Science and Hypothesis

HENRI POINCARÉ
1854–1912

Science and Hypothesis

La Science et l'Hypothèse

Translated from the French with AI (Claude) and edited



FORAGE
forage.com

Science and Hypothesis · Henri Poincaré (1854–1912)

Translated from the French with AI (Claude) and edited. Parallel-text edition, Forage, October 2026. forage.com/poincare/science-and-hypothesis

French text: Henri Poincaré, *La Science et l'Hypothèse* (Paris: Flammarion, Bibliothèque de philosophie scientifique, 1917 printing; first published 1902; Chapter XIV, "La Fin de la Matière," was added in the printings from 1906 on), via the validated transcription on French Wikisource (fr.wikisource.org/wiki/La_Science_et_l%E2%80%99Hypoth%C3%A8se) (public domain; transcription CC BY-SA 4.0). Poincaré's footnotes are kept, numbered by chapter; formulas are given in plain text. English: translated from the French with AI (Claude), then edited for accuracy and consistency. Not reviewed by a human specialist. Free to reuse under CC BY-SA 4.0. Margin numbers are part, chapter and paragraph (the book's Parts One to Four and Chapters I–XIV; "Intro." for the Introduction).

The original text is in the public domain. This translation is free to share and adapt under the Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International license (CC BY-SA 4.0): creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0

Set in Source Serif 4, with Gentium Book Plus.

CONTENTS

Introduction vii

Introduction 1
The plan of the book 3

Part One: Number and Magnitude 7
CHAPITRE PREMIER. Sur la nature du raisonnement mathématique. 7
Leibniz proves that 2 and 2 make 4 8
Arithmetic rebuilt from scratch 9
Proof by recurrence 12
An infinity of syllogisms in one formula 13
A synthetic a priori judgment 15
From the particular to the general 16
Chapter II: Mathematical magnitude and experience 18
The physical continuum 22
Measurable magnitude 26
Continua of several dimensions 28

Part Two: Space 33
CHAPITRE III. Les géométries non euclidiennes. 33
Lobachevsky's geometry 34
Riemann's geometry 35
The dictionary 38
The implicit axioms 39
What are the axioms of geometry? 43
Chapter IV: The space of geometry 46
Geometric space and representative space 46
Changes of state and changes of position 51
The non-Euclidean world 56
The four-dimensional world 59
Chapter V: Experience and geometry 62
Experiments concern bodies, not space 67
Supplement: why three dimensions? 71

Part Three: Force 75
CHAPITRE VI. La Mécanique classique. 75
The law of acceleration 81
Anthropomorphic mechanics 87
Chapter VII: Relative and absolute motion 91
Newton's argument 92
Chapter VIII: Energy and thermodynamics 99
Thermodynamics 103
General conclusions of Part Three 108

Part Four: Nature 111
CHAPITRE IX. Les Hypothèses en Physique. 111
The role of hypothesis 118
Chapter X: The theories of modern physics 124
The present state of science 133
Chapter XI: The calculus of probabilities 141
The probability of causes 155
Chapter XII: Optics and electricity 160
Mechanical explanation 164
Chapter XIII: Electrodynamics 170
Rowland's experiments and Lorentz's electrons 182
Chapter XIV: The end of matter 185

INTRODUCTION

Henri Poincaré was the leading mathematician of his age, a founder of topology and of the theory of chaos, and a co-discoverer of much of the mathematics of relativity. In 1902 he gathered a decade of essays into a short book for a general audience, *La Science et l'Hypothèse*, and asked a plain question: how much of what science tells us is fact, and how much is our own choice? To doubt everything or to believe everything, he says at the outset, are two equally convenient ways of not having to think.

His answer moves through the sciences in order. Arithmetic is not a mere tautology, because reasoning by recurrence lets the mind leap past any finite check. The axioms of geometry are neither truths known in advance nor facts of experience but conventions: asking whether Euclidean geometry is true is like asking whether the metric system is true; it is only more convenient. The principles of mechanics, too, began as experimental laws and hardened into definitions that no experiment can now refute.

Physics is different, and the last part defends it against the sceptics who concluded that science is only a set of useful recipes. Theories come and go, Poincaré admits, but the relations they capture survive; science can know not things in themselves but the true relations between them. Along the way he discusses probability, the ether, and the electrodynamics of Maxwell and Lorentz on the eve of Einstein, who read the book with his friends in Bern. Its thesis, conventionalism, shaped the philosophy of science for the rest of the century.

Introduction

Introduction
Neither doubt everything nor believe everything: the different kinds of hypothesis in science, and which of them are legitimate.

	FRENCH	ENGLISH
Intro.1	Pour un observateur superficiel, la vérité scientifique est hors des atteintes du doute ; la logique de la science est infaillible et, si les savants se trompent quelquefois, c'est pour en avoir méconnu les règles.	To a superficial observer, scientific truth is beyond the reach of doubt; the logic of science is infallible, and if scientists are sometimes mistaken, it is because they have disregarded its rules.
Intro.2	Les vérités mathématiques dérivent d'un petit nombre de propositions évidentes par une chaîne de raisonnements impeccables ; elles s'imposent non seulement à nous, mais à la nature elle-même. Elles enchaînent pour ainsi dire le Créateur et lui permettent seulement de choisir entre quelques solutions relativement peu nombreuses. Il suffira alors de quelques expériences pour nous faire savoir quel choix il a fait. De chaque expérience, une foule de conséquences pourront sortir par une série de déductions mathématiques, et c'est ainsi que chacune d'elles nous fera connaître un coin de l'Univers.	Mathematical truths are derived from a small number of self-evident propositions by a chain of flawless reasoning; they are binding not only on us but on nature itself. They fetter the Creator, so to speak, and allow him only to choose among a relatively small number of solutions. A few experiments will then be enough to tell us which choice he has made. From each experiment a host of consequences can follow through a series of mathematical deductions, and in this way each experiment will show us a corner of the Universe.
Intro.3	Voilà quelle est pour bien des gens du monde, pour les lycéens qui reçoivent les premières notions de physique, l'origine de la certitude scientifique. Voilà comment ils comprennent le rôle de l'expérimentation et des mathématiques. C'est ainsi également que le comprenaient, il y a cent ans, beaucoup de savants qui rêvaient de construire le monde en empruntant à l'expérience aussi peu de matériaux que possible.	This, for many educated laypeople and for schoolchildren getting their first ideas of physics, is the origin of scientific certainty. This is how they understand the role of experiment and of mathematics. And this is also how it was understood a hundred years ago by many scientists, who dreamed of constructing the world while borrowing as little material as possible from experience.
Intro.4	Quand on a un peu plus réfléchi, on a aperçu la place tenue par l'hypothèse ; on a vu que le mathématicien ne saurait s'en passer et que l'expérimentateur ne s'en passe pas davantage. Et alors, on s'est demandé si toutes ces constructions étaient bien solides et on a cru qu'un souffle allait les abattre. Être sceptique de cette façon, c'est encore être superficiel. Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir.	When people thought about it a little more, they saw the place held by hypothesis; they saw that the mathematician cannot do without it, and that the experimenter does not do without it either. And then people asked whether all these constructions were really sound, and believed that a breath would knock them down. To be skeptical in this way is still to be superficial. To doubt everything and to believe everything are two equally convenient solutions; each spares us from having to think.
Intro.5	Au lieu de prononcer une condamnation sommaire, nous devons donc examiner avec soin le rôle de l'hypothèse ; nous reconnaîtrons alors, non seulement qu'il est	Instead of passing a summary condemnation, then, we must examine the role of hypothesis carefully; we shall then recognize not only that it

FRENCH

nécessaire, mais que le plus souvent il est légitime. Nous verrons aussi qu'il y a plusieurs sortes d'hypothèses, que les unes sont vérifiables et qu'une fois confirmées par l'expérience, elles deviennent des vérités fécondes ; que les autres, sans pouvoir nous induire en erreur, peuvent nous être utiles en fixant notre pensée, que d'autres enfin ne sont des hypothèses qu'en apparence et se réduisent à des définitions ou à des conventions déguisées.

