts das Wesen der Beziehung aus. Verallgemeinern wir dies!

70.5 Indem wir von einem beurtheilbaren Inhalte, der von einem Gegenstande a und von einem Gegenstande b handelt, a und b absondern, so behalten wir einen Beziehungsbegriff übrig, der demnach in doppelter Weise ergänzungsbedürftig ist. Wenn wir in dem Satze: »die Erde hat mehr Masse als der Mond« »die Erde« absondern, so erhalten wir den Begriff »mehr Masse als der Mond habend«. Wenn wir dagegen den Gegenstand »der Mond« absondern, gewinnen wir den Begriff »weniger Masse als die Erde habend«. Sondern wir beide zugleich ab, so bleibt ein Beziehungsbegriff zurück, der für sich allein ebensowenig wie ein einfacher Begriff einen Sinn hat: er verlangt immer eine Ergänzung zu einem beurtheilbaren Inhalte. Aber diese kann in verschiedener Weise geschehen: statt Erde und Mond kann ich z. B.

Sonne und Erde setzen, und hierdurch wird eben die Absonderung bewirkt.

70.6 Die einzelnen Paare zugeordneter Gegenstände verhalten sich in ähnlicher Weise – man könnte sagen als Subjecte – zu dem Beziehungsbegriffe, wie der einzelne Gegenstand zu dem Begriffe, unter den er fällt. Das Subject ist hier ein zusammengesetztes. Zuweilen, wenn die Beziehung eine umkehrbare ist, kommt dies auch sprachlich zum Ausdrucke wie in dem Satze »Peleus und Thetis waren die Eltern des Achilleus«[1]. Dagegen wäre es z. B. nicht gut möglich, den Inhalt des Satzes »die Erde ist grösser als der Mond« so wiederzugeben, dass »die Erde und der

ENGLISH

For this it is necessary to grasp equinumerosity somewhat more precisely. We defined it by means of one-to-one correlation. I must now set out how I want this expression to be understood, since one might easily suspect that it contains something intuitive.

Consider the following example. Suppose a waiter wants to be sure of laying exactly as many knives on the table as plates. He need count neither the one nor the other, provided he lays a knife immediately to the right of each plate, so that every knife on the table lies immediately to the right of a plate. The plates and knives are thus correlated one-to-one with each other, and indeed by the same spatial relationship. If we think of different objects being substituted again and again for α and A in the proposition “α lies immediately to the right of A”, then the part of the content that remains unchanged throughout constitutes the essence of the relation. Let us generalize this.

If, from a judgeable content that deals with an object a and an object b, we separate off a and b, we are left with a relational concept, which accordingly needs completing in two ways. If, in the proposition “the earth has more mass than the moon”, we separate off “the earth”, we obtain the concept “having more mass than the moon”. If, on the other hand, we separate off the object “the moon”, we get the concept “having less mass than the earth”. If we separate off both at once, what remains is a relational concept. By itself it has no more sense than a simple concept does: it always requires completion into a judgeable content. But this can happen in different ways: instead of earth and moon I can, for example,

put sun and earth, and it is precisely by this that the separating off is effected.

The individual pairs of correlated objects stand to the relational concept—as its subjects, one might say—much as the individual object stands to the concept under which it falls. The subject here is a compound one. Sometimes, when the relation is a reversible one, this also finds linguistic expression, as in the sentence “Peleus and Thetis were the parents of Achilles”[1]. By contrast, it would hardly be possible, for example, to render the content of the sentence “the earth is larger than the

	GERMAN	ENGLISH
	Mond« als zusammengesetztes Subject erschiene, weil das »und« immer eine gewisse Gleichstellung andeutet. Aber dies thut nichts zur Sache.	moon" so that "the earth and the moon" appeared as a compound subject, because "and" always suggests a certain parity. But this is beside the point.
14		
70.7	Der Beziehungsbegriff gehört also wie der einfache der reinen Logik an. Es kommt hier nicht der besondere Inhalt der Beziehung in Betracht, sondern allein die logische Form. Und was von dieser ausgesagt werden kann, dessen Wahrheit ist analytisch und wird *a priori* erkannt. Dies gilt von den Beziehungsbegriffen wie von den andern.	The relational concept thus belongs, like the simple one, to pure logic. What matters here is not the particular content of the relation but solely its logical form. And whatever can be asserted of this form is analytic in its truth and is known *a priori*. This holds of relational concepts as of the others.
70.8	Wie »a fällt unter den Begriff F« die allgemeine Form eines beurtheilbaren Inhalts ist, der von einem Gegenstande a handelt, so kann man »a steht in der Beziehung φ zu b« als allgemeine Form für einen beurtheilbaren Inhalt annehmen, der von dem Gegenstande a und von dem Gegenstande b handelt.	Just as "a falls under the concept F" is the general form of a judgeable content that deals with an object a, so we can take "a stands in the relation ϕ to b" as the general form of a judgeable content that deals with the object a and the object b.
71.1	Wenn nun jeder Gegenstand, der unter den Begriff F fällt, in der Beziehung φ zu einem unter den Begriff G fallenden Gegenstande steht, und wenn zu jedem Gegenstande, der unter G fällt, ein unter F fallender Gegenstand in der Beziehung φ steht, so sind die unter F und G fallenden Gegenstände durch die Beziehung φ einander zugeordnet.	Now suppose every object that falls under the concept F stands in the relation ϕ to an object falling under the concept G, and for every object that falls under G there is an object falling under F that stands in the relation ϕ to it. Then the objects falling under F and G are correlated with one another by the relation ϕ.
71.2	Es kann noch gefragt werden, was der Ausdruck »jeder Gegenstand, der unter F fällt, steht in der Beziehung φ zu einem unter G fallenden Gegenstande« bedeute, wenn gar kein Gegenstand unter F fällt. Ich verstehe darunter: die beiden Sätze »a fällt unter F« und »a steht zu keinem unter G fallenden Gegenstande in der Beziehung φ« können nicht mit einander bestehen, was auch a bezeichne, sodass entweder der erste oder der zweite oder beide falsch sind. Hieraus geht hervor, dass »jeder Gegenstand, der unter F fällt, in der Beziehung φ zu einem unter G fallenden Gegenstande steht,« wenn es keinen unter F fallenden Gegenstand giebt, weil dann der erste Satz »a fällt unter F« immer zu verneinen ist, was auch a sein mag.	It may still be asked what the expression "every object that falls under F stands in the relation ϕ to an object falling under G" means if no object at all falls under F. I understand it thus: the two propositions "a falls under F" and "a stands in the relation ϕ to no object falling under G" cannot both hold, whatever a may denote, so that either the first or the second or both are false. From this it emerges that "every object that falls under F stands in the relation ϕ to an object falling under G" holds if there is no object falling under F, because then the first proposition, "a falls under F", is always to be denied, whatever a may be.
71.3	Ebenso bedeutet »zu jedem Gegenstande, der unter G fällt, steht ein unter F fallender in der Beziehung φ«, dass die beiden Sätze »a fällt unter G« und »kein unter F fallender Gegenstand steht zu a in der Beziehung φ«	Similarly, "for every object that falls under G there is one falling under F that stands in the relation ϕ to it" means that the two propositions "a falls under G" and "no object falling under F stands in the

14

[1] Hiermit ist der Fall nicht zu verwechseln, wo das »und« nur scheinbar die Subjecte, in Wahrheit aber zwei Sätze verbindet.

[1] This is not to be confused with the case where "and" only appears to join the subjects but in truth joins two sentences.

GERMAN	ENGLISH
nicht mit einander bestehen können, was auch a sein möge.	relation ϕ to a" cannot both hold, whatever a may be.
72.1 Wir haben nun gesehen, wann die unter die Begriffe F und G fallenden Gegenstände einander durch die Beziehung φ zugeordnet sind. Hier soll nun diese Zuordnung eine beiderseits eindeutige sein. Darunter verstehe ich, dass folgende beiden Sätze gelten: 1. wenn d in der Beziehung φ zu a steht, und wenn d in der Beziehung φ zu e steht, so ist allgemein, was auch d, a und e sein mögen, a dasselbe wie e; 2. wenn d in der Beziehung φ zu a steht, und wenn b in der Beziehung φ zu a steht, so ist allgemein, was auch d, b und a sein mögen, d dasselbe wie b.	We have now seen when the objects falling under the concepts F and G are correlated with one another by the relation ϕ. Here, however, this correlation is to be one-to-one. By this I understand that the following two propositions hold: 1. if d stands in the relation ϕ to a, and if d stands in the relation ϕ to e, then in general, whatever d, a and e may be, a is the same as e; 2. if d stands in the relation ϕ to a, and if b stands in the relation ϕ to a, then in general, whatever d, b and a may be, d is the same as b.
72.2 Hiermit haben wir die beiderseits eindeutige Zuordnung auf rein logische Verhältnisse zurückgeführt und können nun so definiren:	We have thereby reduced one-to-one correlation to purely logical relationships and can now define as follows:
72.3 der Ausdruck »der Begriff F ist gleichzahlig dem Begriffe G« sei gleichbedeutend mit dem Ausdrucke »es giebt eine Beziehung φ, welche die unter den Begriff F fallenden Gegenstände den unter G fallenden Gegenständen beiderseits eindeutig zuordnet«. Ich wiederhole: die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes »gleichzahlig dem Begriffe F« und füge hinzu:	let the expression "the concept F is equinumerous with the concept G" mean the same as the expression "there is a relation ϕ which correlates one-to-one the objects falling under the concept F with the objects falling under G". I repeat: the Number which belongs to the concept F is the extension of the concept "equinumerous with the concept F", and I add:
72.4 der Ausdruck »n ist eine Anzahl« sei gleichbedeutend mit dem Ausdrucke »es giebt einen Begriff der Art, dass n die Anzahl ist, welche ihm zukommt«.	let the expression "n is a Number" mean the same as the expression "there is a concept such that n is the Number which belongs to it".
72.5 So ist der Begriff der Anzahl erklärt, scheinbar freilich durch sich selbst, aber dennoch ohne Fehler, weil »die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt« schon erklärt ist.	Thus the concept of Number is defined—apparently, to be sure, in terms of itself, but nevertheless without error, since "the Number which belongs to the concept F" has already been defined.
73.1 Wir wollen nun zunächst zeigen, dass die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, gleich der Anzahl ist, welche dem Begriffe G zukommt, wenn der Begriff F dem Begriffe G gleichzahlig ist. Dies klingt freilich wie eine Tautologie, ist es aber nicht, da die Bedeutung des Wortes »gleichzahlig« nicht aus der Zusammensetzung, sondern aus der eben gegebenen Erklärung hervorgeht.	We shall now first show that the Number which belongs to the concept F is identical with the Number which belongs to the concept G if the concept F is equinumerous with the concept G. This sounds, of course, like a tautology. But it is not one, since the meaning of the word "equinumerous" comes not from its composition but from the definition just given.
73.2 Nach unserer Definition ist zu zeigen, dass der Umfang des Begriffes »gleichzahlig dem Begriffe F« derselbe ist wie der Umfang des Begriffes »gleichzahlig dem Begriffe G«, wenn der Begriff F gleichzahlig dem Begriffe G ist. Mit andern Worten: es muss bewiesen werden, dass unter dieser Voraussetzung die Sätze allgemein gelten: wenn	According to our definition, it must be shown that the extension of the concept "equinumerous with the concept F" is the same as the extension of the concept "equinumerous with the concept G" if the concept F is equinumerous with the concept G. In other words, it must be proved that, under this as-

	GERMAN	ENGLISH
	der Begriff H gleichzahlig dem Begriffe F ist, so ist er auch gleichzahlig dem Begriffe G; und wenn der Begriff H dem Begriffe G gleichzahlig ist, so ist er auch gleichzahlig dem Begriffe F.	sumption, the following propositions hold generally: if the concept H is equinumerous with the concept F, then it is also equinumerous with the concept G; and if the concept H is equinumerous with the concept G, then it is also equinumerous with the concept F.
73.3	Der erste Satz kommt darauf hinaus, dass es eine Beziehung giebt, welche die unter den Begriff H fallenden Gegenstände den unter den Begriff G fallenden beiderseits eindeutig zuordnet, wenn es eine Beziehung φ giebt, welche die unter den Begriff F fallenden Gegenstände den unter den Begriff G fallenden beiderseits eindeutig zuordnet, und wenn es eine Beziehung ψ giebt, welche die unter den Begriff H fallenden Gegenstände den unter den Begriff F fallenden beiderseits eindeutig zuordnet. Folgende Anordnung der Buchstaben wird dies übersichtlicher machen: H ψ F φ G.	The first proposition comes down to this. There is a relation that correlates one-to-one the objects falling under the concept H with those falling under the concept G, if there is a relation ϕ that correlates one-to-one the objects falling under the concept F with those falling under the concept G, and if there is a relation ψ that correlates one-to-one the objects falling under the concept H with those falling under the concept F. The following arrangement of the letters will make this easier to survey: H ψ F ϕ G.
73.4	Eine solche Beziehung kann in der That angegeben werden: sie liegt in dem Inhalte »es giebt einen Gegenstand, zu dem c in der Beziehung ψ steht, und der zu b in der Beziehung φ steht,« wenn wir davon c und b absondern (als Beziehungspunkte betrachten). Man kann zeigen, dass diese Beziehung eine beiderseits eindeutige ist, und dass sie die unter den Begriff H fallenden Gegenstände den unter den Begriff G fallenden zuordnet.	Such a relation can in fact be specified. It lies in the content "there is an object to which c stands in the relation ψ and which stands in the relation ϕ to b", if we separate off c and b from it (regard them as the terms of the relation). It can be shown that this relation is one-to-one, and that it correlates the objects falling under the concept H with those falling under the concept G.
73.5	In ähnlicher Weise kann auch der andere Satz bewiesen werden[1]. Diese Andeutungen werden hoffentlich genügend erkennen lassen, dass wir hierbei keinen Beweisgrund der Anschauung zu entnehmen brauchen, und dass sich mit unsern Definitionen etwas machen lässt.	The other proposition can be proved in a similar way[1]. These hints will, I hope, show clearly enough that here we need take no ground of proof from intuition, and that something can be done with our definitions.

15

ZERO, ONE AND THE SUCCESSOR

Zero, one and the relation of following directly in the series of natural numbers are defined.

	GERMAN	ENGLISH
74.1	Wir können nun zu den Erklärungen der einzelnen Zahlen übergehn.	We can now pass on to the definitions of the individual numbers.
74.2	Weil unter den Begriff »sich selbst ungleich« nichts fällt, erkläre ich: 0 ist die Anzahl, welche dem Begriffe »sich selbst ungleich« zukommt.	Since nothing falls under the concept "not identical with itself", I define: 0 is the Number which belongs to the concept "not identical with itself".

15

[1] Desgleichen die Umkehrung: Wenn die Zahl, welche dem Begriffe F zukommt, dieselbe ist wie die, welche dem Begriffe G zukommt, so ist der Begriff F dem Begriffe G gleichzahlig.

[1] Likewise the converse: if the number which belongs to the concept F is the same as that which belongs to the concept G, then the concept F is equinumerous with the concept G.

GERMAN

74.3 Vielleicht nimmt man daran Anstoss, dass ich hier von einem Begriffe spreche. Man wendet vielleicht ein, dass ein Widerspruch darin enthalten sei, und erinnert an die alten Bekannten das hölzerne Eisen und den viereckigen Kreis. Nun ich meine, dass die gar nicht so schlimm sind, wie sie gemacht werden. Zwar nützlich werden sie grad nicht sein; aber schaden können sie auch nichts, wenn man nur nicht voraussetzt, dass etwas unter sie falle; und das thut man durch den blossen Gebrauch der Begriffe noch nicht. Dass ein Begriff einen Widerspruch enthalte, ist nicht immer so offensichtlich, dass es keiner Untersuchung bedürfte; dazu muss man ihn erst haben und logisch ebenso wie jeden andern behandeln.

Alles was von Seiten der Logik und für die Strenge der Beweisführung von einem Begriffe verlangt werden kann, ist seine scharfe Begrenzung, dass für jeden Gegenstand bestimmt sei, ob er unter ihn falle oder nicht. Dieser Anforderung genügen nun die einen Widerspruch enthaltenden Begriffe wie »sich selbst ungleich« durchaus; denn man weiss von jedem Gegenstande, dass er nicht unter einen solchen fällt[1].

17 18

74.4 Ich brauche das Wort »Begriff« in der Weise, dass »a fällt unter den Begriff F« die allgemeine Form eines beurtheilbaren Inhalts ist, der von einem Gegenstande a handelt und der beurtheilbar bleibt, was man auch für a setze. Und in diesem Sinne ist »a fällt unter den Begriff »»sich selbst ungleich««« gleichbedeutend mit »a ist sich selbst ungleich« oder »a ist nicht gleich a«.

74.5 Ich hätte zur Definition der 0 jeden andern Begriff nehmen können, unter den nichts fällt. Es kam mir aber darauf an, einen solchen zu wählen, von dem dies rein logisch bewiesen werden kann; und dazu bietet sich am bequemsten »sich selbst ungleich« dar, wobei ich für

ENGLISH

Some may take offense at my speaking of a concept here. It may be objected that it contains a contradiction, and our old acquaintances, wooden iron and the square circle, may be recalled. Well, I think they are not nearly as bad as they are made out to be. Useful they will hardly be; but neither can they do any harm, so long as one does not presuppose that something falls under them. And merely using the concepts does not yet do that. That a concept contains a contradiction is not always so obvious that no investigation is needed. For that, one must first have the concept and treat it logically just like any other.[16]

All that can be demanded of a concept from the side of logic, and for the rigor of proof, is that it be sharply delimited: that it be determined for every object whether or not it falls under it. Now concepts that contain a contradiction, such as “not identical with itself”, fully satisfy this requirement; for we know of every object that it does not fall under such a concept[1].

I use the word “concept” in such a way that “a falls under the concept F” is the general form of a judgeable content that deals with an object a and remains judgeable whatever is put for a. And in this sense “a falls under the concept ‘not identical with itself’” means the same as “a is not identical with itself” or “a is not identical with a”.

I could have taken any other concept under which nothing falls for the definition of 0. But what mattered to me was to choose one of which this can be proved purely logically. For this, “not identical with itself” offers itself most conveni-

16 “Wooden iron” (hölzernes Eisen) is the proverbial German example of a contradiction in terms.

17

[1] Ganz davon verschieden ist die Definition eines Gegenstandes aus einem Begriffe, unter den er fällt. Der Ausdruck »der grösste ächte Bruch« hat z. B. keinen Inhalt, weil der bestimmte Artikel den Anspruch erhebt, auf einen bestimmten Gegenstand hinzuweisen. Dagegen ist der Begriff »Bruch, der kleiner als 1 und so beschaffen ist, dass kein Bruch, der kleiner als 1 ist, ihn an Grösse übertrifft« ganz unbedenklich, und um beweisen zu können, dass es keinen solchen Bruch gebe, braucht man sogar diesen Begriff, obgleich er einen Widerspruch enthält. Wenn man aber durch diesen Begriff einen Gegenstand bestimmen wollte, der unter ihn fällt, wäre es allerdings nöthig, zweierlei vorher zu zeigen: 1. dass unter diesen Begriff ein Gegenstand falle; 2.

[1] Quite different from this is the definition of an object in terms of a concept under which it falls. The expression “the greatest proper fraction”, for example, has no content, because the definite article lays claim to point to a definite object. By contrast, the concept “fraction that is less than 1 and is such that no fraction less than 1 exceeds it in magnitude” is quite unobjectionable. Indeed, to be able to prove that there is no such fraction, one even needs this concept, although it contains a contradiction. But if one wanted to use this concept to determine an object falling under it, it would certainly be necessary first to show two things: 1. that an object falls under this concept; 2.

18

dass nur ein einziger Gegenstand unter ihn falle. Da nun schon der erste dieser Sätze falsch ist, so ist der Ausdruck »der grösste ächte Bruch« sinnlos.

that only a single object falls under it. Since the first of these propositions is already false, the expression “the greatest proper fraction” is senseless.

	GERMAN	ENGLISH
	»gleich« die vorhin angeführte Erklärung *Leibnizens* gelten lasse, die rein logisch ist.	ently, where for "identical" I adopt the definition of *Leibniz* cited earlier, which is purely logical.
75.1	Es muss sich nun mittels der früheren Festsetzungen beweisen lassen, dass jeder Begriff, unter den nichts fällt, gleichzahlig mit jedem Begriffe ist, unter den nichts fällt, und nur mit einem solchen, woraus folgt, dass 0 die Anzahl ist, welche einem solchen Begriffe zukommt, und dass kein Gegenstand unter einen Begriff fällt, wenn die Zahl, welche diesem zukommt, die 0 ist.	It must now be possible to prove, by means of the earlier stipulations, that every concept under which nothing falls is equinumerous with every concept under which nothing falls, and only with such a concept. From this it follows that 0 is the Number which belongs to such a concept, and that no object falls under a concept if the number which belongs to it is 0.
75.2	Nehmen wir an, weder unter den Begriff F noch unter den Begriff G falle ein Gegenstand, so haben wir, um die Gleichzahligkeit zu beweisen, eine Beziehung φ nöthig, von der die Sätze gelten: jeder Gegenstand, der unter F fällt, steht in der Beziehung φ zu einem Gegenstande, der unter G fällt; zu jedem Gegenstande, der unter G fällt, steht ein unter F fallender in der Beziehung φ.	Suppose that no object falls either under the concept F or under the concept G. Then, to prove equinumerosity, we need a relation ϕ of which the following propositions hold: every object that falls under F stands in the relation ϕ to an object that falls under G; for every object that falls under G there is one falling under F that stands in the relation ϕ to it.
75.3	Nach dem, was früher über die Bedeutung dieser Ausdrücke gesagt ist, erfüllt bei unsern Voraussetzungen jede Beziehung diese Bedingungen, also auch die Gleichheit, die obendrein beiderseits eindeutig ist; denn es gelten die beiden oben dafür verlangten Sätze.	Given what was said earlier about the meaning of these expressions, under our assumptions every relation fulfills these conditions. So too, therefore, does identity, which is moreover one-to-one; for the two propositions required above for this hold of it.
75.4	Wenn dagegen unter G ein Gegenstand fällt z. B. a, während unter F keiner fällt, so bestehen die beiden Sätze »a fällt unter G« und »kein unter F fallender Gegenstand steht zu a in der Beziehung φ« mit einander für jede Beziehung φ; denn der erste ist nach der ersten Voraussetzung richtig und der zweite nach der zweiten. Wenn es nämlich keinen unter F fallenden Gegenstand giebt, so giebt es auch keinen solchen, der in irgendeiner Beziehung zu a stände. Es giebt also keine Beziehung, welche nach unserer Erklärung die unter F den unter G fallenden Gegenständen zuordnete, und demnach sind die Begriffe F und G ungleichzahlig.	If, on the other hand, an object falls under G, say a, while none falls under F, then the two propositions "a falls under G" and "no object falling under F stands in the relation ϕ to a" both hold, for every relation ϕ. The first is true by the first assumption and the second by the second: if there is no object falling under F, then there is also none that stands in any relation to a. There is therefore no relation which, according to our definition, correlates the objects falling under F with those falling under G, and accordingly the concepts F and G are not equinumerous.
76.1	Ich will nun die Beziehung erklären, in der je zwei benachbarte Glieder der natürlichen Zahlenreihe zu einander stehen. Der Satz: »es giebt einen Begriff F und einen unter ihn fallenden Gegenstand x der Art, dass die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, n ist, und dass die Anzahl, welche dem Begriffe »»unter F fallend aber nicht gleich x«« zukommt, m ist« sei gleichbedeutend mit »n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m.«	I shall now define the relation in which any two adjacent members of the series of natural numbers stand to each other. Let the proposition "there is a concept F and an object x falling under it such that the Number which belongs to the concept F is n, and the Number which belongs to the concept 'falling under F but not identical with x' is m" mean the same as "n follows directly after m in the series of natural numbers".
76.2		

GERMAN

Ich vermeide den Ausdruck »n ist *die* auf m nächstfolgende Anzahl,« weil zur Rechtfertigung des bestimmten Artikels erst zwei Sätze bewiesen werden müssten[1]. Aus demselben Grunde sage ich hier noch nicht »n = m + 1«; denn auch durch das Gleichheitszeichen wird (m + 1) als Gegenstand bezeichnet.

ENGLISH

I avoid the expression "n is *the* Number following next after m", because two propositions would first have to be proved to justify the definite article[1]. For the same reason I do not yet say here "n = m + 1"; for the identity sign, too, designates (m + 1) as an object.

19

77.1 Um nun auf die Zahl 1 zu kommen, müssen wir zunächst zeigen, dass es etwas giebt, was in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf 0 folgt.

Now, to arrive at the number 1, we must first show that there is something that follows directly after 0 in the series of natural numbers.

77.2 Betrachten wir den Begriff – oder, wenn man lieber will, das Prädicat – »gleich 0«! Unter diesen fällt die 0. Unter den Begriff »gleich 0 aber nicht gleich 0« fällt dagegen kein Gegenstand, sodass 0 die Anzahl ist, welche diesem Begriffe zukommt. Wir haben demnach einen Begriff »gleich 0« und einen unter ihn fallenden Gegenstand 0, von denen gilt: die Anzahl, welche dem Begriffe »gleich 0« zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Begriffe »gleich 0« zukommt; die Anzahl, welche dem Begriffe »gleich 0 aber nicht gleich 0« zukommt, ist die 0.

Consider the concept—or, if you prefer, the predicate—"identical with 0". 0 falls under it. Under the concept "identical with 0 but not identical with 0", on the other hand, no object falls, so that 0 is the Number which belongs to this concept. We therefore have a concept "identical with 0" and an object 0 falling under it, of which the following holds: the Number which belongs to the concept "identical with 0" is identical with the Number which belongs to the concept "identical with 0"; the Number which belongs to the concept "identical with 0 but not identical with 0" is 0.

77.3 Also folgt nach unserer Erklärung die Anzahl, welche dem Begriffe »gleich 0« zukommt, in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf 0.

Hence, according to our definition, the Number which belongs to the concept "identical with 0" follows directly after 0 in the series of natural numbers.

77.4 Wenn wir nun definiren: 1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe »gleich 0« zukommt, so können wir den letzten Satz so ausdrücken: 1 folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf 0.

If we now define: 1 is the Number which belongs to the concept "identical with 0", then we can express the last proposition thus: 1 follows directly after 0 in the series of natural numbers.

77.5 Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass die Definition der 1 zu ihrer objectiven Rechtmässigkeit keine beobachtete Thatsache[1] voraussetzt; denn man verwechselt leicht damit, dass gewisse subjective Bedingungen erfüllt sein müssen, um uns die Definition möglich zu machen, und dass uns Sinneswahrnehmungen dazu veranlassen[2]. Dies kann immerhin zutreffen, ohne dass die abgeleiteten Sätze aufhören, a priori zu sein. Zu solchen Bedingungen gehört z. B.

auch, dass Blut in hinreichender Fülle und richtiger Beschaffenheit das Gehirn durchströme – wenigstens soviel wir wissen; – aber die Wahrheit unseres letzten

It is perhaps not superfluous to remark that the definition of 1 does not presuppose any observed fact[1] for its objective legitimacy. This is easily confused with the fact that certain subjective conditions must be fulfilled to make the definition possible for us, and that sense perceptions prompt us to it[2]. That may well be so without the derived propositions ceasing to be a priori. Among such conditions is, for example,

also that blood of sufficient quantity and the right quality should flow through the brain—at least so far as we know—but the truth of our last proposi-

19

[1] Siehe Anm. auf S. 87 u. 88.

[1] See the note on pp. 87 and 88.

	GERMAN	ENGLISH
	Satzes ist davon unabhängig; sie bleibt bestehen, auch wenn dies nicht mehr stattfindet; und selbst, wenn alle Vernunftwesen einmal gleichzeitig in einen Winterschlaf verfallen sollten, so würde sie nicht etwa so lange aufgehoben sein, sondern ganz ungestört bleiben. Die Wahrheit eines Satzes ist eben nicht sein Gedachtwerden.	tion is independent of this. It continues to hold even if this no longer happens; and even if all rational beings were at some point to fall into hibernation at the same time, its truth would not be suspended for that period but would remain quite undisturbed. The truth of a proposition is simply not its being thought.
2022		
78.1	Ich lasse hier einige Sätze folgen, die mittels unserer Definitionen zu beweisen sind. Der Leser wird leicht aber sehen, wie dies geschehen kann. 1. Wenn a in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf 0 folgt, so ist a = 1. 2. Wenn 1 die Anzahl ist, welche einem Begriffe zukommt, so giebt es einen Gegenstand, der unter den Begriff fällt. 3. Wenn 1 die Anzahl ist, welche einem Begriffe F zukommt; wenn der Gegenstand x unter den Begriff F fällt, und wenn y unter den Begriff F fällt, so ist x = y; d. h. x ist dasselbe wie y. 4.	Here I list some propositions that are to be proved by means of our definitions. The reader will easily see how this can be done. 1. If a follows directly after 0 in the series of natural numbers, then a = 1. 2. If 1 is the Number which belongs to a concept, then there is an object that falls under the concept. 3. If 1 is the Number which belongs to a concept F; if the object x falls under the concept F, and if y falls under the concept F, then x = y; that is, x is the same as y. 4.
	Wenn unter einen Begriff F ein Gegenstand fällt, und wenn allgemein daraus, dass x unter den Begriff F fällt, und dass y unter den Begriff F fällt, geschlossen werden kann, dass x = y ist, so ist 1 die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt. 5. Die Beziehung von m zu n, die durch den Satz: »n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m« gesetzt wird, ist eine beiderseits eindeutige. Hiermit ist noch nicht gesagt, dass es zu jeder Anzahl eine andere gebe, welche auf sie oder auf welche sie in der Zahlenreihe unmittelbar folge.	If an object falls under a concept F, and if from the fact that x falls under the concept F and that y falls under the concept F it can in general be inferred that x = y, then 1 is the Number which belongs to the concept F. 5. The relation of m to n that is set up by the proposition "n follows directly after m in the series of natural numbers" is one-to-one. This does not yet say that for every Number there is another that follows directly after it, or after which it follows directly, in the series of numbers.
78.2	6. Jede Anzahl ausser der 0 folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf eine Anzahl.	6. Every Number except 0 follows directly after a Number in the series of natural numbers.
79.1	Um nun beweisen zu können, dass auf jede Anzahl (n) in der natürlichen Zahlenreihe eine Anzahl unmittelbar folge, muss man einen Begriff aufweisen, dem diese letzte Anzahl zukommt. Wir wählen als diesen »der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend«, der zunächst erklärt werden muss.	Now, to be able to prove that after every Number (n) in the series of natural numbers some Number follows directly, one must exhibit a concept to which this latter Number belongs. We choose as such the concept "belonging to the series of natural numbers ending with n", which must first be defined.

20

[1] Satz ohne Allgemeinheit. | [1] A proposition without generality.

22

[2] Vergl. B. Erdmann, die Axiome der Geometrie S. 164. | [2] Cf. B. Erdmann, *Die Axiome der Geometrie* [The Axioms of Geometry], p. 164.[21]

21 Benno Erdmann (1851–1921), German philosopher; the book appeared in 1877.

FOLLOWING IN A SERIES

Frege defines following in a series and shows that the series of natural numbers has no end.