Intro.6 Ces dernières se rencontrent surtout dans les mathématiques et dans les sciences qui y touchent. C'est justement de là que ces sciences tirent leur rigueur ; ces conventions sont l'œuvre de la libre activité de notre esprit, qui, dans ce domaine, ne reconnaît pas d'obstacle. Là, notre esprit peut affirmer parce qu'il décrète ; mais entendons-nous : ces décrets s'imposent à *notre* science, qui, sans eux, serait impossible ; ils ne s'imposent pas à la nature. Ces décrets, pourtant, sont-ils arbitraires ? Non, sans cela ils seraient stériles. L'expérience nous laisse notre libre choix, mais elle le guide en nous aidant à discerner le chemin le plus commode. Nos décrets sont donc comme ceux d'un prince absolu, mais sage, qui consulterait son Conseil d'État.

Intro.7 Quelques personnes ont été frappées de ce caractère de libre convention qu'on reconnaît dans certains principes fondamentaux des sciences. Elles ont voulu généraliser outre mesure et en même temps elles ont oublié que la liberté n'est pas l'arbitraire. Elles ont abouti ainsi à ce que l'on appelle le *nominalisme* et elles se sont demandé si le savant n'est pas dupe de ses définitions et si le monde qu'il croit découvrir n'est pas tout simplement créé par son caprice[1]. Dans ces conditions, la science serait certaine, mais dépourvue de portée.

2

ENGLISH

is necessary but that, more often than not, it is legitimate. We shall also see that there are several kinds of hypotheses: that some are verifiable, and once confirmed by experiment become fruitful truths; that others, though they cannot lead us into error, can be useful to us by giving our thought something fixed to hold on to; and that others, finally, are hypotheses only in appearance and reduce to definitions or to disguised conventions.

These last are found above all in mathematics and in the sciences related to it. It is precisely from them that these sciences derive their rigor; these conventions are the work of the free activity of our mind, which in this domain recognizes no obstacle. Here our mind may affirm because it decrees; but let us be clear: these decrees are binding on *our* science, which without them would be impossible; they are not binding on nature. Are these decrees arbitrary, then? No; otherwise they would be sterile. Experience leaves us free to choose, but it guides our choice by helping us to discern the most convenient path. Our decrees are therefore like those of an absolute but wise prince who would consult his Council of State.

Some people have been struck by this character of free convention that we recognize in certain fundamental principles of the sciences. They have tried to generalize beyond measure, and at the same time they have forgotten that freedom is not arbitrariness. They have thus arrived at what is called *nominalism*, and have asked themselves whether the scientist is not the dupe of his own definitions, and whether the world he believes he is discovering is not simply created by his own whim[1]. In that case, science would be certain, but devoid of significance.

2

2

[1] Voir M. Le Roy, Science et Philosophie. (*Revue de Métaphysique et de Morale*, 1901.)

[1] See Le Roy, Science et Philosophie (*Revue de Métaphysique et de Morale*, 1901.)[1]

1 Édouard Le Roy (1870–1954), French philosopher and mathematician, a follower of Bergson, who argued that scientific facts and laws are largely made by the scientist.

	FRENCH	ENGLISH
Intro.8	S'il en était ainsi, la science serait impuissante. Or, nous la voyons chaque jour agir sous nos yeux. Cela ne pourrait être si elle ne nous faisait connaître quelque chose de la réalité ; mais ce qu'elle peut atteindre, ce ne sont pas les choses elles-mêmes, comme le pensent les dogmatistes naïfs, ce sont seulement les rapports entre les choses ; en dehors de ces rapports, il n'y a pas de réalité connaissable.	If that were so, science would be powerless. Yet every day we see it at work before our eyes. That could not be unless it taught us something about reality; but what it can reach is not things themselves, as naive dogmatists think, but only the relations between things; apart from these relations there is no knowable reality.

THE PLAN OF THE BOOK

Poincaré previews his route from arithmetic and geometry through mechanics to experimental physics.

	FRENCH	ENGLISH
Intro.9	Telle est la conclusion à laquelle nous parviendrons, mais pour cela il nous faudra parcourir la série des sciences depuis l'arithmétique et la géométrie jusqu'à la mécanique et à la physique expérimentale.	Such is the conclusion we shall reach; but to get there we shall have to go through the whole series of sciences, from arithmetic and geometry to mechanics and experimental physics.
Intro.10	Quelle est la nature du raisonnement mathématique ? Est-il réellement déductif comme on le croit d'ordinaire ? Une analyse approfondie nous montre qu'il n'en est rien, qu'il participe dans une certaine mesure de la nature du raisonnement inductif et que c'est par là qu'il est fécond. Il n'en conserve pas moins son caractère de rigueur absolue ; c'est ce que nous avions d'abord à montrer.	What is the nature of mathematical reasoning? Is it really deductive, as is commonly believed? A thorough analysis shows us that it is nothing of the kind: that to a certain extent it shares in the nature of inductive reasoning, and that this is what makes it fruitful. It nonetheless retains its character of absolute rigor; that is what we had to show first.
Intro.11	Connaissant mieux maintenant l'un des instruments que les mathématiques mettent entre les mains du chercheur, nous avions à analyser une autre notion fondamentale, celle de la grandeur mathématique. La trouvons-nous dans la nature, ou est-ce nous qui l'y introduisons ? Et, dans ce dernier cas, ne risquons-nous pas de tout fausser ? Comparant les données brutes de nos sens et ce concept extrêmement complexe et subtil que les mathématiciens appellent grandeur, nous sommes bien forcés de reconnaître une divergence ; ce cadre où nous voulons tout faire rentrer, c'est donc nous qui l'avons fait ; mais nous ne l'avons pas fait au hasard, nous l'avons fait pour ainsi dire sur mesure et c'est pour cela que nous pouvons y faire rentrer les faits sans dénaturer ce qu'ils ont d'essentiel.	Now that we know better one of the instruments that mathematics puts into the researcher's hands, we had to analyze another fundamental notion, that of mathematical magnitude. Do we find it in nature, or is it we who introduce it there? And in the latter case, do we not risk distorting everything? Comparing the raw data of our senses with that extremely complex and subtle concept that mathematicians call magnitude, we are forced to acknowledge a discrepancy; this framework into which we want to fit everything is therefore one we made ourselves; but we did not make it at random; we made it, so to speak, to measure, and that is why we can fit the facts into it without distorting what is essential in them.
Intro.12	Un autre cadre que nous imposons au monde, c'est l'espace. D'où viennent les premiers principes de la géométrie ? Nous sont-ils imposés par la logique ? Lobatchevsky a montré que non en créant les géométries non euclidiennes. L'espace nous est-il révélé par nos sens ? Non encore, car celui que nos sens pourraient nous	Another framework that we impose on the world is space. Where do the first principles of geometry come from? Are they imposed on us by logic? Lobachevsky showed that they are not, by creating the non-Euclidean geometries. Is space revealed to us by our senses? Again no, for the space our

FRENCH

montrer diffère absolument de celui du géomètre. La géométrie dérive-t-elle de l'expérience ? Une discussion approfondie nous montrera que non. Nous conclurons donc que ses principes ne sont que des conventions ; mais ces conventions ne sont pas arbitraires, et transportés dans un autre monde (que j'appelle le monde non euclidien et que je cherche à imaginer), nous aurions été amenés à en adopter d'autres.

Intro.13 En mécanique, nous serions conduits à des conclusions analogues et nous verrions que les principes de cette science, quoique plus directement appuyés sur l'expérience, participent encore du caractère conventionnel des postulats géométriques. Jusqu'ici le nominalisme triomphe, mais nous arrivons aux sciences physiques proprement dites. Ici la scène change ; nous rencontrons une autre sorte d'hypothèses et nous en voyons toute la fécondité. Sans doute, au premier abord, les théories nous semblent fragiles, et l'histoire de la science nous prouve qu'elles sont éphémères : elles ne meurent pas tout entières pourtant, et de chacune d'elles il reste quelque chose. C'est ce quelque chose qu'il faut chercher à démêler, parce que c'est là, et là seulement, qu'est la véritable réalité.