	GERMAN	ENGLISH
79.2	Ich wiederhole zunächst mit etwas andern Worten die Definition, welche ich in meiner »Begriffsschrift« vom Folgen in einer Reihe gegeben habe.	I shall first repeat, in somewhat different words, the definition of following in a series that I gave in my *Begriffsschrift*.[23]
79.3	Der Satz »wenn jeder Gegenstand, zu dem x in der Beziehung φ steht, unter den Begriff F fällt, und wenn daraus, dass d unter den Begriff F fällt, allgemein, was auch d sei, folgt, dass jeder Gegenstand, zu dem d in der Beziehung φ steht, unter den Begriff F falle, so fällt y unter den Begriff F, was auch F für ein Begriff sein möge« sei gleichbedeutend mit »y folgt in der φ-Reihe auf x« und mit »x geht in der φ-Reihe dem y vorher.«	Let the proposition "if every object to which x stands in the relation ϕ falls under the concept F, and if from the fact that d falls under the concept F it follows in general, whatever d may be, that every object to which d stands in the relation ϕ falls under the concept F, then y falls under the concept F, whatever concept F may be" mean the same as "y follows x in the ϕ-series" and as "x precedes y in the ϕ-series".
80.1	Einige Bemerkungen hierzu werden nicht überflüssig sein. Da die Beziehung φ unbestimmt gelassen ist, so ist die Reihe nicht nothwendig in der Form einer räumlichen und zeitlichen Anordnung zu denken, obwohl diese Fälle nicht ausgeschlossen sind.	A few remarks on this will not be superfluous. Since the relation ϕ has been left undetermined, the series need not necessarily be thought of in the form of a spatial or temporal arrangement, although these cases are not excluded.
80.2	Man könnte vielleicht eine andere Erklärung für natürlicher halten z. B.: wenn man von x ausgehend seine Aufmerksamkeit immer von einem Gegenstande zu einem andern lenkt, zu welchem er in der Beziehung φ steht, und wenn man auf diese Weise schliesslich y erreichen kann, so sagt man y folge in der φ-Reihe auf x.	One might perhaps think another definition more natural, for example: if, starting from x, we keep shifting our attention from one object to another to which it stands in the relation ϕ, and if in this way we can finally reach y, then we say that y follows x in the ϕ-series.
80.3	Dies ist eine Weise die Sache zu untersuchen, keine Definition. Ob wir bei der Wanderung unserer Aufmerksamkeit y erreichen, kann von mancherlei subjectiven Nebenumständen abhangen z. B. von der uns zu Gebote stehenden Zeit, oder von unserer Kenntniss der Dinge.	This is a way of investigating the matter, not a definition. Whether our wandering attention reaches y may depend on all sorts of subjective incidental circumstances, for example on the time at our disposal or on our knowledge of things.
	Ob y auf x in der φ-Reihe folgt, hat im Allgemeinen gar nichts mit unserer Aufmerksamkeit und den Bedingungen ihrer Fortbewegung zu thun, sondern ist etwas Sachliches, ebenso wie ein grünes Blatt gewisse Lichtstrahlen reflectirt, mögen sie nun in mein Auge fallen und Empfindung hervorrufen oder nicht, ebenso wie ein Salzkorn in Wasser löslich ist, mag ich es ins Wasser werfen und den Vorgang beobachten oder nicht, und wie es selbst dann noch löslich ist, wenn ich gar nicht die Möglichkeit habe, einen Versuch damit anzustellen.	Whether y follows x in the ϕ-series has, in general, nothing whatever to do with our attention and the conditions of its movement. It is a matter of fact: just as a green leaf reflects certain light rays whether or not they fall into my eye and produce a sensation; just as a grain of salt is soluble in water whether or not I throw it into the water and observe the process; and just as it is still soluble even when I have no possibility at all of experimenting with it.
80.4	Durch meine Erklärung ist die Sache aus dem Bereiche subjectiver Möglichkeiten in das der objectiven	My definition raises the matter out of the realm of subjective possibilities into that of objective de-

	GERMAN	ENGLISH
	Bestimmtheit erhoben. In der That: dass aus gewissen Sätzen ein anderer folgt, ist etwas Objectives, von den Gesetzen der Bewegung unserer Aufmerksamkeit Unabhängiges, und es ist dafür einerlei, ob wir den Schluss wirklich machen oder nicht. Hier haben wir ein Merkmal, das die Frage überall entscheidet, wo sie gestellt werden kann, mögen wir auch im einzelnen Falle durch äussere Schwierigkeiten verhindert sein, zu beurtheilen, ob es zutrifft. Das ist für die Sache selbst gleichgiltig.	terminacy. Indeed, that one proposition follows from certain others is something objective, independent of the laws governing the movement of our attention, and it makes no difference to this whether we actually draw the inference or not. Here we have a characteristic mark that decides the question wherever it can be raised, even if in a particular case we may be prevented by external difficulties from judging whether it applies. That is irrelevant to the matter itself.
80.5	Wir brauchen nicht immer alle Zwischenglieder vom Anfangsgliede bis zu einem Gegenstande zu durchlaufen, um gewiss zu sein, dass er auf jenes folgt. Wenn z. B. gegeben ist, dass in der φ-Reihe b auf a und c auf b folgt, so können wir nach unserer Erklärung schliessen, dass c auf a folgt, ohne die Zwischenglieder auch nur zu kennen.	We do not always need to run through all the intermediate members from the initial member to an object in order to be certain that the object follows it. If, for example, we are given that in the ϕ-series b follows a and c follows b, then by our definition we can infer that c follows a, without even knowing the intermediate members.
80.6	Durch diese Definition des Folgens in einer Reihe wird es allein möglich, die Schlussweise von n auf (n + 1), welche scheinbar der Mathematik eigenthümlich ist, auf die allgemeinen logischen Gesetze zurückzuführen.	Only through this definition of following in a series does it become possible to reduce the mode of inference from n to (n + 1), which is seemingly peculiar to mathematics, to the general laws of logic.
81.1	Wenn wir nun als Beziehung φ diejenige haben, in welche m zu n gesetzt wird durch den Satz »n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m,« so sagen wir statt »φ-Reihe« »natürliche Zahlenreihe«.	Now if the relation ϕ we have is the one in which m is placed to n by the proposition "n follows directly after m in the series of natural numbers", then instead of "ϕ-series" we say "series of natural numbers".
81.2	Ich definire weiter:	I further define:
81.3	der Satz »y folgt in der φ-Reihe auf x oder y ist dasselbe wie x« sei gleichbedeutend mit »y gehört der mit x anfangenden φ-Reihe an« und mit »x gehört der mit y endenden φ-Reihe an«.	let the proposition "y follows x in the ϕ-series or y is the same as x" mean the same as "y belongs to the ϕ-series beginning with x" and as "x belongs to the ϕ-series ending with y".
81.4	Demnach gehört a der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe an, wenn n entweder in der natürlichen Zahlenreihe auf a folgt oder gleich a ist[1].	Accordingly, a belongs to the series of natural numbers ending with n if n either follows a in the series of natural numbers or is identical with a[1].
24		
82.1	Es ist nun zu zeigen, dass – unter einer noch anzugebenden Bedingung – die Anzahl, welche dem Begriffe »der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend« zukommt, auf n in der natürlichen	It must now be shown that—under a condition still to be specified—the Number which belongs to the concept "belonging to the series of natural numbers ending with n" follows directly after n in the

23 Frege's *Begriffsschrift* ("concept-script", 1879) set out his logical notation; its third part defines following in a series.
24

[1] Wenn n keine Anzahl ist, so gehört nur n selbst der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe an. Man stosse sich nicht an dem Ausdrucke!

[1] If n is not a Number, then only n itself belongs to the series of natural numbers ending with n. Do not take offense at the expression!

GERMAN

Zahlenreihe unmittelbar folgt. Und damit ist dann bewiesen, dass es eine Anzahl giebt, welche auf n in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar folgt, dass es kein letztes Glied dieser Reihe giebt. Offenbar kann dieser Satz auf empirischem Wege oder durch Induction nicht begründet werden.

82.2 Es würde hier zu weit führen, den Beweis selbst zu geben. Nur sein Gang mag kurz angedeutet werden. Es ist zu beweisen 1. wenn a in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf d folgt, und wenn von d gilt: die Anzahl, welche dem Begriffe »der mit d endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend« zukommt, folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf d, so gilt auch von a: die Anzahl, welche dem Begriffe »der mit a endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend« zukommt, folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf a.

82.3 Es ist zweitens zu beweisen, dass von der 0 das gilt, was in den eben ausgesprochenen Sätzen von d und von a ausgesagt ist, und dann zu folgern, dass es auch von n gilt, wenn n der mit 0 anfangenden natürlichen Zahlenreihe angehört. Diese Schlussweise ist eine Anwendung der Definition, die ich von dem Ausdrucke »y folgt in der natürlichen Zahlenreihe auf x« gegeben habe, indem man als Begriff F jene gemeinsame Aussage von d und von a, von 0 und von n zu nehmen hat.

83.1 Um den Satz (1) des vorigen § zu beweisen, müssen wir zeigen, dass a die Anzahl ist, welche dem Begriffe »der mit a endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend, aber nicht gleich a« zukommt. Und dazu ist wieder zu beweisen, dass dieser Begriff gleichen Umfanges mit dem Begriffe »der mit d endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend« ist. Hierfür bedarf man des Satzes, dass kein Gegenstand, welcher der mit 0 anfangenden natürlichen Zahlenreihe angehört, auf sich selbst in der natürlichen Zahlenreihe folgen kann. Dies muss ebenfalls mittels unserer Definition des Folgens in einer Reihe, wie oben angedeutet ist, bewiesen werden[1].

25

83.2 Wir werden hierdurch genöthigt, dem Satze, dass die Anzahl, welche dem Begriffe »der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend« zukommt, in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf n folgt, die Bedingung hinzuzufügen, dass n der mit 0 anfangenden

ENGLISH

series of natural numbers. This then proves that there is a Number following directly after n in the series of natural numbers, and that there is no last member of this series. Obviously this proposition cannot be established empirically or by induction.

To give the proof itself here would take us too far. Only its course may be briefly indicated. It must be proved: 1. if a follows directly after d in the series of natural numbers, and if it holds of d that the Number which belongs to the concept "belonging to the series of natural numbers ending with d" follows directly after d in the series of natural numbers, then it also holds of a that the Number which belongs to the concept "belonging to the series of natural numbers ending with a" follows directly after a in the series of natural numbers.

Secondly, it must be proved that what is asserted of d and of a in the propositions just stated holds of 0; and it must then be inferred that it also holds of n, if n belongs to the series of natural numbers beginning with 0. This mode of inference is an application of the definition I have given of the expression "y follows x in the series of natural numbers", in which one has to take as the concept F that common statement about d and a, about 0 and n.

To prove proposition (1) of the preceding §, we must show that a is the Number which belongs to the concept "belonging to the series of natural numbers ending with a, but not identical with a". And for this it must in turn be proved that this concept has the same extension as the concept "belonging to the series of natural numbers ending with d". For this one needs the proposition that no object belonging to the series of natural numbers beginning with 0 can follow itself in the series of natural numbers. This too must be proved by means of our definition of following in a series, as indicated above[1].

We are thereby compelled to add a condition to the proposition that the Number which belongs to the concept "belonging to the series of natural numbers ending with n" follows directly after n in the series of natural numbers: namely, that n be-

	GERMAN	ENGLISH
	natürlichen Zahlenreihe angehöre. Hierfür ist eine kürzere Ausdrucksweise gebräuchlich, die ich nun erkläre: der Satz »n gehört der mit 0 anfangenden natürlichen Zahlenreihe an« sei gleichbedeutend mit »n ist eine endliche Anzahl«.	long to the series of natural numbers beginning with 0. For this there is a shorter, customary way of speaking, which I now define: let the proposition "n belongs to the series of natural numbers beginning with 0" mean the same as "n is a finite Number".
83.3	Dann können wir den letzten Satz so ausdrücken: keine endliche Anzahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selber.	Then we can express the last proposition thus: no finite Number follows itself in the series of natural numbers.

INFINITE NUMBERS

Frege introduces an infinite Number and compares his account with Cantor's.

	GERMAN	ENGLISH
84.1	Den endlichen gegenüber stehen die unendlichen Anzahlen. Die Anzahl, welche dem Begriffe »endliche Anzahl« zukommt, ist eine unendliche. Bezeichnen wir sie etwa durch ∞_1! Wäre sie eine endliche, so könnte sie nicht auf sich selber in der natürlichen Zahlenreihe folgen. Man kann aber zeigen, dass ∞_1 das thut.	Opposed to the finite Numbers are the infinite ones. The Number which belongs to the concept "finite Number" is an infinite one. Let us denote it, say, by ∞_1! If it were finite, it could not follow itself in the series of natural numbers. But it can be shown that ∞_1 does so.
84.2	In der so erklärten unendlichen Anzahl ∞_1 liegt nichts irgendwie Geheimnissvolles oder Wunderbares. »Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist ∞_1« heisst nun nichts mehr und nichts weniger als: es giebt eine Beziehung, welche die unter den Begriff F fallenden Gegenstände den endlichen Anzahlen beiderseits eindeutig zuordnet. Dies ist nach unseren Erklärungen ein ganz klarer und unzweideutiger Sinn; und das genügt, um den Gebrauch des Zeichens ∞_1 zu rechtfertigen und ihm eine Bedeutung zu sichern. Dass wir uns keine Vorstellung von einer unendlichen Anzahl bilden können, ist ganz unerheblich und würde endliche Anzahlen ebenso treffen. Unsere Anzahl ∞_1 hat auf diese Weise etwas ebenso Bestimmtes wie irgendeine endliche: sie ist zweifellos als dieselbe wiederzuerkennen und von einer andern zu unterscheiden.	There is nothing in any way mysterious or wonderful about the infinite Number ∞_1 so defined. "The Number which belongs to the concept F is ∞_1" now means neither more nor less than this: there is a relation which correlates one-to-one the objects falling under the concept F with the finite Numbers. According to our definitions this has a perfectly clear and unambiguous sense; and that is enough to justify the use of the sign ∞_1 and to secure it a meaning. That we can form no idea of an infinite Number is quite irrelevant, and would apply equally to finite Numbers. In this way our Number ∞_1 is something just as determinate as any finite one: it can without doubt be recognized again as the same and distinguished from another.
85.1	Vor Kurzem hat *G. Cantor* in einer bemerkenswerthen Schrift[1] unendliche Anzahlen eingeführt. Ich stimme ihm durchaus in der Würdigung der Ansicht bei, welche überhaupt nur die endlichen Anzahlen als wirklich gelten lassen will. Sinnlich wahrnehmbar und räumlich sind	Recently *G. Cantor* has introduced infinite Numbers in a remarkable work[1]. I wholly agree with his assessment of the view that would admit only the finite Numbers as actual at all. Neither these

[1] E. Schröder scheint a. a. O. S. 63 diesen Satz als Folge einer auch anders denkbaren Bezeichnungsweise anzusehen. Es macht sich auch hier der Uebelstand bemerkbar, der seine ganze Darstellung dieser Sache beeinträchtigt, dass man nicht recht weiss, ob die Zahl ein Zeichen ist, und was dann dessen Bedeutung, oder ob sie eben diese Bedeutung ist. Daraus, dass man verschiedene Zeichen festsetzt, sodass nie dasselbe wiederkehrt, folgt noch nicht, dass diese Zeichen auch Verschiedenes bedeuten.

[1] E. Schröder, op. cit., p. 63, seems to regard this proposition as a consequence of a notation that could also be conceived otherwise. Here too we notice the drawback that impairs his whole presentation of this matter: one does not really know whether number is a sign, and in that case what its meaning is, or whether it is just this meaning. From the fact that one lays down different signs, so that the same one never recurs, it does not yet follow that these signs also mean different things.

GERMAN

weder diese noch die Brüche, noch die negativen, irrationalen und complexen Zahlen; und wenn man wirklich nennt, was auf die Sinne wirkt, oder was wenigstens Wirkungen hat, die Sinneswahrnehmungen zur nähern oder entferntern Folge haben können, so ist freilich keine dieser Zahlen wirklich. Aber wir brauchen auch solche Wahrnehmungen gar nicht als Beweisgründe für unsere Lehrsätze.

Einen Namen oder ein Zeichen, das logisch einwurfsfrei eingeführt ist, können wir in unsern Untersuchungen ohne Scheu gebrauchen, und so ist unsere Anzahl ∞_1 so gerechtfertigt wie die Zwei oder die Drei.

26

85.2 Indem ich hierin, wie ich glaube, mit *Cantor* übereinstimme, weiche ich doch in der Benennung etwas von ihm ab. Meine Anzahl nennt er »Mächtigkeit,« während sein Begriff[1] der Anzahl auf die Anordnung Bezug nimmt. Für endliche Anzahlen ergiebt sich freilich doch eine Unabhängigkeit von der Reihenfolge, dagegen nicht für unendlichgrosse. Nun enthält der Sprachgebrauch des Wortes »Anzahl« und der Frage »wieviele?« keine Hinweisung auf eine bestimmte Anordnung. Cantors Anzahl antwortet vielmehr auf die Frage: »das wievielste Glied in der Succession ist das Endglied?« Darum scheint mir meine Benennung besser mit dem Sprachgebrauche übereinzustimmen.

Wenn man die Bedeutung eines Wortes erweitert, so wird man darauf zu achten haben, dass möglichst viele allgemeine Sätze ihre Geltung behalten und zumal so grundlegende, wie für die Anzahl die Unabhängigkeit von der Reihenfolge ist. Wir haben gar keine Erweiterung nöthig gehabt, weil unser Begriff der Anzahl sofort auch unendliche Zahlen umfasst.

28

86.1 Um seine unendlichen Anzahlen zu gewinnen, führt *Cantor* den Beziehungsbegriff des Folgens in einer Succession ein, der von meinem »Folgen in einer Reihe« abweicht. Nach ihm würde z. B. eine Succession entstehen, wenn man die endlichen positiven ganzen Zahlen so anordnete, dass die unpaaren in ihrer

ENGLISH

nor fractions, nor negative, irrational and complex numbers, are perceptible by the senses or spatial. If we call actual what acts on the senses, or at least has effects that can have sense perceptions as their nearer or more remote consequences, then of course none of these numbers is actual. But we have no need at all of such perceptions as grounds of proof for our theorems.

A name or sign that has been introduced in a logically unobjectionable way we may use in our investigations without misgiving; and so our Number ∞_1 is as justified as two or three.

Although in this, I believe, I am in agreement with *Cantor*, I diverge from him somewhat in terminology. What I call Number he calls "power", while his concept[1] of Number refers to ordering. For finite Numbers, independence of order does indeed result after all, but not for infinitely large ones. Now the ordinary use of the word "Number" and of the question "how many?" contains no reference to any particular ordering. Cantor's Number rather answers the question: "at what position in the succession does the last member stand?" That is why my terminology seems to me to agree better with ordinary usage.[27]

When one extends the meaning of a word, one must take care that as many general propositions as possible retain their validity, especially such fundamental ones as, for Number, its independence of order. We have needed no extension at all, because our concept of Number covers infinite numbers as well from the outset.

To obtain his infinite Numbers, *Cantor* introduces the relational concept of following in a succession, which differs from my "following in a series". On his account, a succession would arise, for example, if one arranged the finite positive integers so that the odd ones followed one another in their

26

[1] Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre. Leipzig, 1883.

[1] *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre* [Foundations of a General Theory of Manifolds]. Leipzig, 1883.

27 Cantor's "Mächtigkeit" (power) is what is now called cardinality; his "Anzahl" is an ordinal notion.

28

[1] Dieser Ausdruck kann der früher hervorgehobenen Objectivität des Begriffes zu widersprechen scheinen; aber subjectiv ist hier nur die Benennung.

[1] This expression may seem to contradict the objectivity of the concept emphasized earlier; but here only the naming is subjective.

GERMAN

natürlichen Reihenfolge für sich und ebenso die paaren unter sich auf einander folgten, ferner festgesetzt wäre, dass jede paare auf jede unpaare folgen solle. In dieser Succession würde z. B. 0 auf 13 folgen. Es würde aber keine Zahl unmittelbar der 0 vorhergehen. Dies ist nun ein Fall, der in dem von mir definirten Folgen in der Reihe nicht vorkommen kann.

Man kann streng beweisen, ohne ein Axiom der Anschauung zu benutzen, dass wenn y auf x in der φ-Reihe folgt, es einen Gegenstand giebt, der in dieser Reihe dem y unmittelbar vorhergeht. Mir scheinen nun genaue Definitionen des Folgens in der Succession und der cantorschen Anzahl noch zu fehlen. So beruft sich *Cantor* auf die etwas geheimnissvolle »innere Anschauung,« wo ein Beweis aus Definitionen anzustreben und wohl auch möglich wäre. Denn ich glaube vorauszusehen, wie sich jene Begriffe bestimmen liessen. Jedenfalls will ich durch diese Bemerkungen, deren Berechtigung und Fruchtbarkeit durchaus nicht angreifen. Im Gegentheil begrüsse ich in diesen Untersuchungen eine Erweiterung der Wissenschaft besonders deshalb, weil durch sie ein rein arithmetischer Weg zu höhern unendlichgrossen Anzahlen (Mächtigkeiten) gebahnt ist.

ENGLISH

natural order among themselves, and likewise the even ones among themselves, and it were further stipulated that every even number should follow every odd one. In this succession, for example, 0 would follow 13. But no number would directly precede 0. Now this is a case that cannot occur in following in a series as I have defined it.

It can be rigorously proved, without using any axiom of intuition, that if y follows x in the ϕ-series, there is an object that directly precedes y in this series. Now it seems to me that precise definitions of following in a succession and of Cantor's Number are still lacking. So *Cantor* appeals to the somewhat mysterious "inner intuition" where a proof from definitions ought to be sought and would no doubt be possible. For I believe I can foresee how those concepts could be determined. In any case, I by no means wish these remarks to attack their legitimacy and fruitfulness. On the contrary, I welcome these investigations as an extension of science, especially because they open up a purely arithmetical route to higher infinitely large Numbers (powers).

V. Conclusion

Schluss

Arithmetic as developed logic; the fruitfulness of definitions; other numbers—negative, fractional, irrational and complex.

GERMAN

87.1 Ich hoffe in dieser Schrift wahrscheinlich gemacht zu haben, dass die arithmetischen Gesetze analytische Urtheile und folglich a priori sind. Demnach würde die Arithmetik nur eine weiter ausgebildete Logik, jeder arithmetische Satz ein logisches Gesetz, jedoch ein abgeleitetes sein. Die Anwendungen der Arithmetik zur Naturerklärung wären logische Bearbeitungen von beobachteten Thatsachen[1]; Rechnen wäre Schlussfolgern. Die Zahlgesetze werden nicht, wie *Baumann*[2] meint, eine praktische Bewährung nöthig haben, um in der Aussenwelt anwendbar zu sein; denn in der Aussenwelt, der Gesammtheit des Räumlichen, giebt es keine Begriffe, keine Eigenschaften der Begriffe, keine Zahlen. Also sind die Zahlgesetze nicht eigentlich auf die äussern Dinge anwendbar: sie sind nicht Naturgesetze. Wohl aber sind sie anwendbar auf Urtheile, die von Dingen der Aussenwelt gelten: sie sind Gesetze der Naturgesetze.

Sie behaupten nicht einen Zusammenhang zwischen Naturerscheinungen, sondern einen solchen zwischen Urtheilen; und zu diesen gehören auch die Naturgesetze.

12

ENGLISH

I hope I have made it probable in this work that the laws of arithmetic are analytic judgments and consequently a priori. Arithmetic would then be only a further developed logic, and every arithmetical proposition a law of logic, albeit a derived one. The applications of arithmetic to the explanation of nature would be logical treatments of observed facts[1]; calculating would be inferring. The laws of number will not, as *Baumann*[2] thinks, need practical confirmation in order to be applicable in the external world. For in the external world, the totality of what is spatial, there are no concepts, no properties of concepts, no numbers. So the laws of number are not really applicable to external things: they are not laws of nature. But they are applicable to judgments that hold of things in the external world: they are laws of the laws of nature.

They assert a connection not between natural phenomena but between judgments; and among these are the laws of nature too.

KANT AND ANALYTIC JUDGMENTS

Fruitful definitions extend our knowledge though their consequences are analytic.

GERMAN

88.1 *Kant*[1] hat den Werth der analytischen Urtheile offenbar – wohl in Folge einer zu engen Begriffsbestimmung – unterschätzt, obgleich ihm der hier benutzte weitere Begriff vorgeschwebt zu haben scheint[2]. Wenn man seine Definition zu Grunde legt, ist die Eintheilung in analytische und synthetische Urtheile nicht erschöpfend.

ENGLISH

Kant[1] evidently underestimated the value of analytic judgments—probably as a result of defining the concept too narrowly—although the broader concept used here seems to have been in his mind[2]. If his definition is taken as the basis, the division into analytic and synthetic judgments is

1

[1] Das Beobachten schliesst selbst schon eine logische Thätigkeit ein.

[1] Observation itself already involves a logical activity.

2

[2] A. a. O. Bd. II. S. 670.

[2] Op. cit., vol. II, p. 670.

GERMAN

Er denkt an den Fall des allgemein bejahenden Urtheils. Dann kann man von einem Subjectsbegriffe reden und fragen, ob der Prädicatsbegriff in ihm – zufolge der Definition – enthalten sei. Wie aber, wenn das Subject ein einzelner Gegenstand ist? wie, wenn es sich um ein Existentialurtheil handelt? Dann kann in diesem Sinne gar nicht von einem Subjectsbegriffe die Rede sein. *Kant* scheint den Begriff durch beigeordnete Merkmale bestimmt zu denken; das ist aber eine der am wenigsten fruchtbaren Begriffsbildungen.

Wenn man die oben gegebenen Definitionen überblickt, so wird man kaum eine von der Art finden. Dasselbe gilt auch von den wirklich fruchtbaren Definitionen in der Mathematik z. B. der Stetigkeit einer Function. Wir haben da nicht eine Reihe beigeordneter Merkmale, sondern eine innigere, ich möchte sagen organischere Verbindung der Bestimmungen. Man kann sich den Unterschied durch ein geometrisches Bild anschaulich machen. Wenn man die Begriffe (oder ihre Umfänge) durch Bezirke einer Ebene darstellt, so entspricht dem durch beigeordnete Merkmale definirten Begriffe der Bezirk, welcher allen Bezirken der Merkmale gemeinsam ist; er wird durch Theile von deren Begrenzungen umschlossen.

Bei einer solchen Definition handelt es sich also – im Bilde zu sprechen – darum, die schon gegebenen Linien in neuer Weise zur Abgrenzung eines Bezirks zu verwenden[3]. Aber dabei kommt nichts wesentlich Neues zum Vorschein. Die fruchtbareren Begriffsbestimmungen ziehen Grenzlinien, die noch gar nicht gegeben waren. Was sich aus ihnen schliessen lasse, ist nicht von vornherein zu übersehen; man holt dabei nicht einfach aus dem Kasten wieder heraus, was man hineingelegt hatte. Diese Folgerungen erweitern unsere Kenntnisse, und man sollte sie daher *Kant* zufolge für synthetisch halten; dennoch können sie rein logisch bewiesen werden und sind also analytisch. Sie sind in der That in den Definitionen enthalten, aber wie die Pflanze im Samen, nicht wie der Balken im Hause.

Oft braucht man mehre Definitionen zum Beweise eines Satzes, der folglich in keiner einzelnen enthalten ist und doch aus allen zusammen rein logisch folgt.

345

ENGLISH

not exhaustive. He is thinking of the case of the universal affirmative judgment. There one can speak of a subject concept and ask whether the predicate concept is contained in it—by virtue of the definition. But what if the subject is an individual object? What if it is an existential judgment? Then there can be no talk at all of a subject concept in this sense. *Kant* seems to think of the concept as determined by coordinate characteristic marks; but that is one of the least fruitful ways of forming concepts.

If one surveys the definitions given above, one will hardly find one of this kind. The same holds of the really fruitful definitions in mathematics, for example that of the continuity of a function. There we do not have a series of coordinate characteristic marks, but a more intimate, I would say more organic, connection of the determinations. The difference can be made intuitive by a geometrical picture. If the concepts (or their extensions) are represented by regions of a plane, then the concept defined by coordinate characteristic marks corresponds to the region common to all the regions of the marks; it is enclosed by parts of their boundaries.

With such a definition, then, it is a matter—to speak figuratively—of using lines already given in a new way to mark off a region[3]. But nothing essentially new comes to light in this. The more fruitful definitions of concepts draw boundary lines that were not yet given at all. What can be inferred from them cannot be surveyed in advance; one is not simply taking out of the box again what one had put into it. These consequences extend our knowledge, and so, according to *Kant*, one ought to regard them as synthetic; yet they can be proved purely logically and are therefore analytic. They are in fact contained in the definitions, but like the plant in the seed, not like the beam in the house.

Often several definitions are needed to prove a proposition, which is consequently contained in no single one of them and yet follows purely logically from all of them together.

3

[1] A. a. O. III. S. 39 u. ff.

[1] Op. cit. III, pp. 39 ff.

GERMAN

ENGLISH

89.1 Ich muss auch der Allgemeinheit der Behauptung *Kants*[1] widersprechen: ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben werden. Die Null, die Eins sind Gegenstände, die uns nicht sinnlich gegeben werden können. Auch Diejenigen, welche die kleineren Zahlen für anschaulich halten, werden doch einräumen müssen, dass ihnen keine der Zahlen, die grösser als 1000^(1000^1000) sind, anschaulich gegeben werden können, und dass wir dennoch Mancherlei von ihnen wissen. Vielleicht hat *Kant* das Wort »Gegenstand« in etwas anderm Sinne gebraucht; aber dann fallen die Null, die Eins, unser ∞_1 ganz aus seiner Betrachtung heraus; denn Begriffe sind sie auch nicht, und auch von Begriffen verlangt *Kant*[1], dass man ihnen den Gegenstand in der Anschauung beifüge.

I must also contradict the generality of *Kant's* assertion[1] that without sensibility no object would be given to us. Zero and one are objects that cannot be given to us through the senses. Even those who regard the smaller numbers as intuitable will have to concede that none of the numbers greater than 1000^(1000^1000) can be given to them in intuition, and that we nevertheless know a good deal about them. Perhaps *Kant* used the word "object" in a somewhat different sense. But then zero, one and our ∞_1 fall entirely outside his consideration, for they are not concepts either, and of concepts too *Kant*[1] demands that we attach to them their object in intuition.

6

89.2 Um nicht den Vorwurf einer kleinlichen Tadelsucht gegenüber einem Geiste auf mich zu laden, zu dem wir nur mit dankbarer Bewunderung aufblicken können, glaube ich auch die Uebereinstimmung hervorheben zu müssen, welche weit überwiegt. Um nur das hier zunächst Liegende zu berühren, sehe ich ein grosses Verdienst *Kants* darin, dass er die Unterscheidung von synthetischen und analytischen Urtheilen gemacht hat. Indem er die geometrischen Wahrheiten synthetisch und a priori nannte, hat er ihr wahres Wesen enthüllt. Und dies ist noch jetzt werth wiederholt zu werden, weil es noch oft verkannt wird. Wenn *Kant* sich hinsichtlich der Arithmetik geirrt hat, so thut das, glaube ich, seinem Verdienste keinen wesentlichen Eintrag.

Ihm kam es darauf an, dass es synthetische Urtheile a priori giebt; ob sie nur in der Geometrie oder auch in der Arithmetik vorkommen, ist von geringerer Bedeutung.

I do not want to bring on myself the reproach of petty fault-finding toward a mind we can only look up to with grateful admiration. So I believe I must also stress our agreement, which far outweighs the disagreement. To touch only on what lies nearest here: I see a great merit of *Kant's* in his having drawn the distinction between synthetic and analytic judgments. In calling geometrical truths synthetic and a priori, he revealed their true nature. And this is still worth repeating today, because it is still often misunderstood. If *Kant* was mistaken about arithmetic, that does not, I think, substantially detract from his merit.