Intro.14 La méthode des sciences physiques repose sur l'induction qui nous fait attendre la répétition d'un phénomène quand se reproduisent les circonstances où il avait une première fois pris naissance. Si *toutes* ces circonstances pouvaient se reproduire à la fois, ce principe pourrait être appliqué sans crainte : mais cela n'arrivera jamais ; quelques-unes de ces circonstances feront toujours défaut. Sommes-nous absolument sûrs qu'elles sont sans importance ? Évidemment non. Cela pourra être vraisemblable, cela ne pourra pas être rigoureusement certain. De là le rôle considérable que joue dans les sciences physiques la notion de probabilité. Le calcul des probabilités n'est donc pas seulement une récréation ou un guide pour les joueurs de baccara, et nous devons chercher à en approfondir les principes.

Sous ce rapport, je n'ai pu donner que des résultats bien incomplets, tant ce vague instinct, qui nous fait discerner la vraisemblance, est rebelle à l'analyse.

Intro.15 Après avoir étudié les conditions dans lesquelles travaille le physicien, j'ai cru qu'il fallait le montrer à l'œuvre. Pour cela j'ai pris quelques exemples dans l'histoire de

ENGLISH

senses could show us differs absolutely from the space of the geometer. Does geometry derive from experience? A thorough discussion will show us that it does not. We shall therefore conclude that its principles are only conventions; but these conventions are not arbitrary, and if we were transported into another world (which I call the non-Euclidean world and which I try to imagine), we would have been led to adopt different ones.[3]

In mechanics we would be led to similar conclusions, and we would see that the principles of this science, though more directly based on experience, still share in the conventional character of the postulates of geometry. So far nominalism triumphs; but now we come to the physical sciences proper. Here the scene changes; we meet another kind of hypothesis, and we see how fruitful it is. No doubt, at first sight, theories seem fragile to us, and the history of science proves that they are short-lived; yet they do not die entirely, and something of each of them remains. It is this something that we must try to disentangle, because it is there, and there alone, that true reality lies.

The method of the physical sciences rests on induction, which leads us to expect a phenomenon to recur when the circumstances in which it first arose are repeated. If *all* these circumstances could be reproduced at once, this principle could be applied without fear; but that will never happen; some of the circumstances will always be missing. Are we absolutely sure that they do not matter? Obviously not. It may be likely; it cannot be strictly certain. Hence the considerable role played in the physical sciences by the notion of probability. The calculus of probabilities is therefore not merely a pastime or a guide for baccarat players, and we must try to get to the bottom of its principles.

In this respect I have been able to give only very incomplete results, so stubbornly does that vague instinct which lets us discern likelihood resist analysis.

Having studied the conditions under which the physicist works, I thought I ought to show him at work. For this I took a few examples from the his-

3 Nikolai Lobachevsky (1792–1856), Russian mathematician who published one of the first non-Euclidean geometries in 1829.

FRENCH	ENGLISH
l'optique et dans celle de l'électricité. Nous verrons d'où sont sorties les idées de Fresnel, celles de Maxwell, et quelles hypothèses inconscientes faisaient Ampère et les autres fondateurs de l'électrodynamique.	tory of optics and from that of electricity. We shall see where the ideas of Fresnel and of Maxwell came from, and what unconscious hypotheses were made by Ampère and the other founders of electrodynamics.[4]

4 Augustin Fresnel (1788–1827), French physicist of the wave theory of light; James Clerk Maxwell (1831–1879), Scottish physicist of electromagnetic theory; André-Marie Ampère (1775–1836), French founder of electrodynamics.

Part One: Number and Magnitude

Le nombre et la grandeur
Why mathematical induction makes arithmetic more than a tautology, and how the mathematical continuum is built out of the crude continuum of the senses (Chapters I–II).

CHAPITRE PREMIER. SUR LA NATURE DU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.1	La possibilité même de la science mathématique semble une contradiction insoluble. Si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ? Le syllogisme ne peut rien nous apprendre d'essentiellement nouveau et, si tout devait sortir du principe d'identité, tout devrait aussi pouvoir s'y ramener. Admettra-t-on donc que les énoncés de tous ces théorèmes qui remplissent tant de volumes ne soient que des manières détournées de dire que A est A ?	The very possibility of mathematical science seems an insoluble contradiction. If this science is deductive only in appearance, where does it get that perfect rigor which no one dreams of questioning? If, on the other hand, all the propositions it states can be derived from one another by the rules of formal logic, why is mathematics not reduced to an immense tautology? The syllogism can teach us nothing essentially new, and if everything were to spring from the principle of identity, everything should also be reducible to it. Are we then to admit that the statements of all those theorems that fill so many volumes are nothing but roundabout ways of saying that A is A?
1.1.2	Sans doute, on peut remonter aux axiomes qui sont à la source de tous les raisonnements. Si on juge qu'on ne peut les réduire au principe de contradiction, si on ne veut pas non plus y voir des faits expérimentaux qui ne pourraient participer à la nécessité mathématique, on a encore la ressource de les classer parmi les jugements synthétiques *a priori*. Ce n'est pas résoudre la difficulté, c'est seulement la baptiser ; et lors même que la nature des jugements synthétiques n'aurait plus pour nous de mystère, la contradiction ne se serait pas évanouie, elle n'aurait fait que reculer ; le raisonnement syllogistique reste incapable de rien ajouter aux données qu'on lui fournit ; ces données se réduisent à quelques axiomes et on ne devrait pas retrouver autre chose dans les conclusions.	No doubt we can go back to the axioms that are the source of all reasoning. If we judge that they cannot be reduced to the principle of contradiction, and if we also refuse to see them as experimental facts, which could not share in mathematical necessity, we still have the resource of classing them among synthetic *a priori* judgments. That is not to solve the difficulty, only to christen it; and even if the nature of synthetic judgments held no more mystery for us, the contradiction would not have vanished; it would only have been pushed back. Syllogistic reasoning remains incapable of adding anything to the data it is given; these data reduce to a few axioms, and we ought to find nothing else in the conclusions.
1.1.3	Aucun théorème ne devrait être nouveau si dans sa démonstration n'intervenait un axiome nouveau ; le raisonnement ne pourrait nous rendre que les vérités immédiatement évidentes empruntées à l'intuition directe ; il ne serait plus qu'un intermédiaire parasite et dès lors n'aurait-on pas lieu de se demander si tout	No theorem ought to be new unless a new axiom came into its proof; reasoning could give us back only the immediately evident truths borrowed from direct intuition; it would be nothing but a parasitic intermediary, and should we not then have reason to ask whether the whole syllogistic apparatus serves only to disguise our borrowing?