What mattered to him was that there are synthetic judgments a priori. Whether they occur only in geometry or in arithmetic as well is of lesser importance.

THE NEED FOR A GAPLESS PROOF

Only a gapless chain of logical inferences could prove that arithmetic is analytic; hence the Begriffsschrift.

GERMAN

ENGLISH

90.1 Ich erhebe nicht den Anspruch, die analytische Natur der arithmetischen Sätze mehr als wahrscheinlich gemacht

I do not claim to have made the analytic nature of arithmetical propositions more than probable. One can still doubt whether their proof can be car-

4

[2] S. 43 sagt er, dass ein synthetischer Satz nur dann nach dem Satze des Widerspruchs eingesehen werden kann, wenn ein andrer synthetischer Satz vorausgesetzt wird.

[2] On p. 43 he says that a synthetic proposition can be grasped in accordance with the principle of contradiction only if another synthetic proposition is presupposed.

5

[3] Ebenso, wenn die Merkmale durch »oder« verbunden sind.

[3] Likewise when the characteristic marks are joined by "or".

GERMAN

zu haben, weil man immer noch zweifeln kann, ob ihr Beweis ganz aus rein logischen Gesetzen geführt werden könne, ob sich nicht irgendwo ein Beweisgrund andrer Art unvermerkt einmische. Dies Bedenken wird auch durch die Andeutungen nicht vollständig entkräftet, die ich für den Beweis einiger Sätze gegeben habe; es kann nur durch eine lückenlose Schlusskette gehoben werden, sodass kein Schritt geschieht, der nicht einer von wenigen als rein logisch anerkannten Schlussweisen gemäss ist.

So ist bis jetzt kaum ein Beweis geführt worden, weil der Mathematiker zufrieden ist, wenn jeder Uebergang zu einem neuen Urtheile als richtig einleuchtet, ohne nach der Natur dieses Einleuchtens zu fragen, ob es logisch oder anschaulich sei. Ein solcher Fortschritt ist oft sehr zusammengesetzt und mehren einfachen Schlüssen gleichwerthig, neben welchen noch aus der Anschauung etwas einfliessen kann. Man geht sprungweise vor, und daraus entsteht die scheinbar überreiche Mannichfaltigkeit der Schlussweisen in der Mathematik; denn je grösser die Sprünge sind, desto vielfachere Combinationen aus einfachen Schlüssen und Anschauungsaxiomen können sie vertreten.

Dennoch leuchtet uns ein solcher Uebergang oft unmittelbar ein, ohne dass uns die Zwischenstufen zum Bewusstsein kommen, und da er sich nicht als eine der anerkannten logischen Schlussweisen darstellt, sind wir sogleich bereit, dies Einleuchten für ein anschauliches und die erschlossene Wahrheit für eine synthetische zu halten, auch dann, wenn der Geltungsbereich offenbar über das Anschauliche hinausreicht.

90.2 Auf diesem Wege ist es nicht möglich, das auf Anschauung beruhende Synthetische von dem Analytischen rein zu scheiden. Es gelingt so auch nicht, die Axiome der Anschauung mit Sicherheit vollständig zusammenzustellen, sodass jeder mathematische Beweis allein aus diesen Axiomen nach den logischen Gesetzen geführt werden kann.

91.1 Die Forderung ist also unabweisbar, alle Sprünge in der Schlussfolgerung zu vermeiden. Dass ihr so schwer zu genügen ist, liegt an der Langwierigkeit eines schrittweisen Vorgehens. Jeder nur etwas verwickeltere Beweis droht eine ungeheuerliche Länge anzunehmen. Dazu kommt, dass die übergrosse Mannichfaltigkeit der in der Sprache ausgeprägten logischen Formen es

ENGLISH

ried out entirely from purely logical laws, and whether a ground of proof of some other kind might not slip in unnoticed somewhere. Nor is this misgiving fully dispelled by the indications I have given for the proof of some propositions. It can be removed only by a gapless chain of inferences, such that no step is taken that does not conform to one of a few modes of inference recognized as purely logical.

Hardly a single proof has so far been carried out in this way. The mathematician is satisfied if every transition to a new judgment is evidently correct, without asking about the nature of this evidence, whether it is logical or intuitive. Such a step is often very complex and equivalent to several simple inferences, alongside which something from intuition may also flow in. One proceeds by leaps, and from this arises the apparently overabundant variety of modes of inference in mathematics. For the bigger the leaps, the more manifold the combinations of simple inferences and axioms of intuition they can stand for.

Nevertheless such a transition is often immediately evident to us, without our becoming conscious of the intermediate steps. And since it does not present itself as one of the recognized logical modes of inference, we are at once ready to take this evidence for intuitive and the inferred truth for synthetic, even when its domain of validity obviously extends beyond what can be intuited.

In this way it is not possible to separate cleanly the synthetic, which rests on intuition, from the analytic. Nor does one succeed in this way in compiling, with certainty, a complete list of the axioms of intuition, such that every mathematical proof can be carried out from these axioms alone according to the logical laws.

The demand that all leaps in inference be avoided is therefore inescapable. That it is so hard to satisfy is due to the tediousness of proceeding step by step. Every proof that is even slightly involved threatens to become monstrously long. In addition, the excessive variety of logical forms that have taken shape in language makes it difficult to

6

[1] A. a. O. III, S. 82.

[1] Op. cit. III, p. 82.

	GERMAN	ENGLISH
	erschwert, einen Kreis von Schlussweisen abzugrenzen, der für alle Fälle genügt und leicht zu übersehen ist.	mark off a range of modes of inference that suffices for all cases and is easy to survey.
91.2	Um diese Uebelstände zu vermindern, habe ich meine Begriffsschrift erdacht. Sie soll grössere Kürze und Uebersichtlichkeit des Ausdrucks erzielen und sich in wenigen festen Formen nach Art einer Rechnung bewegen, sodass kein Uebergang gestattet wird, der nicht den ein für alle Mal aufgestellten Regeln gemäss ist[1]. Es kann sich dann kein Beweisgrund unbemerkt einschleichen. Ich habe so, ohne der Anschauung ein Axiom zu entlehnen, einen Satz bewiesen[2], den man beim ersten Blick für einen synthetischen halten möchte, welchen ich hier so aussprechen will:	To lessen these drawbacks I devised my *Begriffsschrift*. It is meant to achieve greater brevity and perspicuity of expression and to move within a few fixed forms, in the manner of a calculation, so that no transition is permitted that does not conform to rules laid down once and for all[1]. No ground of proof can then creep in unnoticed. In this way, without borrowing a single axiom from intuition, I have proved a proposition[2] that one might at first glance take for a synthetic one. I will state it here as follows:
78		
91.3	Wenn die Beziehung jedes Gliedes einer Reihe zum nächstfolgenden eindeutig ist, und wenn m und y in dieser Reihe auf x folgen, so geht y dem m in dieser Reihe vorher oder fällt mit ihm zusammen oder folgt auf m.	If the relation of every member of a series to the next one is single-valued, and if m and y follow x in this series, then y either precedes m in this series, or coincides with it, or follows m.
91.4	Aus diesem Beweise kann man ersehen, dass Sätze, welche unsere Kenntnisse erweitern, analytische Urtheile enthalten können[1].	From this proof one can see that propositions which extend our knowledge can contain analytic judgments[1].
9		

OTHER NUMBERS

Frege criticizes formal theories of negative, fractional and complex numbers.

	GERMAN	ENGLISH
92.1	Wir haben unsere Betrachtung bisher auf die Anzahlen beschränkt. Werfen wir nun noch einen Blick auf die andern Zahlengattungen und versuchen wir für dies weitere Feld nutzbar zu machen, was wir auf dem engern erkannt haben!	So far we have confined our consideration to the Numbers. Let us now also cast a glance at the other kinds of number, and try to make what we have learned in the narrower field useful for this wider one!
92.2		

7

[1] Sie soll jedoch nicht nur die logische Form wie die boolesche Bezeichnungsweise, sondern auch einen Inhalt auszudrücken im Stande sein.

[1] It is meant, however, to be capable of expressing not only the logical form, as Boole's notation does, but also a content.

8

[2] Begriffsschrift, Halle a/S. 1879, S. 86, Formel 133.

[2] *Begriffsschrift*, Halle a/S. 1879, p. 86, formula 133.

9

[1] Diesen Beweis wird man immer noch viel zu weitläufig finden, ein Nachtheil, der vielleicht die fast unbedingte Sicherheit vor einem Fehler oder einer Lücke mehr als aufzuwiegen scheint. Mein Zweck war damals Alles auf die möglichst geringe Zahl von möglichst einfachen logischen Gesetzen zurückzuführen. Infolge dessen wendete ich nur eine einzige Schlussweise an. Ich wies aber schon damals im Vorworte S. VII darauf hin, dass für die weitere Anwendung es sich empfehlen würde, mehr Schlussweisen zuzulassen. Dies kann geschehen ohne der Bündigkeit der Schlusskette zu schaden, und so lässt sich eine bedeutende Abkürzung erreichen.

[1] This proof will still be found far too long-winded, a drawback that may perhaps seem to more than outweigh its almost absolute security against error or gaps. My aim at the time was to reduce everything to the smallest possible number of the simplest possible logical laws. As a result I used only a single mode of inference. But even then I pointed out in the preface, p. VII, that for further application it would be advisable to admit more modes of inference. This can be done without impairing the cogency of the chain of inferences, and in this way a considerable abbreviation can be achieved.

GERMAN

Um den Sinn der Frage nach der Möglichkeit einer gewissen Zahl klar zu machen, sagt *Hankel*[1]:

92.3 »Ein Ding, eine Substanz, die selbständig ausserhalb des denkenden Subjects und der sie veranlassenden Objecte existirte, ein selbständiges Princip, wie etwa bei den Pythagoräern, ist die Zahl heute nicht mehr. Die Frage von der Existenz kann daher nur auf das denkende Subject oder die gedachten Objecte, deren Beziehungen die Zahlen darstellen, bezogen werden. Als unmöglich gilt dem Mathematiker streng genommen nur das, was logisch unmöglich ist, d. h. sich selbst widerspricht. Dass in diesem Sinne unmögliche Zahlen nicht zugelassen werden können, bedarf keines Beweises.

Sind aber die betreffenden Zahlen logisch möglich, ihr Begriff klar und bestimmt definirt und also ohne Widerspruch, so kann jene Frage nur darauf hinauskommen, ob es im Gebiete des Realen oder des in der Anschauung Wirklichen, des Actuellen ein Substrat derselben, ob es Objecte gebe, an welchen die Zahlen, also die intellectuellen Beziehungen der bestimmten Art zur Erscheinung kommen«.

93.1 Bei dem ersten Satze kann man zweifeln, ob nach *Hankel* die Zahlen in dem denkenden Subjecte oder in den sie veranlassenden Objecten oder in beiden existiren. Im räumlichen Sinne sind sie jedenfalls weder innerhalb noch ausserhalb weder des Subjects noch eines Objects. Wohl aber sind sie in dem Sinne ausserhalb des Subjects, dass sie nicht subjectiv sind. Während jeder nur seinen Schmerz, seine Lust, seinen Hunger fühlen, seine Ton- und Farbenempfindungen haben kann, können die Zahlen gemeinsame Gegenstände für Viele sein, und zwar sind sie für Alle genau dieselben, nicht nur mehr oder minder ähnliche innere Zustände von Verschiedenen.

Wenn *Hankel* die Frage von der Existenz auf das denkende Subject beziehen will, so scheint er sie damit zu einer psychologischen zu machen, was sie in keiner Weise ist. Die Mathematik beschäftigt sich nicht mit der Natur unserer Seele, und wie irgendwelche psychologische Fragen beantwortet werden, muss für sie völlig gleichgiltig sein.

ENGLISH

To make clear the sense of the question about the possibility of a certain number, *Hankel*[1] says:

"Number today is no longer a thing, a substance existing self-subsistently outside the thinking subject and the objects that give rise to it, a self-subsistent principle, as it was, say, for the Pythagoreans. The question of existence can therefore only be referred to the thinking subject or to the objects thought, whose relations the numbers represent. Strictly speaking, the mathematician counts as impossible only what is logically impossible, i.e. what contradicts itself. That numbers impossible in this sense cannot be admitted requires no proof.

But if the numbers in question are logically possible, and their concept is clearly and determinately defined and therefore free of contradiction, then that question can only come down to this: whether there is, in the domain of the real or of what is actual in intuition, of the actual, a substrate for them; whether there are objects in which the numbers, that is, the intellectual relations of the specific kind, make their appearance."

With the first sentence one may be in doubt whether, according to *Hankel*, the numbers exist in the thinking subject, or in the objects that give rise to them, or in both. In the spatial sense, at any rate, they are neither inside nor outside either the subject or any object. They are, however, outside the subject in the sense that they are not subjective. Each of us can feel only his own pain, his own pleasure, his own hunger, and can have only his own sensations of sound and color. Numbers, by contrast, can be common objects for many, and indeed they are exactly the same for all, not merely more or less similar inner states of different people.

If *Hankel* wants to refer the question of existence to the thinking subject, he seems thereby to make it a psychological question, which it in no way is. Mathematics is not concerned with the nature of our mind, and how any psychological questions are answered must be a matter of complete indifference to it.

[1] A. a. O. S. 6 u. 7.

[1] Op. cit. pp. 6 and 7.

GERMAN

ENGLISH

94.1 Auch dass dem Mathematiker nur, was sich selbst widerspricht, als unmöglich gelte, muss beanstandet werden. Ein Begriff ist zulässig, auch wenn seine Merkmale einen Widerspruch enthalten; man darf nur nicht voraussetzen, dass etwas unter ihn falle. Aber daraus, dass der Begriff keinen Widerspruch enthält, kann noch nicht geschlossen werden, dass etwas unter ihn falle. Wie soll man übrigens beweisen, dass ein Begriff keinen Widerspruch enthalte? Auf der Hand liegt das keineswegs immer; daraus, dass man keinen Widerspruch sieht, folgt nicht, dass keiner da ist, und die Bestimmtheit der Definition leistet keine Gewähr dafür. *Hankel* beweist[1], dass ein höheres begrenztes complexes Zahlensystem als das gemeine, das allen Gesetzen der Addition und Multiplication unterworfen wäre, einen Widerspruch enthält.

The claim that the mathematician counts as impossible only what contradicts itself must also be challenged. A concept is admissible even if its characteristic marks contain a contradiction; one must only not presuppose that something falls under it. But from the fact that a concept contains no contradiction it cannot yet be inferred that something falls under it. How, moreover, is one to prove that a concept contains no contradiction? This is by no means always obvious. From the fact that one sees no contradiction it does not follow that there is none, and the determinateness of the definition offers no guarantee of it. *Hankel* proves[1] that a finite complex number system of higher order than the ordinary one, subject to all the laws of addition and multiplication, contains a contradiction.

Das muss eben bewiesen werden; man sieht es nicht sogleich. Bevor dies geschehen, könnte immerhin jemand unter Benutzung eines solchen Zahlensystems zu wunderbaren Ergebnissen gelangen, deren Begründung nicht schlechter wäre, als die, welche *Hankel*[2] von den Determinantensätzen mittels der alternirenden Zahlen giebt; denn wer bürgt dafür, dass nicht auch in deren Begriffe ein versteckter Widerspruch enthalten ist? Und selbst, wenn man einen solchen allgemein für beliebig viele alternirende Einheiten ausschliessen könnte, würde immer noch nicht folgen, dass es solche Einheiten gebe. Und grade dies brauchen wir. Nehmen wir als Beispiel den 18. Satz des 1. Buches von Euklids Elementen:

But that has to be proved; one does not see it at once. Before this has been done, someone using such a number system might well arrive at wonderful results, whose justification would be no worse than the one *Hankel*[2] gives for the theorems on determinants by means of the alternating numbers. For who can guarantee that a hidden contradiction is not contained in their concept too? And even if one could rule out such a contradiction in general, for arbitrarily many alternating units, it still would not follow that there are such units. And it is precisely this that we need. Let us take as an example the 18th proposition of Book I of Euclid's *Elements*:

11 12

94.2 In jedem Dreiecke liegt der grössern Seite der grössere Winkel gegenüber.

In every triangle the greater angle lies opposite the greater side.