	FRENCH	ENGLISH
	l'appareil syllogistique ne sert pas uniquement à dissimuler notre emprunt ?	
1.1.4	La contradiction nous frappera davantage si nous ouvrons un livre quelconque de mathématiques ; à chaque page l'auteur annoncera l'intention de généraliser une proposition déjà connue. Est-ce donc que la méthode mathématique procède du particulier au général et comment alors peut-on l'appeler déductive ?	The contradiction will strike us even more if we open any book of mathematics at all; on every page the author will announce his intention of generalizing a proposition already known. Does mathematical method, then, proceed from the particular to the general, and if so, how can it be called deductive?
1.1.5	Si enfin la science du nombre était purement analytique, ou pouvait sortir analytiquement d'un petit nombre de jugements synthétiques, il semble qu'un esprit assez puissant pourrait d'un seul coup d'œil en apercevoir toutes les vérités ; que dis-je ! on pourrait même espérer qu'un jour on inventera pour les exprimer un langage assez simple pour qu'elles apparaissent ainsi immédiatement à une intelligence ordinaire.	Finally, if the science of number were purely analytic, or could be derived analytically from a small number of synthetic judgments, it seems that a sufficiently powerful mind could perceive all its truths at a single glance; what am I saying?—one might even hope that one day a language would be invented to express them that was simple enough for them to appear immediately, in this way, to an ordinary intelligence.
1.1.6	Si l'on se refuse à admettre ces conséquences, il faut bien concéder que le raisonnement mathématique a par lui-même une sorte de vertu créatrice et par conséquent qu'il se distingue du syllogisme.	If we refuse to accept these consequences, we must concede that mathematical reasoning has in itself a sort of creative power, and therefore that it differs from the syllogism.
1.1.7	La différence doit même être profonde. Nous ne trouverons pas par exemple la clef du mystère dans l'usage fréquent de cette règle d'après laquelle une même opération uniforme appliquée à deux nombres égaux donnera des résultats identiques.	The difference must even be a profound one. We shall not, for example, find the key to the mystery in the frequent use of the rule according to which one and the same uniform operation applied to two equal numbers will give identical results.
1.1.8	Tous ces modes de raisonnement, qu'ils soient ou non réductibles au syllogisme proprement dit, conservent le caractère analytique et sont par cela même impuissants.	All these modes of reasoning, whether or not they can be reduced to the syllogism proper, keep their analytic character and are, for that very reason, powerless.

LEIBNIZ PROVES THAT 2 AND 2 MAKE 4

Such proofs of particular equalities are mere verifications: analytic, sterile and no science.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.9	Le débat est ancien ; déjà Leibnitz cherchait à démontrer que 2 et 2 font 4 ; examinons un peu sa démonstration.	The debate is an old one; Leibniz already tried to prove that 2 and 2 make 4; let us take a brief look at his proof.[1]
1.1.10	Je suppose que l'on ait défini le nombre 1 et l'opération $x + 1$ qui consiste à ajouter l'unité à un nombre donné x.	Suppose we have defined the number 1 and the operation $x + 1$, which consists in adding one to a given number x.

1 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), German philosopher and mathematician; the proof appears in his *New Essays on Human Understanding*.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.11	Ces définitions, quelles qu'elles soient, n'interviendront pas dans la suite du raisonnement.	These definitions, whatever they may be, will play no part in the rest of the reasoning.
1.1.12	Je définis ensuite les nombres 2, 3 et 4 par les égalités : (1) 1 + 1 = 2 ; (2) 2 + 1 = 3 ; (3) 3 + 1 = 4.	I then define the numbers 2, 3 and 4 by the equalities: (1) 1 + 1 = 2; (2) 2 + 1 = 3; (3) 3 + 1 = 4.
1.1.13	Je définis de même l'opération $x + 2$ par la relation : (4) $x + 2 = (x + 1) + 1$.	In the same way I define the operation $x + 2$ by the relation: (4) $x + 2 = (x + 1) + 1$.
1.1.14	Cela posé nous avons : 2 + 2 = (2 + 1) + 1 (Définition 4) ; (2 + 1) + 1 = 3 + 1 (Définition 2) ; 3 + 1 = 4 (Définition 3) d'où 2 + 2 = 4 C. Q. F. D.	This being granted, we have: 2 + 2 = (2 + 1) + 1 (Definition 4); (2 + 1) + 1 = 3 + 1 (Definition 2); 3 + 1 = 4 (Definition 3), whence 2 + 2 = 4 Q.E.D.
1.1.15	On ne saurait nier que ce raisonnement ne soit purement analytique. Mais interrogez un mathématicien quelconque : « Ce n'est pas une démonstration proprement dite, vous répondra-t-il, c'est une vérification ». On s'est borné à rapprocher l'une de l'autre deux définitions purement conventionnelles et on a constaté leur identité ; on n'a rien appris de nouveau. La *vérification* diffère précisément de la véritable démonstration, parce qu'elle est purement analytique et parce qu'elle est stérile. Elle est stérile parce que la conclusion n'est que la traduction des prémisses dans un autre langage. La démonstration véritable est féconde au contraire parce que la conclusion y est en un sens plus générale que les prémisses.	It cannot be denied that this reasoning is purely analytic. But ask any mathematician: "That is not a proof proper," he will tell you, "it is a verification." We have merely set two purely conventional definitions side by side and observed that they are identical; we have learned nothing new. *Verification* differs from true proof precisely because it is purely analytic and because it is sterile. It is sterile because the conclusion is only a translation of the premises into another language. True proof, on the contrary, is fruitful because in it the conclusion is, in a sense, more general than the premises.
1.1.16	L'égalité 2 + 2 = 4 n'a été ainsi susceptible d'une vérification que parce qu'elle est particulière. Tout énoncé particulier en mathématiques pourra toujours être vérifié de la sorte. Mais si la mathématique devait se réduire à une suite de pareilles vérifications, elle ne serait pas une science. Ainsi un joueur d'échecs, par exemple, ne crée pas une science en gagnant une partie. Il n'y a de science que du général.	The equality 2 + 2 = 4 could be verified in this way only because it is particular. Every particular statement in mathematics can always be verified in this way. But if mathematics were reduced to a series of such verifications, it would not be a science. In the same way a chess player, for example, does not create a science by winning a game. There is no science except of the general.
1.1.17	On peut même dire que les sciences exactes ont précisément pour objet de nous dispenser de ces vérifications directes.	We may even say that the very purpose of the exact sciences is to spare us these direct verifications.

ARITHMETIC REBUILT FROM SCRATCH

Addition and multiplication are defined by recurrence and their laws proved step by step.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.18	Voyons donc le géomètre à l'œuvre et cherchons à surprendre ses procédés.	Let us watch the mathematician at work, then, and try to catch his methods in the act.
1.1.19	La tâche n'est pas sans difficulté ; il ne suffit pas d'ouvrir un ouvrage au hasard et d'y analyser une démonstration quelconque.	The task is not without difficulty; it is not enough to open a book at random and analyze any proof whatever in it.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.20	Nous devons exclure d'abord la géométrie où la question se complique des problèmes ardus relatifs au rôle des postulats, à la nature et à l'origine de la notion d'espace. Pour des raisons analogues nous ne pouvons nous adresser à l'analyse infinitésimale. Il nous faut chercher la pensée mathématique là où elle est restée pure, c'est-à-dire en arithmétique.	We must first exclude geometry, where the question is complicated by thorny problems concerning the role of postulates and the nature and origin of the notion of space. For similar reasons we cannot turn to infinitesimal analysis. We must look for mathematical thought where it has remained pure, that is, in arithmetic.
1.1.21	Encore faut-il choisir ; dans les parties les plus élevées de la théorie des nombres, les notions mathématiques primitives ont déjà subi une élaboration si profonde, qu'il devient difficile de les analyser.	Even then we must choose; in the higher parts of the theory of numbers, the primitive mathematical notions have already been worked over so thoroughly that it becomes difficult to analyze them.
1.1.22	C'est donc au début de l'arithmétique que nous devons nous attendre à trouver l'explication que nous cherchons, mais il arrive justement que c'est dans la démonstration des théorèmes les plus élémentaires que les auteurs des traités classiques ont déployé le moins de précision et de rigueur. Il ne faut pas leur en faire un crime ; ils ont obéi à une nécessité ; les débutants ne sont pas préparés à la véritable rigueur mathématique ; ils n'y verraient que de vaines et fastidieuses subtilités ; on perdrait son temps à vouloir trop tôt les rendre plus exigeants ; il faut qu'ils refassent rapidement, mais sans brûler d'étapes, le chemin qu'ont parcouru lentement les fondateurs de la science.	It is therefore at the beginning of arithmetic that we must expect to find the explanation we are looking for; but it so happens that it is precisely in the proofs of the most elementary theorems that the authors of the standard textbooks have shown the least precision and rigor. We must not hold it against them; they were obeying a necessity. Beginners are not prepared for true mathematical rigor; they would see in it only empty and tedious subtleties; it would be a waste of time to try to make them more demanding too soon; they must travel again, quickly but without skipping any stages, the road that the founders of the science traveled slowly.
1.1.23	Pourquoi une si longue préparation est-elle nécessaire pour s'habituer à cette rigueur parfaite, qui, semble-t-il, devrait s'imposer naturellement à tous les bons esprits ? C'est là un problème logique et psychologique bien digne d'être médité.	Why is so long a preparation needed to get used to this perfect rigor, which, it seems, ought to come naturally to every sound mind? That is a logical and psychological problem well worth pondering.
1.1.24	Mais nous ne nous y arrêterons pas ; il est étranger à notre objet ; tout ce que je veux retenir, c'est que, sous peine de manquer notre but, il nous faut refaire les démonstrations des théorèmes les plus élémentaires et leur donner non la forme grossière qu'on leur laisse pour ne pas lasser les débutants, mais celle qui peut satisfaire un géomètre exercé.	But we shall not dwell on it; it lies outside our subject. All I want to retain is that, if we are not to miss our goal, we must redo the proofs of the most elementary theorems and give them not the crude form in which they are left so as not to weary beginners, but a form that can satisfy a practiced mathematician.
1.1.25	Définition de l'addition. — Je suppose qu'on ait défini préalablement l'opération $x + 1$, qui consiste à ajouter le nombre 1 à un nombre donné x.	Definition of addition.—Suppose we have already defined the operation $x + 1$, which consists in adding the number 1 to a given number x.
1.1.26	Cette définition, quelle qu'elle soit d'ailleurs, ne jouera plus aucun rôle dans la suite des raisonnements.	This definition, whatever it may be, will play no further part in the rest of the reasoning.
1.1.27	Il s'agit maintenant de définir l'opération $x + a$, qui consiste à ajouter le nombre a à un nombre donné x.	The task now is to define the operation $x + a$, which consists in adding the number a to a given number x.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.28	Supposons que l'on ait défini l'opération $x + (a - 1)$, l'opération $x + a$ sera définie par l'égalité : (1) $x + a = [x + (a - 1)] + 1$.	Suppose we have defined the operation $x + (a - 1)$; then the operation $x + a$ will be defined by the equality: (1) $x + a = [x + (a - 1)] + 1$.
1.1.29	Nous saurons donc ce que c'est que $x + a$ quand nous saurons ce que c'est que $x + (a - 1)$, et comme j'ai supposé au début que l'on savait ce que c'est que $x + 1$, on pourra définir successivement et « par récurrence » les opérations $x + 2$, $x + 3$, etc.	We shall thus know what $x + a$ is when we know what $x + (a - 1)$ is; and since I assumed at the outset that we knew what $x + 1$ is, we can define successively and "by recurrence" the operations $x + 2$, $x + 3$, etc.[2]
1.1.30	Cette définition mérite un moment d'attention, elle est d'une nature particulière qui la distingue déjà de la définition purement logique ; l'égalité (1) contient en effet une infinité de définitions distinctes, chacune d'elles n'ayant un sens que quand on connaît celle qui la précède.	This definition deserves a moment's attention; it is of a peculiar nature that already distinguishes it from a purely logical definition: equality (1) in fact contains an infinity of distinct definitions, each of which has meaning only when we know the one before it.
1.1.31	Propriétés de l'addition, — *Associativité.* — Je dis que $a + (b + c) = (a + b) + c$.	Properties of addition.—*Associativity.*—I say that $a + (b + c) = (a + b) + c$.
1.1.32	En effet le théorème est vrai pour $c = 1$; il s'écrit alors $a + (b + 1) = (a + b) + 1$, ce qui n'est autre chose, à la différence des notations près, que l'égalité (1) par laquelle je viens de définir l'addition.	Indeed, the theorem is true for $c = 1$; it then reads $a + (b + 1) = (a + b) + 1$, which, apart from the difference in notation, is nothing other than equality (1), by which I have just defined addition.
1.1.33	Supposons que le théorème soit vrai pour $c = \gamma$, je dis qu'il sera vrai pour $c = \gamma + 1$, soit en effet $(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma)$, on en déduira successivement : $[(a + b) + \gamma] + 1 = [a + (b + \gamma)] + 1$, ou en vertu de la définition (1) $(a + b) + (\gamma + 1) = a + (b + \gamma + 1) = a + [b + (\gamma + 1)]$,	Suppose the theorem is true for $c = \gamma$; I say that it will be true for $c = \gamma + 1$. Indeed, let $(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma)$; we shall deduce from this successively: $[(a + b) + \gamma] + 1 = [a + (b + \gamma)] + 1$, or, by virtue of definition (1), $(a + b) + (\gamma + 1) = a + (b + \gamma + 1) = a + [b + (\gamma + 1)]$,
1.1.34	Étant vrai pour $c = 1$, on verrait ainsi successivement qu'il l'est pour $c = 2$, pour $c = 3$, etc.	Since it is true for $c = 1$, we would thus see successively that it is true for $c = 2$, for $c = 3$, etc.
1.1.35	*Commutativité.* — 1° Je dis que $a + 1 = 1 + a$.	*Commutativity.*—1. I say that $a + 1 = 1 + a$.
1.1.36	Le théorème est évidemment vrai pour $a = 1$, on pourrait *vérifier* par des raisonnements purement analytiques que s'il est vrai pour $a = \gamma$, il le sera pour $a = \gamma + 1$; or il l'est pour $a = 1$, il le sera donc pour $a = 2$, pour $a = 3$, etc. ; c'est ce qu'on exprime en disant que la proposition énoncée est démontrée par récurrence.	The theorem is obviously true for $a = 1$; we could *verify* by purely analytic reasoning that if it is true for $a = \gamma$, it will be true for $a = \gamma + 1$; now it is true for $a = 1$, so it will be true for $a = 2$, for $a = 3$, etc.; this is what we express by saying that the proposition stated is proved by recurrence.
1.1.37	2° Je dis que $a + b = b + a$.	2. I say that $a + b = b + a$.
1.1.38	Le théorème vient d'être démontré pour $b = 1$, on peut *vérifier* analytiquement que s'il est vrai pour $b = \beta$, il le sera pour $b = \beta + 1$.	The theorem has just been proved for $b = 1$; we can *verify* analytically that if it is true for $b = \beta$, it will be true for $b = \beta + 1$.

2 Poincaré's "recurrence" is what mathematicians now call mathematical induction; a definition "by recurrence" is what is now called a recursive definition.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.39	La proposition est donc établie par récurrence.	The proposition is therefore established by recurrence.
1.1.40	Définition de la multiplication. — Nous définirons la multiplication par les égalités $a \times 1 = a$. (2) $a \times b = [a \times (b - 1)] + a$.	Definition of multiplication.—We shall define multiplication by the equalities $a \times 1 = a$. (2) $a \times b = [a \times (b - 1)] + a$.
1.1.41	L'égalité (2) renferme comme l'égalité (1) une infinité de définitions ; ayant défini $a \times 1$ elle permet de définir successivement : $a \times 2$, $a \times 3$, etc.	Equality (2), like equality (1), contains an infinity of definitions; once $a \times 1$ has been defined, it allows us to define successively: $a \times 2$, $a \times 3$, etc.
1.1.42	Propriétés de la multiplication. — *Distributivité.* — Je dis que $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$.	Properties of multiplication.—*Distributivity.*—I say that $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$.
1.1.43	On vérifie analytiquement que l'égalité est vraie pour $c = 1$; puis que si le théorème est vrai pour $c = \gamma$ il sera vrai pour $c = \gamma + 1$.	We verify analytically that the equality is true for $c = 1$, and then that if the theorem is true for $c = \gamma$, it will be true for $c = \gamma + 1$.
1.1.44	La proposition est encore démontrée par récurrence.	The proposition is again proved by recurrence.
1.1.45	*Commutativité.* — 1° Je dis que $a \times 1 = 1 \times a$. Le théorème est évident pour $a = 1$.	*Commutativity.*—1. I say that $a \times 1 = 1 \times a$. The theorem is obvious for $a = 1$.
1.1.46	On vérifie analytiquement que s'il est vrai pour $a = \alpha$ il sera vrai pour $a = \alpha + 1$.	We verify analytically that if it is true for $a = \alpha$, it will be true for $a = \alpha + 1$.
1.1.47	2° Je dis que $a \times b = b \times a$. Le théorème vient d'être démontré pour $b = 1$. On vérifierait analytiquement que s'il est vrai pour $b = \beta$ il le sera pour $b = \beta + 1$.	2. I say that $a \times b = b \times a$. The theorem has just been proved for $b = 1$. We could verify analytically that if it is true for $b = \beta$, it will be true for $b = \beta + 1$.