94.3 Um das zu beweisen, trägt *Euklid* auf der grössern Seite AC ein Stück AD gleich der kleinern Seite AB ab und beruft sich dabei auf eine frühere Construction. Der Beweis würde in sich zusammenfallen, wenn es einen solchen Punkt nicht gäbe, und es genügt nicht, dass man in dem Begriffe »Punkt auf AC, dessen Entfernung von A gleich B ist« keinen Widerspruch entdeckt. Es wird nun B

To prove this, *Euclid* marks off on the greater side AC a segment AD equal to the smaller side AB, appealing in doing so to an earlier construction. The proof would collapse if there were no such point, and it is not enough that one discovers no contradiction in the concept "point on AC whose distance from A is equal to B". B is then joined to D.

11

[1] A. a. O. S. 106 u. 107.

[1] Op. cit. pp. 106 and 107.

12

[2] A. a. O. § 35.

[2] Op. cit. § 35.

GERMAN

mit D verbunden. Auch dass es eine solche Gerade giebt, ist ein Satz, auf den sich der Beweis stützt.

95.1 Streng kann die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes wohl nur durch den Nachweis dargelegt werden, dass etwas unter ihn falle. Das Umgekehrte würde ein Fehler sein. In diesen verfällt *Hankel*, wenn er in Bezug auf die Gleichung x + b = c sagt[1]:

13

95.2 »Es liegt auf der Hand, dass es, wenn b > c ist, keine Zahl x in der Reihe 1, 2, 3, … giebt, welche die betreffende Aufgabe löst: die Subtraction ist dann *unmöglich*. Nichts hindert uns jedoch, dass wir in diesem Falle die Differenz (c – b) als ein Zeichen *ansehen*, welches die Aufgabe löst, und mit welchem genau so zu operiren ist, als wenn es eine numerische Zahl aus der Reihe 1, 2, 3, … wäre.«

95.3 Uns hindert allerdings etwas (2 – 3), ohne Weiteres als Zeichen anzusehen, welches die Aufgabe löst; denn ein leeres Zeichen löst eben die Aufgabe nicht; ohne einen Inhalt ist es nur Tinte oder Druckerschwärze auf Papier, hat als solche physikalische Eigenschaften, aber nicht die, um 3 vermehrt 2 zu geben. Es wäre eigentlich gar kein Zeichen, und sein Gebrauch als solches wäre ein logischer Fehler. Auch in dem Falle, wo c > b, ist nicht das Zeichen (»c – b«) die Lösung der Aufgabe, sondern dessen Inhalt.

96.1 Ebensogut könnte man sagen: unter den bisher bekannten Zahlen giebt es keine, welche die beiden Gleichungen x + 1 = 2 und x + 2 = 1 zugleich befriedigt; aber nichts hindert uns ein Zeichen einzuführen, das die Aufgabe löst. Man wird sagen: die Aufgabe enthält ja einen Widerspruch. Freilich, wenn man als Lösung eine reelle oder gemeine complexe Zahl verlangt; aber erweitern wir doch unser Zahlsystem, schaffen wir doch Zahlen, die den Anforderungen genügen! Warten wir ab, ob uns jemand einen Widerspruch nachweist! Wer kann wissen, was bei diesen neuen Zahlen möglich ist?

Die Eindeutigkeit der Subtraction werden wir dann freilich nicht aufrecht erhalten können; aber wir müssen ja auch die Eindeutigkeit des Wurzelziehens aufgeben, wenn wir die negativen Zahlen einführen wollen; durch die complexen Zahlen wird das Logarithmiren vieldeutig.

ENGLISH

That there is such a straight line is likewise a proposition on which the proof relies.

Strictly, the consistency of a concept can presumably be established only by showing that something falls under it. The converse would be a mistake. *Hankel* falls into this mistake when he says, with reference to the equation x + b = c[1]:

“It is obvious that if b > c there is no number x in the series 1, 2, 3, … that solves the problem in question: subtraction is then *impossible*. Nothing prevents us, however, from *regarding* the difference (c – b) in this case as a sign that solves the problem, and with which we are to operate exactly as if it were a numerical number from the series 1, 2, 3, ….”

Something does indeed prevent us from simply regarding (2 – 3) as a sign that solves the problem: an empty sign does not solve the problem. Without a content it is only ink or printer’s ink on paper; as such it has physical properties, but not the property of giving 2 when increased by 3. It would really not be a sign at all, and its use as one would be a logical mistake. Even in the case where c > b, it is not the sign (“c – b”) that is the solution of the problem, but its content.

One could just as well say: among the numbers known so far there is none that satisfies both equations x + 1 = 2 and x + 2 = 1 at once; but nothing prevents us from introducing a sign that solves the problem. It will be objected: but the problem contains a contradiction. Certainly, if one demands a real or an ordinary complex number as the solution. But let us just extend our number system, let us create numbers that meet the requirements! Let us wait and see whether anyone can show us a contradiction! Who can know what is possible with these new numbers?

We shall then, of course, not be able to maintain the uniqueness of subtraction. But then we also have to give up the uniqueness of taking roots if we want to introduce the negative numbers, and

13

[1] A. a. O. S. 5. Aehnlich E. Kossak, a. a. O. S. 17 unten.

[1] Op. cit. p. 5. Similarly E. Kossak, op. cit. p. 17, bottom.

GERMAN

ENGLISH

the complex numbers make taking logarithms many-valued.

96.2 Schaffen wir auch Zahlen, welche divergirende Reihen zu summiren gestatten! Nein! auch der Mathematiker kann nicht beliebig etwas schaffen, so wenig wie der Geograph; auch er kann nur entdecken, was da ist, und es benennen.

Let us also create numbers that allow divergent series to be summed! No! The mathematician cannot create things at will, any more than the geographer can; he too can only discover what is there, and name it.

96.3 An diesem Irrthum krankt die formale Theorie der Brüche, der negativen, der complexen Zahlen[1]. Man stellt die Forderung, dass die bekannten Rechnungsregeln für die neu einzuführenden Zahlen möglichst erhalten bleiben, und leitet daraus allgemeine Eigenschaften und Beziehungen ab. Stösst man nirgends auf einen Widerspruch, so hält man die Einführung der neuen Zahlen für gerechtfertigt, als ob ein Widerspruch nicht dennoch irgendwo versteckt sein könnte, und als ob Widerspruchslosigkeit schon Existenz wäre.

This error afflicts the formal theory of fractions, of negative numbers and of complex numbers[1]. One demands that the familiar rules of calculation be preserved, as far as possible, for the numbers to be newly introduced, and derives general properties and relations from this. If one nowhere runs into a contradiction, one regards the introduction of the new numbers as justified, as if a contradiction could not still be hidden somewhere, and as if freedom from contradiction were already existence.

14

97.1 Dass dieser Fehler so leicht begangen wird, liegt wohl an einer mangelhaften Unterscheidung der Begriffe von den Gegenständen. Nichts hindert uns, den Begriff »Quadratwurzel aus -1« zu gebrauchen; aber wir sind nicht ohne Weiteres berechtigt, den bestimmten Artikel davor zu setzen und den Ausdruck »die Quadratwurzel aus -1« als einen sinnvollen anzusehen. Wir können unter der Voraussetzung, dass $i^2 = -1$ sei, die Formel beweisen, durch welche der Sinus eines Vielfachen des Winkels α durch Sinus und Cosinus von α selbst ausgedrückt wird; aber wir dürfen nicht vergessen, dass der Satz dann die Bedingung $i^2 = -1$ mit sich führt, welche wir nicht ohne Weiteres weglassen dürfen.

Gäbe es gar nichts, dessen Quadrat -1 wäre, so brauchte die Gleichung kraft unseres Beweises nicht richtig zu sein[1], weil die Bedingung $i^2 = -1$ niemals erfüllt wäre, von der ihre Geltung abhängig erscheint. Es wäre so, als ob wir in einem geometrischen Beweise eine Hilfslinie benutzt hätten, die gar nicht gezogen werden kann.

That this mistake is so easily made is probably due to an inadequate distinction between concepts and objects. Nothing prevents us from using the concept “square root of -1”. But we are not straightaway entitled to put the definite article in front of it and to regard the expression “the square root of -1” as meaningful. On the assumption that $i^2 = -1$, we can prove the formula that expresses the sine of a multiple of the angle α in terms of the sine and cosine of α itself. But we must not forget that the proposition then carries with it the condition $i^2 = -1$, which we may not simply drop.

If there were nothing at all whose square was -1, the equation would not need to be correct by virtue of our proof[1], because the condition $i^2 = -1$, on which its validity appears to depend, would never be fulfilled. It would be as if we had used, in a geometrical proof, an auxiliary line that cannot be drawn at all.

15

98.1 *Hankel*[1] führt zwei Arten von Operationen ein, die er lytische und thetische nennt, und die er durch gewisse

Hankel[1] introduces two kinds of operation, which he calls lytic and thetic, and which he determines by certain properties these operations are supposed to have. There is nothing to be said against

14

[1] Aehnlich steht es bei *Cantors* unendlichen Anzahlen.

[1] Things are similar with *Cantor's* infinite Numbers.

GERMAN

Eigenschaften bestimmt, welche diese Operationen haben sollen. Dagegen ist nichts zu sagen, so lange man nur nicht voraussetzt, dass es solche Operationen und Gegenstände giebt, welche deren Ergebnisse sein können[2]. Später[3] bezeichnet er eine thetische, vollkommen eindeutige, associative Operation durch (a + b) und die entsprechende ebenfalls vollkommen eindeutige lytische durch (a – b). Eine solche Operation? welche? eine beliebige? dann ist dies keine Definition von (a + b); und wenn es nun keine giebt?

Wenn das Wort »Addition« noch keine Bedeutung hätte, wäre es logisch zulässig zu sagen: eine solche Operation wollen wir eine Addition nennen; aber man darf nicht sagen: eine solche Operation soll die Addition heissen und durch (a + b) bezeichnet werden, bevor es feststeht, dass es eine und nur eine einzige giebt. Man darf nicht auf der einen Seite einer Definitionsgleichung den unbestimmten und auf der andern den bestimmten Artikel gebrauchen. Dann sagt *Hankel* ohne Weiteres: »der Modul der Operation«, ohne bewiesen zu haben, dass es einen und nur einen giebt.

171819

99.1 Kurz diese rein formale Theorie ist unzureichend. Das Werthvolle an ihr ist nur dies. Man beweist, dass wenn Operationen gewisse Eigenschaften wie die Associativität und die Commutativität haben, gewisse Sätze von ihnen gelten. Man zeigt nun, dass die Addition und Multiplication, welche man schon kennt, diese Eigenschaften haben, und kann nun sofort jene Sätze von ihnen aussprechen, ohne den Beweis in jedem einzelnen Falle weitläufig zu wiederholen. Erst durch diese Anwendung auf anderweitig gegebene Operationen, gelangt man zu den bekannten Sätzen der Arithmetik. Keineswegs darf man aber glauben die Addition und die Multiplication auf diesem Wege einführen zu können. Man giebt nur eine Anleitung für die Definitionen, nicht diese selbst.

ENGLISH

this, as long as one does not presuppose that there are such operations, and objects that can be their results[2]. Later[3] he denotes a thetic, completely unique, associative operation by (a + b), and the corresponding, likewise completely unique, lytic operation by (a – b). Such an operation? Which one? Any one at all? Then this is no definition of (a + b). And what if there is none?[16]

If the word “addition” had no meaning yet, it would be logically admissible to say: we will call such an operation an addition. But one may not say: such an operation is to be called the addition and denoted by (a + b), before it is established that there is one and only one. One may not use the indefinite article on one side of a defining equation and the definite article on the other. Then *Hankel* says, without further ado, “the modulus of the operation”, without having proved that there is one and only one.

In short, this purely formal theory is inadequate. What is valuable in it is only this. One proves that if operations have certain properties, such as associativity and commutativity, certain propositions hold of them. One then shows that addition and multiplication, which are already known, have these properties, and can at once state those propositions of them without laboriously repeating the proof in each individual case. Only through this application to operations given in some other way does one arrive at the familiar propositions of arithmetic. But one must by no means believe that addition and multiplication can be introduced in

15

[1] Auf einem andern Wege möchte sie immerhin streng bewiesen werden können.

[1] It might nonetheless be possible to prove it rigorously by some other route.

16 Hankel’s terms, from Greek: “thetic” (positing) for direct operations such as addition, “lytic” (dissolving) for their inverses such as subtraction.

17

[1] A. a. O. S. 18.

[1] Op. cit. p. 18.

18

[2] Das thut Hankel eigentlich schon durch den Gebrauch der Gleichung Θ (c, b) = a.

[2] Hankel really does this already by using the equation Θ (c, b) = a.

19

[3] A. a. O. S. 29.

[3] Op. cit. p. 29.

GERMAN

ENGLISH

this way. One gives only a guide for the definitions, not the definitions themselves.

Man sagt: der Name »Addition« soll nur einer thetischen, vollkommen eindeutigen, associativen Operation gegeben werden, womit diejenige, welche nun so heissen soll, noch gar nicht angegeben ist. Danach stände nichts im Wege, die Multiplication Addition zu nennen und durch (a + b) zu bezeichnen, und niemand könnte mit Bestimmtheit sagen, ob 2 + 3 5 oder 6 wäre.

It is said: the name "addition" is to be given only to a thetic, completely unique, associative operation. But this does not yet specify at all which operation is now to bear this name. On this account nothing would stand in the way of calling multiplication addition and denoting it by (a + b), and no one could say with certainty whether 2 + 3 was 5 or 6.

100.1 Wenn wir diese rein formale Betrachtungsweise aufgeben, so kann sich aus dem Umstande, dass gleichzeitig mit der Einführung von neuen Zahlen die Bedeutung der Wörter »Summe« und »Product« erweitert wird, ein Weg darzubieten scheinen. Man nimmt einen Gegenstand, etwa den Mond, und erklärt: der Mond mit sich selbst multiplicirt sei -1. Dann haben wir in dem Monde eine Quadratwurzel aus -1. Diese Erklärung scheint gestattet, weil aus der bisherigen Bedeutung der Multiplication der Sinn eines solchen Products noch gar nicht hervorgeht und also bei der Erweiterung dieser Bedeutung beliebig festgesetzt werden kann. Aber wir brauchen auch die Producte einer reellen Zahl mit der Quadratwurzel aus -1. Wählen wir deshalb lieber den Zeitraum einer Secunde zu einer Quadratwurzel aus -1 und bezeichnen ihn durch i!

If we give up this purely formal approach, a way may seem to present itself in the fact that the meaning of the words "sum" and "product" is extended at the same time as new numbers are introduced. One takes an object, say the moon, and declares: the moon multiplied by itself is to be -1. Then in the moon we have a square root of -1. This definition seems permissible, because the sense of such a product does not yet follow at all from the previous meaning of multiplication, and can therefore be stipulated at will when this meaning is extended. But we also need the products of a real number with the square root of -1. So let us rather choose the time interval of one second as a square root of -1, and denote it by i!

Dann werden wir unter 3 i den Zeitraum von 3 Secunden verstehen u. s. w.[1] Welchen Gegenstand werden wir dann etwa durch 2 + 3i bezeichnen? Welche Bedeutung würde dem Pluszeichen in diesem Falle zu geben sein? Nun das muss allgemein festgesetzt werden, was freilich nicht leicht sein wird. Doch nehmen wir einmal an, dass wir allen Zeichen von der Form a + bi einen Sinn gesichert hätten, und zwar einen solchen, dass die bekannten Additionssätze gelten! Dann müssten wir ferner festsetzen, dass allgemein (a + bi) (c + di) = ac − bd + i (ad + bc) sein solle, wodurch wir die Multiplication weiter bestimmen würden.