PROOF BY RECURRENCE

Each proof used one procedure: true for 1, and true for n if true for n − 1.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.48	J'arrête là cette série monotone de raisonnements. Mais cette monotonie même a mieux fait ressortir le procédé qui est uniforme et qu'on retrouve à chaque pas.	I shall stop this monotonous series of arguments here. But its very monotony has brought out more clearly the procedure, which is uniform and which we meet again at every step.
1.1.49	Ce procédé est la démonstration par récurrence. On établit d'abord un théorème pour $n = 1$; on montre ensuite que s'il est vrai de $n - 1$, il est vrai de n et on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers.	This procedure is proof by recurrence. We first establish a theorem for $n = 1$; we then show that if it is true of $n - 1$, it is true of n, and we conclude from this that it is true for all whole numbers.
1.1.50	On vient de voir comment on peut s'en servir pour démontrer les règles de l'addition et de la multiplication, c'est-à-dire les règles du calcul algébrique ; ce calcul est un instrument de transformation qui se prête à beaucoup plus de combinaisons diverses que le simple syllogisme ; mais c'est encore un instrument purement analytique et incapable de rien nous apprendre de nouveau. Si les mathématiques n'en avaient pas d'autre elles seraient	We have just seen how it can be used to prove the rules of addition and multiplication, that is, the rules of algebraic calculation; this calculus is an instrument of transformation that lends itself to many more varied combinations than the simple syllogism; but it is still a purely analytic instrument, incapable of teaching us anything new. If mathematics had no other, its development would

	FRENCH	ENGLISH
	donc tout de suite arrêtées dans leur développement ; mais elles ont de nouveau recours au même procédé, c'est-à-dire au raisonnement par récurrence et elles peuvent continuer leur marche en avant.	therefore be halted at once; but it has recourse once again to the same procedure, that is, to reasoning by recurrence, and it can continue its forward march.
1.1.51	À chaque pas, si on y regarde bien, on retrouve ce mode de raisonnement, soit sous la forme simple que nous venons de lui donner, soit sous une forme plus ou moins modifiée.	At every step, if we look closely, we meet this mode of reasoning again, either in the simple form we have just given it or in a more or less modified form.

AN INFINITY OF SYLLOGISMS IN ONE FORMULA

Recurrence condenses endless syllogisms into one rule, letting the mind pass from the finite to the infinite.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.52	Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence c'est qu'il contient, condensés pour ainsi dire en une formule unique, une infinité de syllogismes.	The essential feature of reasoning by recurrence is that it contains, condensed so to speak into a single formula, an infinity of syllogisms.
1.1.53	Pour qu'on s'en puisse mieux rendre compte, je vais énoncer les uns après les autres ces syllogismes qui sont, si l'on veut me passer l'expression, disposés en cascade.	So that this may be better grasped, I shall state these syllogisms one after another; they are, if I may be allowed the expression, arranged in a cascade.
1.1.54	Ce sont bien entendu des syllogismes hypothétiques.	They are, of course, hypothetical syllogisms.
1.1.55	Le théorème est vrai du nombre 1. Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2. Donc il est vrai de 2. Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3. Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite.	The theorem is true of the number 1. Now if it is true of 1, it is true of 2. Therefore it is true of 2. Now if it is true of 2, it is true of 3. Therefore it is true of 3, and so on.
1.1.56	On voit que la conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant.	We see that the conclusion of each syllogism serves as the minor premise of the next.
1.1.57	De plus les majeures de tous nos syllogismes peuvent être ramenées à une formule unique.	Moreover, the major premises of all our syllogisms can be reduced to a single formula.
1.1.58	Si le théorème est vrai de $n - 1$, il l'est de n.	If the theorem is true of $n - 1$, it is true of n.
1.1.59	On voit donc que, dans les raisonnements par récurrence, on se borne à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui contient comme cas particuliers toutes les majeures.	We see, then, that in reasoning by recurrence we confine ourselves to stating the minor premise of the first syllogism, and the general formula that contains all the major premises as particular cases.
1.1.60	Cette suite de syllogismes qui ne finirait jamais se trouve ainsi réduite à une phrase de quelques lignes.	This never-ending series of syllogisms is thus reduced to a sentence of a few lines.
1.1.61	Il est facile maintenant de comprendre pourquoi toute conséquence particulière d'un théorème peut, comme je l'ai expliqué plus haut, être vérifiée par des procédés purement analytiques.	It is now easy to understand why every particular consequence of a theorem can, as I explained above, be verified by purely analytic procedures.
1.1.62		

	FRENCH	ENGLISH
	Si au lieu de montrer que notre théorème est vrai de tous les nombres, nous voulons seulement faire voir qu'il est vrai du nombre 6 par exemple, il nous suffira d'établir les 5 premiers syllogismes de notre cascade ; il nous en faudrait 9 si nous voulions démontrer le théorème pour le nombre 10 ; il nous en faudrait davantage encore pour un nombre plus grand ; mais quelque grand que soit ce nombre nous finirions toujours par l'atteindre, et la vérification analytique serait possible.	If, instead of showing that our theorem is true of all numbers, we want only to show that it is true of the number 6, for example, it will be enough for us to establish the first 5 syllogisms of our cascade; we would need 9 if we wanted to prove the theorem for the number 10; we would need still more for a larger number; but however large that number might be, we would always reach it in the end, and analytic verification would be possible.
1.1.63	Et cependant, quelque loin que nous allions ainsi, nous ne nous élèverions jamais jusqu'au théorème général, applicable à tous les nombres, qui seul peut être objet de science. Pour y arriver, il faudrait une infinité de syllogismes, il faudrait franchir un abîme que la patience de l'analyste, réduit aux seules ressources de la logique formelle, ne parviendra jamais à combler.	And yet, however far we went in this way, we would never rise to the general theorem, applicable to all numbers, which alone can be an object of science. To reach it would take an infinity of syllogisms; it would mean crossing an abyss that the patience of the analyst, confined to the resources of formal logic alone, will never succeed in filling.
1.1.64	Je demandais au début pourquoi on ne saurait concevoir un esprit assez puissant pour apercevoir d'un seul coup d'œil l'ensemble des vérités mathématiques.	I asked at the beginning why we could not conceive of a mind powerful enough to perceive the whole body of mathematical truths at a single glance.
1.1.65	La réponse est aisée maintenant ; un joueur d'échecs peut combiner quatre coups, cinq coups d'avance, mais, si extraordinaire qu'on le suppose, il n'en préparera jamais qu'un nombre fini ; s'il applique ses facultés à l'arithmétique, il ne pourra en apercevoir les vérités générales d'une seule intuition directe ; pour parvenir au plus petit théorème, il ne pourra s'affranchir de l'aide du raisonnement par récurrence parce que c'est un instrument qui permet de passer du fini à l'infini.	The answer is easy now. A chess player can work out four or five moves ahead; but however extraordinary we suppose him to be, he will never plan more than a finite number of them. If he applies his faculties to arithmetic, he will not be able to perceive its general truths by a single direct intuition; to reach the smallest theorem, he cannot dispense with the help of reasoning by recurrence, because it is an instrument that lets us pass from the finite to the infinite.
1.1.66	Cet instrument est toujours utile, puisque, nous faisant franchir d'un bond autant d'étapes que nous le voulons, il nous dispense de vérifications longues, fastidieuses et monotones qui deviendraient rapidement impraticables. Mais il devient indispensable dès qu'on vise au théorème général, dont la vérification analytique nous rapprocherait sans cesse, sans nous permettre de l'atteindre.	This instrument is always useful, since, by letting us leap over as many stages as we wish at a single bound, it spares us long, tedious and monotonous verifications that would quickly become impracticable. But it becomes indispensable as soon as we aim at the general theorem, to which analytic verification would bring us ever closer without ever allowing us to reach it.
1.1.67	Dans ce domaine de l'arithmétique, on peut se croire bien loin de l'analyse infinitésimale, et, cependant, nous venons de le voir, l'idée de l'infini mathématique joue déjà un rôle prépondérant, et sans elle il n'y aurait pas de science parce qu'il n'y aurait rien de général.	In this field of arithmetic we might think ourselves very far from infinitesimal analysis; and yet, as we have just seen, the idea of the mathematical infinite already plays a dominant role, and without it there would be no science, because there would be nothing general.

A SYNTHETIC A PRIORI JUDGMENT

The rule of recurrence comes neither from logic nor from experience; it expresses a power of the mind.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.68	Le jugement sur lequel repose le raisonnement par récurrence peut être mis sous d'autres formes ; on peut dire par exemple que dans une collection infinie de nombres entiers différents, il y en a toujours un qui est plus petit que tous les autres.	The judgment on which reasoning by recurrence rests can be put in other forms; we can say, for example, that in an infinite collection of different whole numbers there is always one that is smaller than all the others.
1.1.69	On pourra passer facilement d'un énoncé à l'autre et se donner ainsi l'illusion qu'on a démontré la légitimité du raisonnement par récurrence. Mais on sera toujours arrêté, on arrivera toujours à un axiome indémontrable qui ne sera au fond que la proposition à démontrer traduite dans un autre langage.	One can easily pass from one statement to the other and so give oneself the illusion of having proved the legitimacy of reasoning by recurrence. But one will always be brought up short; one will always arrive at an unprovable axiom that is, at bottom, only the proposition to be proved translated into another language.
1.1.70	On ne peut donc se soustraire à cette conclusion que la règle du raisonnement par récurrence est irréductible au principe de contradiction.	We cannot, then, escape the conclusion that the rule of reasoning by recurrence is irreducible to the principle of contradiction.
1.1.71	Cette règle ne peut non plus nous venir de l'expérience ; ce que l'expérience pourrait nous apprendre, c'est que la règle est vraie pour les dix, pour les cent premiers nombres par exemple, elle ne peut atteindre la suite indéfinie des nombres, mais seulement une portion plus ou moins longue mais toujours limitée de cette suite.	Nor can this rule come to us from experience; what experience could teach us is that the rule is true for the first ten or the first hundred numbers, for example; it cannot reach the indefinite series of numbers, but only a portion of that series, longer or shorter but always limited.
1.1.72	Or, s'il ne s'agissait que de cela, le principe de contradiction suffirait, il nous permettrait toujours de développer autant de syllogismes que nous voudrions, c'est seulement quand il s'agit d'en enfermer une infinité dans une seule formule, c'est seulement devant l'infini que ce principe échoue, c'est également là que l'expérience devient impuissante. Cette règle, inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type du jugement synthétique *a priori*. On ne saurait d'autre part songer à y voir une convention, comme pour quelques-uns des postulats de la géométrie.	Now, if that were all that was at stake, the principle of contradiction would suffice; it would always allow us to develop as many syllogisms as we wished. It is only when an infinity of them must be enclosed in a single formula, it is only before the infinite, that this principle fails; and it is there too that experience becomes powerless. This rule, inaccessible both to analytic proof and to experience, is the true type of the synthetic *a priori* judgment. On the other hand, we cannot think of seeing it as a convention, as with some of the postulates of geometry.
1.1.73	Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.	Why, then, does this judgment force itself on us with irresistible self-evidence? Because it is only the affirmation of the power of the mind, which knows itself capable of conceiving the indefinite repetition of one and the same act once that act is possible at all. The mind has a direct intuition of this power, and experience can only be for it an occasion to use it, and thereby to become aware of it.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.74	Mais, dira-t-on, si l'expérience brute ne peut légitimer le raisonnement par récurrence, en est-il de même de l'expérience aidée de l'induction ? Nous voyons successivement qu'un théorème est vrai du nombre 1, du nombre 2, du nombre 3 et ainsi de suite, *la loi est manifeste*, disons-nous, et elle l'est au même titre que toute loi physique appuyée sur des observations dont le nombre est très grand, mais limité.	But, it will be said, if raw experience cannot justify reasoning by recurrence, is the same true of experience aided by induction? We see successively that a theorem is true of the number 1, of the number 2, of the number 3, and so on; *the law is evident*, we say, and it is evident in the same way as any physical law based on observations that are very numerous but limited in number.
1.1.75	On ne saurait méconnaître qu'il y a là une analogie frappante avec les procédés habituels de l'induction. Mais une différence essentielle subsiste. L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même.	It cannot be denied that there is a striking analogy here with the usual procedures of induction. But an essential difference remains. Induction, as applied to the physical sciences, is always uncertain, because it rests on the belief in a general order of the Universe, an order that is outside us. Mathematical induction, that is, proof by recurrence, on the contrary forces itself on us necessarily, because it is only the affirmation of a property of the mind itself.

FROM THE PARTICULAR TO THE GENERAL

Mathematical construction is fruitful only because recurrence lets mathematics rise to general theorems.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.76	Les mathématiciens, je l'ai dit plus haut, s'efforcent toujours de *généraliser* les propositions qu'ils ont obtenues, et pour ne pas chercher d'autre exemple, nous avons tout à l'heure démontré l'égalité : $a + 1 = 1 + a$, et nous nous en sommes servi ensuite pour établir l'égalité $a + b = b + a$, qui est manifestement plus générale.	Mathematicians, as I said above, always strive to *generalize* the propositions they have obtained; and, to look no further for an example, we proved just now the equality: $a + 1 = 1 + a$, and then used it to establish the equality $a + b = b + a$, which is manifestly more general.
1.1.77	Les mathématiques peuvent donc comme les autres sciences procéder du particulier au général.	Mathematics can therefore, like the other sciences, proceed from the particular to the general.
1.1.78	Il y a là un fait qui nous aurait paru incompréhensible au début de cette étude, mais qui n'a plus pour nous rien de mystérieux, depuis que nous avons constaté les analogies de la démonstration par récurrence avec l'induction ordinaire.	Here is a fact that would have seemed incomprehensible to us at the start of this study, but that no longer holds any mystery for us, now that we have observed the analogies between proof by recurrence and ordinary induction.
1.1.79	Sans doute le raisonnement mathématique récurrent et le raisonnement physique inductif reposent sur des fondements différents, mais leur marche est parallèle, ils vont dans le même sens, c'est-à-dire du particulier au général.	No doubt recurrent mathematical reasoning and inductive physical reasoning rest on different foundations; but they move in parallel and in the same direction, that is, from the particular to the general.
1.1.80	Examinons la chose d'un peu plus près.	Let us look at the matter a little more closely.
1.1.81	Pour démontrer l'égalité : (1) $a + 2 = 2 + a$, il nous suffit d'appliquer deux fois la règle $a + 1 = 1 + a$, et d'écrire : (2) $a + 2 = a + 1 + 1 = 1 + a + 1 = 1 + 1 + a = 2 + a$.	To prove the equality: (1) $a + 2 = 2 + a$, it is enough for us to apply the rule $a + 1 = 1 + a$ twice and write: (2) $a + 2 = a + 1 + 1 = 1 + a + 1 = 1 + 1 + a = 2 + a$.