Then by 3 i we shall understand the time interval of 3 seconds, and so on.[1] What object, then, shall we denote by, say, 2 + 3i? What meaning would have to be given to the plus sign in this case? Well, that must be stipulated in general, which will admittedly not be easy. But let us suppose that we had secured a sense for all signs of the form a + bi, and indeed one such that the familiar laws of addition hold! Then we should further have to stipulate that in general (a + bi) (c + di) = ac − bd + i (ad + bc), thereby determining multiplication further.

20

101.1 Nun könnten wir die Formel für cos (nα) beweisen, wenn wir wüssten, dass aus der Gleichheit complexer Zahlen die Gleichheit der reellen Theile folgt. Das müsste aus

Now we could prove the formula for cos (nα) if we knew that the identity of the real parts follows from the identity of complex numbers. That would

20

[1] Mit demselben Rechte könnten wir auch ein gewisses Electricitätsquantum, einen gewissen Flächeninhalt u. s. w. zu Quadratwurzeln aus -1 wählen, müssten diese verschiedenen Wurzeln dann auch selbstverständlich verschieden bezeichnen. Dass man so beliebig viele Quadratwurzeln aus -1 scheinbar schaffen kann, wird weniger verwunderlich, wenn man bedenkt, dass die Bedeutung der Quadratwurzel nicht schon vor diesen Festsetzungen unveränderlich feststand, sondern durch sie erst mitbestimmt wird.

[1] With the same right we could also choose a certain quantity of electricity, a certain area, etc., as square roots of -1, but would then of course have to denote these different roots differently. That one can apparently create as many square roots of -1 as one likes in this way becomes less surprising when one considers that the meaning of the square root was not already unalterably fixed before these stipulations, but is only partly determined by them.

GERMAN

dem Sinne von a + bi hervorgehn, den wir hier als vorhanden angenommen haben. Der Beweis würde nur für den Sinn der complexen Zahlen, ihrer Summen und Producte gelten, den wir festgesetzt haben. Da nun für ganzes reelles n und reelles α i gar nicht mehr in der Gleichung vorkommt, so ist man versucht zu schliessen: also ist es ganz gleichgiltig, ob i eine Secunde, ein Millimeter oder was sonst bedeutet, wenn nur unsere Additions- und Multiplicationssätze gelten; auf die allein kommt es an; um das Uebrige brauchen wir uns nicht zu kümmern.

Vielleicht kann man die Bedeutung von a + bi, von Summe und Product in verschiedener Weise so festsetzen, dass jene Sätze bestehen bleiben; aber es ist nicht gleichgiltig, ob man überhaupt einen solchen Sinn für diese Ausdrücke finden kann.

102.1 Man thut oft so, als ob die blosse Forderung schon ihre Erfüllung wäre. Man fordert, dass die Subtraction[1], die Division, die Radicirung immer ausführbar seien, und glaubt damit genug gethan zu haben. Warum fordert man nicht auch, dass durch beliebige drei Punkte eine Gerade gezogen werde? Warum fordert man nicht, dass für ein dreidimensionales complexes Zahlensystem sämmtliche Additions- und Multiplicationssätze gelten wie für ein reelles? Weil diese Forderung einen Widerspruch enthält. Ei so beweise man denn erst, dass jene andern Forderungen keinen Widerspruch enthalten! Ehe man das gethan hat, ist alle vielerstrebte Strenge nichts als eitel Schein und Dunst.

21

102.2 In einem geometrischen Lehrsatze kommt die zum Beweise etwa gezogene Hilfslinie nicht vor. Vielleicht sind mehre möglich z. B., wenn man einen Punkt willkührlich wählen kann. Aber wie entbehrlich auch jede einzelne sein mag, so hängt doch die Beweiskraft daran, dass man eine Linie von der verlangten Beschaffenheit ziehen könne. Die blosse Forderung genügt nicht. So ist es auch in unserm Falle für die Beweiskraft nicht gleichgiltig, ob »a + bi« einen Sinn hat oder blosse Druckerschwärze ist. Es reicht dazu nicht hin, zu verlangen, es solle einen Sinn haben, oder zu sagen, der Sinn sei die Summe von a und bi, wenn man nicht vorher erklärt hat, was »Summe« in diesem Falle bedeutet, und wenn man den Gebrauch des bestimmten Artikels nicht gerechtfertigt hat.

ENGLISH

have to emerge from the sense of a + bi, which we have here assumed to exist. The proof would hold only for the sense of complex numbers, of their sums and products, that we have stipulated. Now, since for integral real n and real α, i no longer occurs in the equation at all, one is tempted to conclude: so it is quite immaterial whether i means a second, a millimeter or anything else, as long as our laws of addition and multiplication hold; they alone matter; we need not worry about the rest.

Perhaps the meaning of a + bi, of sum and of product can be stipulated in various ways such that those laws remain in force. But it is not immaterial whether one can find any such sense for these expressions at all.

People often act as if the mere demand were already its fulfillment. One demands that subtraction[1], division and the extraction of roots always be performable, and believes that this is enough. Why does one not also demand that a straight line be drawn through any three points? Why does one not demand that all the laws of addition and multiplication hold for a three-dimensional complex number system as they do for the real one? Because this demand contains a contradiction. Well then, let one first prove that those other demands contain no contradiction! Until this has been done, all the much-coveted rigor is nothing but empty show and vapor.

The auxiliary line that may have been drawn for a proof does not occur in the geometrical theorem itself. Perhaps several such lines are possible, e.g. if a point can be chosen arbitrarily. But however dispensable each individual line may be, the force of the proof still depends on its being possible to draw a line of the required kind. The mere demand is not enough. So in our case too it is not immaterial to the force of the proof whether “a + bi” has a sense or is mere printer’s ink. For this it is not sufficient to require that it should have a sense, or to say that its sense is the sum of a and bi, if one has not first explained what “sum” means

21

[1] Vergl. Kossak a. a. O. S. 17.

[1] Cf. Kossak op. cit. p. 17.

GERMAN

ENGLISH

in this case and has not justified the use of the definite article.

103.1 Gegen die von uns versuchte Festsetzung des Sinnes von »i« lässt sich freilich Manches einwenden. Wir bringen dadurch etwas ganz Fremdartiges, die Zeit, in die Arithmetik. Die Secunde steht in gar keiner innern Beziehung zu den reellen Zahlen. Die Sätze, welche mittels der complexen Zahlen bewiesen werden, würden Urtheile a posteriori oder doch synthetische sein, wenn es keine andere Art des Beweises gäbe, oder wenn man für i keinen andern Sinn finden könnte. Zunächst muss jedenfalls der Versuch gemacht werden, alle Sätze der Arithmetik als analytische nachzuweisen.

Admittedly, a good deal can be objected to our attempted stipulation of the sense of "i". We thereby bring something quite alien, namely time, into arithmetic. The second stands in no inner relation whatsoever to the real numbers. The propositions proved by means of complex numbers would be judgments a posteriori, or at any rate synthetic, if there were no other kind of proof, or if no other sense could be found for i. At all events, the attempt must first be made to show that all propositions of arithmetic are analytic.

103.2 Wenn *Kossak*[1] in Bezug auf die complexe Zahl sagt:

When *Kossak*[1] says with reference to the complex number:

22

103.3 »Sie ist die zusammengesetzte Vorstellung von verschiedenartigen Gruppen unter einander gleicher Elemente[1]«, so scheint er damit die Einmischung von Fremdartigem vermieden zu haben; aber er scheint es auch nur infolge der Unbestimmtheit des Ausdrucks. Man erhält gar keine Antwort darauf, was 1 + i eigentlich bedeute: die Vorstellung eines Apfels und einer Birne oder die von Zahnweh und Podagra? Beide zugleich kann es doch nicht bedeuten, weil dann 1 + i nicht immer gleich 1 + i wäre. Man wird sagen: das kommt auf die besondere Festsetzung an. Nun, dann haben wir auch in *Kossak's* Satze noch gar keine Definition der complexen Zahl, sondern nur eine allgemeine Anleitung dazu.

Wir brauchen aber mehr; wir müssen bestimmt wissen, was »i« bedeutet, und wenn wir nun jener Anleitung folgend sagen wollten: die Vorstellung einer Birne, so würden wir wieder etwas Fremdartiges in die Arithmetik einführen.

"It is the composite idea of heterogeneous groups of mutually identical elements[1]", he seems thereby to have avoided bringing in anything alien. But he only seems to, and only because the expression is vague. We get no answer at all as to what 1 + i really means: the idea of an apple and a pear, or that of toothache and gout? It cannot mean both at once, since then 1 + i would not always be identical with 1 + i. It will be said: that depends on the particular stipulation. Well then, in *Kossak's* sentence too we still have no definition of the complex number at all, but only a general guide to one.

But we need more: we must know definitely what "i" means. And if, following that guide, we were now to say: the idea of a pear, we would again be introducing something alien into arithmetic.

23

103.4 Das, was man die geometrische Darstellung complexer Zahlen zu nennen pflegt, hat wenigstens den Vorzug vor den bisher betrachteten Versuchen, dass dabei 1 und i nicht ganz ohne Zusammenhang und ungleichartig erscheinen sondern dass die Strecke, welche man als

What is usually called the geometrical representation of complex numbers at least has this advantage over the attempts considered so far: in it 1 and i do not appear wholly unconnected and heterogeneous. Rather, the segment regarded as the rep-

22

[1] A. a. O. S. 17.

[1] Op. cit. p. 17.

23

[1] Man vergleiche über den Ausdruck »Vorstellung« § 27, über »Gruppe« das in Bezug auf »Aggregat« § 23 u. § 25 Gesagte, über die Gleichheit der Elemente §§ 34–39.

[1] On the expression "idea" compare § 27; on "group", what was said about "aggregate" in § 23 and § 25; on the identity of the elements, §§ 34–39.

GERMAN

Darstellung von i betrachtet, in einer gesetzmässigen Beziehung zu der Strecke steht, durch welche 1 dargestellt wird. Uebrigens ist es genau genommen nicht richtig, dass hierbei 1 eine gewisse Strecke, i eine zu ihr senkrechte von gleicher Länge bedeute, sondern »1« bedeutet überall dasselbe. Eine complexe Zahl giebt hier an, wie die Strecke, welche als ihre Darstellung gilt, aus einer gegebenen Strecke (Einheitsstrecke) durch Vervielfältigung, Theilung und Drehung[1] hervorgeht.

Aber auch hiernach erscheint jeder Lehrsatz, dessen Beweis sich auf die Existenz einer complexen Zahl stützen muss, von der geometrischen Anschauung abhängig und also synthetisch.

24

104.1 Wodurch sollen uns denn nun die Brüche, die Irrationalzahlen und die complexen Zahlen gegeben werden? Wenn wir die Anschauung zu Hilfe nehmen, so führen wir etwas Fremdartiges in die Arithmetik ein; wenn wir aber nur den Begriff einer solchen Zahl durch Merkmale bestimmen, wenn wir nur verlangen, dass die Zahl gewisse Eigenschaften habe, so bürgt nichts dafür, dass auch etwas unter den Begriff falle und unsern Anforderungen entspreche, und doch müssen sich grade hierauf Beweise stützen.

104.2 Nun, wie ist es denn bei der Anzahl? Dürfen wir wirklich von 1000^(1000^1000) nicht reden, bevor uns nicht soviele Gegenstände in der Anschauung gegeben sind? Ist es so lange ein leeres Zeichen? Nein! es hat einen ganz bestimmten Sinn, obwohl es psychologisch schon in Anbetracht der Kürze unseres Lebens unmöglich ist, uns soviele Gegenstände vor das Bewusstsein zu führen[1]; aber trotzdem ist 1000^(1000^1000) ein Gegenstand, dessen Eigenschaften wir erkennen können, obgleich er nicht anschaulich ist. Man überzeugt sich davon, indem man bei der Einführung des Zeichens a^n für die Potenz zeigt, dass immer eine und nur eine positive ganze Zahl dadurch ausgedrückt wird, wenn a und n positive ganze Zahlen sind. Wie dies geschehen kann, würde hier zu weit führen, im Einzelnen darzulegen.

Die Weise, wie wir im § 74 die Null, in § 77 die Eins, in § 84 die unendliche Anzahl ∞_1 erklärt haben, und die Andeutung des Beweises, dass auf jede endliche Anzahl in der natürlichen Zahlenreihe eine Anzahl unmittelbar

ENGLISH

resentation of i stands in a law-governed relation to the segment by which 1 is represented. Strictly speaking, incidentally, it is not correct that here 1 means a certain segment and i a segment of equal length perpendicular to it; rather, “1” means the same thing everywhere. A complex number here indicates how the segment that counts as its representation arises from a given segment (the unit segment) by taking multiples, dividing and rotating[1].

But even on this account, every theorem whose proof must rely on the existence of a complex number appears dependent on geometrical intuition, and hence synthetic.

How, then, are fractions, irrational numbers and complex numbers to be given to us? If we enlist the help of intuition, we bring something alien into arithmetic. But if we merely determine the concept of such a number by characteristic marks, if we merely require that the number have certain properties, then nothing guarantees that anything actually falls under the concept and meets our requirements; and yet it is precisely on this that proofs must rely.

Well, how do things stand with Number? Are we really not allowed to speak of 1000^(1000^1000) until that many objects have been given to us in intuition? Is it an empty sign until then? No! It has a perfectly determinate sense, even though it is psychologically impossible, if only because of the shortness of our lives, to bring that many objects before our consciousness[1]. All the same, 1000^(1000^1000) is an object whose properties we can come to know, although it is not intuitable. One convinces oneself of this by showing, when introducing the sign a^n for the power, that it always expresses one and only one positive whole number if a and n are positive whole numbers. To set out in detail how this can be done would take us too far afield here.

The way in which we defined zero in § 74, one in § 77, and the infinite Number ∞_1 in § 84, together with the sketch of the proof that in the series of natural numbers a Number follows directly after

24

[1] Der Einfachheit wegen sehe ich hier vom Incommensurabeln ab.

[1] For simplicity’s sake I disregard incommensurables here.

	GERMAN	ENGLISH
	folgt (§§ 82 u. 83), werden den Weg im Allgemeinen erkennen lassen.	every finite Number (§§ 82 and 83), will show the general path.
25		
104.3	Es wird zuletzt auch bei der Definition der Brüche, complexen Zahlen u. s. w. Alles darauf ankommen, einen beurtheilbaren Inhalt aufzusuchen, der in eine Gleichung verwandelt werden kann, deren Seiten dann eben die neuen Zahlen sind. Mit andern Worten: wir müssen den Sinn eines Wiedererkennungsurtheils für solche Zahlen festsetzen. Dabei sind die Bedenken zu beachten, die wir (§§ 63–68) in Betreff einer solchen Umwandlung erörtert haben. Wenn wir ebenso wie dort verfahren, so werden uns die neuen Zahlen als Umfänge von Begriffen gegeben.	In the end, with the definition of fractions, complex numbers and so on too, everything will come down to seeking out a judgeable content that can be transformed into an equation whose sides are then precisely the new numbers. In other words, we must fix the sense of a recognition judgment for such numbers. In doing so we must heed the misgivings about such a transformation that we discussed in §§ 63–68. If we proceed as we did there, the new numbers will be given to us as extensions of concepts.
105.1	Aus dieser Auffassung der Zahlen[1] erklärt sich, wie mir scheint, leicht der Reiz, den die Beschäftigung mit der Arithmetik und Analysis ausübt. Man könnte wohl mit Abänderung eines bekannten Satzes sagen: der eigentliche Gegenstand der Vernunft ist die Vernunft. Wir beschäftigen uns in der Arithmetik mit Gegenständen, die uns nicht als etwas Fremdes von aussen durch Vermittelung der Sinne bekannt werden, sondern die unmittelbar der Vernunft gegeben sind, welche sie als ihr Eigenstes völlig durchschauen kann[2].	This conception of numbers[1] easily explains, it seems to me, the fascination that working on arithmetic and analysis exerts. Adapting a well-known saying, one might well say: the proper object of reason is reason. In arithmetic we are concerned with objects that become known to us not as something alien, from outside, through the medium of the senses, but which are given directly to reason, which can see through them completely as what is most its own[2].[26]
27 28		
105.2	Und doch, oder vielmehr grade daher sind diese Gegenstände nicht subjective Hirngespinnste. Es giebt nichts Objectiveres als die arithmetischen Gesetze.	And yet, or rather precisely for this reason, these objects are not subjective figments of the brain. There is nothing more objective than the laws of arithmetic.

SUMMARY OF THE ARGUMENT

Frege retraces the course of the whole inquiry and its results.

	GERMAN	ENGLISH
106.1	Werfen wir noch einen kurzen Rückblick auf den Gang unserer Untersuchung! Nachdem wir festgestellt hatten,	Let us take a brief look back over the course of our inquiry! We established that number is neither a heap of things nor a property of such a heap, but that it is also not a subjective product of mental processes; rather, a statement of number asserts something objective about a concept. Having es-

25

[1] Ein leichter Ueberschlag zeigt, dass dazu Millionen Jahre lange nicht hinreichen würden.

[1] A rough calculation shows that millions of years would be nowhere near enough for this.

26 Adapts Alexander Pope's line "The proper study of mankind is man" (*An Essay on Man*, 1734).

27

[1] Man könnte sie auch formal nennen. Doch ist sie ganz verschieden von der oben unter diesem Namen beurtheilten.

[1] One might also call it formal. But it is quite different from the theory assessed above under that name.

GERMAN

dass die Zahl weder ein Haufe von Dingen noch eine Eigenschaft eines solchen, dass sie aber auch nicht subjectives Erzeugniss seelischer Vorgänge ist; sondern dass die Zahlangabe von einem Begriffe etwas Objectives aussage, versuchten wir zunächst die einzelnen Zahlen 0, 1 u. s. w. und das Fortschreiten in der Zahlenreihe zu definiren. Der erste Versuch misslang, weil wir nur jene Aussage von Begriffen, nicht aber die 0, die 1 abgesondert definirt hatten, welche nur Theile von ihr sind. Dies hatte zur Folge, dass wir die Gleichheit von Zahlen nicht beweisen konnten.

Es zeigte sich, dass die Zahl, mit der sich die Arithmetik beschäftigt, nicht als ein unselbständiges Attribut, sondern substantivisch gefasst werden muss[1]. Die Zahl erschien so als wiedererkennbarer Gegenstand, wenn auch nicht als physikalischer oder auch nur räumlicher noch als einer, von dem wir uns durch die Einbildungskraft ein Bild entwerfen können. Wir stellten nun den Grundsatz auf, dass die Bedeutung eines Wortes nicht vereinzelt, sondern im Zusammenhange eines Satzes zu erklären sei, durch dessen Befolgung allein, wie ich glaube, die physikalische Auffassung der Zahl vermieden werden kann, ohne in die psychologische zu verfallen. Es giebt nun eine Art von Sätzen, die für jeden Gegenstand einen Sinn haben müssen, das sind die Wiedererkennungssätze, bei den Zahlen Gleichungen genannt.

Auch die Zahlangabe, sahen wir, ist als eine Gleichung aufzufassen. Es kam also darauf an, den Sinn einer Zahlengleichung festzustellen, ihn auszudrücken, ohne von den Zahlwörtern oder dem Worte »Zahl« Gebrauch zu machen. Die Möglichkeit die unter einen Begriff F fallenden Gegenstände, den unter einen Begriff G fallenden beiderseits eindeutig zuzuordnen, erkannten wir als Inhalt eines Wiedererkennungsurtheils von Zahlen. Unsere Definition musste also jene Möglichkeit als gleichbedeutend mit einer Zahlengleichung hinstellen. Wir erinnerten an ähnliche Fälle: die Definition der Richtung aus dem Parallelismus, der Gestalt aus der Aehnlichkeit u. s. w.

29

ENGLISH

tablished this, we first tried to define the individual numbers 0, 1 and so on, and the advance in the series of numbers. The first attempt failed, because we had defined only that assertion about concepts, and not 0 and 1 separately, which are only parts of it. The consequence was that we could not prove the identity of numbers.

It turned out that the number with which arithmetic is concerned must be taken not as an attribute lacking self-subsistence, but substantivally[1]. Number thus appeared as a recognizable object, though not as a physical or even merely spatial one, nor as one of which we can form a picture through the imagination. We then laid down the principle that the meaning of a word is to be explained not in isolation but in the context of a sentence. Only by adhering to it, I believe, can the physical conception of number be avoided without falling into the psychological one. Now there is a kind of proposition that must have a sense for every object: the recognition propositions, which in the case of numbers are called equations.

The statement of number too, we saw, is to be construed as an equation. So the task was to fix the sense of a numerical identity, and to express it without making use of the number words or of the word “number”. We recognized the possibility of correlating one-to-one the objects falling under a concept F with those falling under a concept G as the content of a recognition judgment for numbers. Our definition therefore had to present that possibility as equivalent in meaning to a numerical identity. We recalled similar cases: the definition of direction from parallelism, of shape from similarity, and so on.

28

[2] Ich will hiermit gar nicht leugnen, dass wir ohne sinnliche Eindrücke dumm wie ein Brett wären und weder von Zahlen noch von sonst etwas wüssten; aber dieser psychologische Satz geht uns hier gar nichts an. Wegen der beständigen Gefahr der Vermischung zweier grundverschiedener Fragen hebe ich dies nochmals hervor.

[2] I do not at all wish to deny by this that without sense impressions we would be as thick as a plank and would know nothing of numbers or of anything else. But this psychological proposition does not concern us here at all. Because of the constant danger of confusing two fundamentally different questions, I stress this once more.

29

[1] Der Unterschied entspricht dem zwischen »blau« und »die Farbe des Himmels«.

[1] The difference corresponds to that between “blue” and “the color of the sky”.

	GERMAN	ENGLISH
107.1	Es erhob sich nun die Frage: wann ist man berechtigt, einen Inhalt als den eines Wiedererkennungsurtheils aufzufassen? Es muss dazu die Bedingung erfüllt sein, dass in jedem Urtheile unbeschadet seiner Wahrheit die linke Seite der versuchsweise angenommenen Gleichung durch die rechte ersetzt werden könne. Nun ist uns, ohne dass weitere Definitionen hinzukommen, zunächst von der linken oder rechten Seite einer solchen Gleichung keine Aussage weiter bekannt als eben die der Gleichheit. Es brauchte also die Ersetzbarkeit nur in einer Gleichung nachgewiesen zu werden.	The question then arose: when is one entitled to construe a content as that of a recognition judgment? For this the condition must be fulfilled that in every judgment the left-hand side of the tentatively assumed equation can be replaced by the right-hand side without affecting its truth. Now, to begin with, without the addition of further definitions, we know no statement about the left or right side of such an equation other than precisely that of identity. So substitutability needed to be demonstrated only in an equation.
107.2	Aber es blieb noch ein Bedenken bestehen. Ein Wiedererkennungssatz muss nämlich immer einen Sinn haben. Wenn wir nun die Möglichkeit, die unter den Begriff F fallenden Gegenstände den unter den Begriff G fallenden beiderseits eindeutig zuzuordnen, als eine Gleichung auffassen, indem wir dafür sagen: »die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Begriffe G zukommt,« und hiermit den Ausdruck »die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt« einführen, so haben wir für die Gleichung nur dann einen Sinn, wenn beide Seiten die eben genannte Form haben. Wir könnten nach einer solchen Definition nicht beurtheilen, ob eine Gleichung wahr oder falsch ist, wenn nur die eine Seite diese Form hat. Das veranlasste uns zu der Definition:	But one misgiving still remained. A recognition proposition must always have a sense. Suppose we construe the possibility of correlating one-to-one the objects falling under the concept F with those falling under the concept G as an equation, by saying instead: “the Number which belongs to the concept F is identical with the Number which belongs to the concept G”, and thereby introduce the expression “the Number which belongs to the concept F”. Then we have a sense for the equation only if both sides have the form just mentioned. With such a definition we could not judge whether an equation is true or false if only one of its sides has this form. This led us to the definition:
107.3	Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist der Umfang des Begriffes »Begriff gleichzahlig dem Begriffe F«, indem wir einen Begriff F gleichzahlig einem Begriffe G nannten, wenn jene Möglichkeit der beiderseits eindeutigen Zuordnung besteht.	The Number which belongs to the concept F is the extension of the concept “concept equinumerous with the concept F”, where we called a concept F equinumerous with a concept G if that possibility of one-to-one correlation obtains.
107.4	Hierbei setzten wir den Sinn des Ausdruckes »Umfang des Begriffes« als bekannt voraus. Diese Weise, die Schwierigkeit zu überwinden, wird wohl nicht überall Beifall finden, und Manche werden vorziehn, jenes Bedenken in andrer Weise zu beseitigen. Ich lege auch auf die Heranziehung des Umfangs eines Begriffes kein entscheidendes Gewicht.	Here we presupposed that the sense of the expression “extension of the concept” is known. This way of overcoming the difficulty will probably not meet with approval everywhere, and some will prefer to remove that misgiving in another way. I too attach no decisive importance to bringing in the extension of a concept.
108.1	Es blieb nun noch übrig die beiderseits eindeutige Zuordnung zu erklären; wir führten sie auf rein logische Verhältnisse zurück. Nachdem wir nun den Beweis des Satzes angedeutet hatten: die Zahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist gleich der, welche dem Begriffe G zukommt, wenn der Begriff F dem Begriffe G gleichzahlig ist, definirten wir die 0, den Ausdruck »n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m« und die Zahl 1 und zeigten, dass 1 in der natürlichen Zahlenreihe	It then remained to define one-to-one correlation; we reduced it to purely logical relations. We indicated the proof of the proposition: the number which belongs to the concept F is identical with the number which belongs to the concept G if the concept F is equinumerous with the concept G. We then defined 0, the expression “n follows directly after m in the series of natural numbers”, and the number 1, and showed that 1 follows directly after

	GERMAN	ENGLISH
	unmittelbar auf 0 folgt. Wir führten einige Sätze an, die sich an dieser Stelle leicht beweisen lassen, und gingen dann etwas näher auf folgenden ein, der die Unendlichkeit der Zahlenreihe erkennen lässt:	0 in the series of natural numbers. We cited some propositions that can easily be proved at this point, and then went into somewhat more detail on the following one, which reveals the infinity of the series of numbers:
108.2	Auf jede Zahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe eine Zahl.	In the series of natural numbers, every number is followed by a number.
108.3	Wir wurden hierdurch auf den Begriff »der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend« geführt, von dem wir zeigen wollten, dass die ihm zukommende Anzahl auf n in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar folge. Wir definirten ihn zunächst mittels des Folgens eines Gegenstandes y auf einen Gegenstand x in einer allgemeinen φ-Reihe. Auch der Sinn dieses Ausdruckes wurde auf rein logische Verhältnisse zurückgeführt. Und dadurch gelang es, die Schlussweise von n auf (n + 1), welche gewöhnlich für eine eigenthümlich mathematische gehalten wird, als auf den allgemeinen logischen Schlussweisen beruhend nachzuweisen.	This led us to the concept "belonging to the series of natural numbers ending with n", of which we wanted to show that the Number belonging to it follows directly after n in the series of natural numbers. We first defined it by means of the following of an object y after an object x in a general ϕ-series. The sense of this expression too was reduced to purely logical relations. In this way we succeeded in showing that the mode of inference from n to (n + 1), which is usually taken to be peculiarly mathematical, rests on the general logical modes of inference.
108.4	Wir brauchten nun zum Beweise der Unendlichkeit der Zahlenreihe den Satz, dass keine endliche Zahl in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selber folgt. Wir kamen so zu den Begriffen der endlichen und der unendlichen Zahl. Wir zeigten, dass der letztere im Grunde nicht weniger logisch gerechtfertigt als der erstere ist. Zum Vergleiche wurden *Cantors* unendliche Anzahlen und dessen »Folgen in der Succession« herangezogen, wobei auf die Verschiedenheit im Ausdrucke hingewiesen wurde.	To prove the infinity of the series of numbers, we then needed the proposition that no finite number follows itself in the series of natural numbers. We thus arrived at the concepts of finite and infinite number. We showed that the latter is fundamentally no less justified logically than the former. For comparison we brought in *Cantor's* infinite Numbers and his "following in the succession", pointing out the difference in terminology.
109.1	Aus allem Vorangehenden ergab sich nun mit grosser Wahrscheinlichkeit die analytische und apriorische Natur der arithmetischen Wahrheiten; und wir gelangten zu einer Verbesserung der Ansicht Kants. Wir sahen ferner, was noch fehlt, um jene Wahrscheinlichkeit zur Gewissheit zu erheben, und gaben den Weg an, der dahin führen muss.	From all that preceded, it then emerged with great probability that arithmetical truths are analytic and a priori in nature; and we arrived at an improvement on Kant's view. We saw, further, what is still lacking to raise that probability to certainty, and indicated the path that must lead there.
109.2	Endlich benutzten wir unsere Ergebnisse zur Kritik einer formalen Theorie der negativen, gebrochenen, irrationalen und complexen Zahlen, durch welche deren Unzulänglichkeit offenbar wurde. Ihren Fehler erkannten wir darin, dass sie die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes als bewiesen annahm, wenn sich kein Widerspruch gezeigt hatte, und dass die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes schon als hinreichende Gewähr für seine Erfülltheit galt. Diese Theorie bildet sich ein, sie brauche nur Forderungen zu stellen; deren Erfüllung verstehe sich dann von selbst. Sie	Finally we used our results to criticize a formal theory of negative, fractional, irrational and complex numbers, and this criticism made its inadequacy evident. We saw its error in two things: it took the consistency of a concept to be proved if no contradiction had shown itself, and it treated the consistency of a concept as a sufficient guarantee that the concept is satisfied. This theory imagines that it need only make demands, and that their fulfillment then goes without saying. It be-

	GERMAN	ENGLISH
	gebärdet sich wie ein Gott, der durch sein blosses Wort schaffen kann, wessen er bedarf.	haves like a god who can create by his mere word whatever he needs.
	Es musste auch gerügt werden, wenn eine Anweisung zur Definition für diese selbst ausgegeben wurde, eine Anweisung, deren Befolgung Fremdartiges in die Arithmetik einführen würde, obwohl sie selbst im Ausdrucke sich davon frei zu halten vermag, aber nur weil sie blosse Anweisung bleibt.	We also had to censure the passing off of an instruction for a definition as the definition itself: an instruction which, if followed, would bring something alien into arithmetic, although in its wording it can keep itself free of this, but only because it remains a mere instruction.
109.3	So geräth jene formale Theorie in Gefahr, auf das Aposteriorische oder doch Synthetische zurückzufallen, wie sehr sie sich auch den Anschein giebt, in der Höhe der Abstractionen zu schweben.	Thus that formal theory is in danger of falling back into the a posteriori, or at least the synthetic, however much it gives itself the air of floating on the heights of abstraction.
109.4	Unsere frühere Betrachtung der positiven ganzen Zahlen zeigte uns nun die Möglichkeit, die Einmischung von äussern Dingen und geometrischen Anschauungen zu vermeiden, ohne doch in den Fehler jener formalen Theorie zu verfallen. Es kommt wie dort darauf an, den Inhalt eines Wiedererkennungsurtheils festzusetzen. Denken wir dies überall geschehen, so erscheinen die negativen, gebrochenen, irrationalen und complexen Zahlen nicht geheimnissvoller als die positiven ganzen Zahlen, diese nicht reeller, wirklicher, greifbarer als jene.	Our earlier treatment of the positive whole numbers has now shown us that it is possible to avoid the intrusion of external things and geometrical intuitions without falling into the error of that formal theory. As there, the point is to fix the content of a recognition judgment. If we imagine this done everywhere, then the negative, fractional, irrational and complex numbers appear no more mysterious than the positive whole numbers, and these no more real, actual or tangible than those.