	FRENCH	ENGLISH
1.1.82	L'égalité (2) ainsi déduite par voie purement analytique de l'égalité (1) n'en est pas cependant un simple cas particulier : elle est autre chose.	Equality (2), deduced in this purely analytic way from equality (1), is not, however, simply a particular case of it: it is something else.
1.1.83	On ne peut donc même pas dire que dans la partie réellement analytique et déductive des raisonnements mathématiques, on procède du général au particulier, au sens ordinaire du mot.	We cannot, then, even say that in the truly analytic and deductive part of mathematical reasoning we proceed from the general to the particular, in the ordinary sense of the word.
1.1.84	Les deux membres de l'égalité (2) sont simplement des combinaisons plus compliquées que les deux membres de l'égalité (1) et l'analyse ne sert qu'à séparer les éléments qui entrent dans ces combinaisons et à en étudier les rapports.	The two sides of equality (2) are simply more complicated combinations than the two sides of equality (1), and analysis serves only to separate the elements that enter into these combinations and to study their relations.
1.1.85	Les mathématiciens procèdent donc « par construction », ils « construisent » des combinaisons de plus en plus compliquées. Revenant ensuite par l'analyse de ces combinaisons, de ces ensembles, pour ainsi dire, à leurs éléments primitifs, ils aperçoivent les rapports de ces éléments et en déduisent les rapports des ensembles eux-mêmes.	Mathematicians therefore proceed "by construction"; they "construct" more and more complicated combinations. Then, returning by analysis from these combinations, these wholes so to speak, to their primitive elements, they perceive the relations between these elements and deduce from them the relations between the wholes themselves.
1.1.86	C'est là une marche purement analytique, mais ce n'est pas pourtant une marche du général au particulier, car les ensembles ne sauraient évidemment être regardés comme plus particuliers que leurs éléments.	This is a purely analytic procedure, but it is not, for all that, a procedure from the general to the particular, for the wholes obviously cannot be regarded as more particular than their elements.
1.1.87	On a attaché, et à juste titre, une grande importance à ce procédé de la « construction » et on a voulu y voir la condition nécessaire et suffisante des progrès des sciences exactes.	Great importance has been attached, and rightly so, to this procedure of "construction," and some have wished to see in it the necessary and sufficient condition for the progress of the exact sciences.
1.1.88	Nécessaire, sans doute, mais suffisante, non.	Necessary, no doubt; but sufficient, no.
1.1.89	Pour qu'une construction puisse être utile, pour qu'elle ne soit pas une vaine fatigue pour l'esprit, pour qu'elle puisse servir de marchepied à qui veut s'élever plus haut, il faut d'abord qu'elle possède une sorte d'unité, qui permette d'y voir autre chose que la juxtaposition de ses éléments.	For a construction to be useful, for it not to be a pointless strain on the mind, for it to serve as a stepping stone for anyone who wants to climb higher, it must first possess a kind of unity that lets us see in it something other than the juxtaposition of its elements.
1.1.90	Ou plus exactement, il faut qu'on trouve quelque avantage à considérer la construction plutôt que ses éléments eux-mêmes.	Or, more precisely, there must be some advantage in considering the construction rather than its elements themselves.
1.1.91	Quel peut être cet avantage ?	What can this advantage be?
1.1.92	Pourquoi raisonner sur un polygone par exemple, qui est toujours décomposable en triangles, et non sur les triangles élémentaires ?	Why reason, for example, about a polygon, which can always be broken down into triangles, and not about the elementary triangles?

	FRENCH	ENGLISH
1.1.93	C'est qu'il y a des propriétés que l'on peut démontrer pour les polygones d'un nombre quelconques de côtés et qu'on peut ensuite appliquer immédiatement à un polygone particulier quelconque.	Because there are properties that can be proved for polygons with any number of sides and then applied immediately to any particular polygon.
1.1.94	Le plus souvent, au contraire, ce n'est qu'au prix des plus longs efforts qu'on pourrait les retrouver en étudiant directement les rapports des triangles élémentaires. La connaissance du théorème général nous épargne ces efforts.	Most often, on the other hand, they could be recovered only at the cost of the longest efforts by studying the relations of the elementary triangles directly. Knowing the general theorem spares us these efforts.
1.1.95	Une construction ne devient donc intéressante, que quand on peut la ranger à côté d'autres constructions analogues, formant les espèces d'un même genre.	A construction, then, becomes interesting only when it can be placed alongside other similar constructions, forming species of a single genus.
1.1.96	Si le quadrilatère est autre chose que la juxtaposition de deux triangles, c'est qu'il appartient au genre polygone.	If the quadrilateral is something other than the juxtaposition of two triangles, it is because it belongs to the genus polygon.
1.1.97	Encore faut-il qu'on puisse démontrer les propriétés du genre sans être forcé de les établir successivement pour chacune des espèces.	And even then, we must be able to prove the properties of the genus without being forced to establish them one by one for each of the species.
1.1.98	Pour y arriver, il faut nécessairement remonter du particulier au général, en gravissant un ou plusieurs échelons.	To achieve this, we must necessarily climb back up from the particular to the general, ascending one or more rungs.
1.1.99	Le procédé analytique « par construction » ne nous oblige pas à en descendre, mais il nous laisse au même niveau.	The analytic procedure "by construction" does not oblige us to come down, but it leaves us at the same level.
1.1.100	Nous ne pouvons nous élever que par l'induction mathématique, qui seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau. Sans l'aide de cette induction différente à certains égards de l'induction physique, mais féconde comme elle, la construction serait impuissante à créer la science.	We can rise only by mathematical induction, which alone can teach us something new. Without the help of this induction, which differs in certain respects from physical induction but is as fruitful as it is, construction would be powerless to create science.
1.1.101	Observons en terminant que cette induction n'est possible que si une même opération peut se répéter indéfiniment. C'est pour cela que la théorie du jeu d'échec ne pourra jamais devenir une science, puisque les différents coups d'une même partie ne se ressemblent pas.	Let us note, in closing, that this induction is possible only if one and the same operation can be repeated indefinitely. That is why the theory of chess can never become a science, since the different moves of a single game do not resemble one another.

CHAPTER II: MATHEMATICAL MAGNITUDE AND EXPERIENCE

What analysts mean by the continuum, and how Dedekind defines the irrational numbers.

	FRENCH	ENGLISH
1.2.1	Si l'on veut savoir ce que les mathématiciens entendent par un continu, ce n'est pas à la géométrie qu'il faut le demander. Le géomètre cherche toujours plus ou moins à	If we want to know what mathematicians mean by a continuum, it is not geometry we should ask.

	FRENCH	ENGLISH
	se représenter les figures qu'il étudie, mais ses représentations ne sont pour lui que des instruments ; il fait de la géométrie avec de l'étendue comme il en fait avec de la craie ; aussi doit-on prendre garde d'attacher trop d'importance à des accidents qui n'en ont souvent pas plus que la blancheur de la craie.	The geometer always tries, more or less, to picture the figures he is studying, but his pictures are only instruments to him; he does geometry with extension as he does it with chalk; so we must take care not to attach too much importance to accidents that often matter no more than the whiteness of the chalk.
1.2.2	L'analyste pur n'a pas à craindre cet écueil. Il a dégagé la science mathématique de tous les éléments étrangers, et il peut répondre à notre question : Qu'est-ce au juste que ce continu sur lequel les mathématiciens raisonnent ? Beaucoup d'entre eux, qui savent réfléchir sur leur art, l'ont fait déjà ; M. Tannery, par exemple, dans son *Introduction à la théorie des Fonctions d'une variable*.	The pure analyst need not fear this pitfall. He has freed mathematical science from all foreign elements, and he can answer our question: What exactly is this continuum about which mathematicians reason? Many of them, who know how to reflect on their art, have already done so: Tannery, for example, in his *Introduction à la théorie des Fonctions d'une variable*.[3]
1.2.3	Partons de l'échelle des nombres entiers ; entre deux échelons consécutifs, intercalons un ou plusieurs échelons intermédiaires, puis entre ces échelons nouveaux d'autres encore, et ainsi de suite indéfiniment. Nous aurons ainsi un nombre illimité de termes, ce seront les nombres que l'on appelle fractionnaires, rationnels ou commensurables. Mais ce n'est pas assez encore ; entre ces termes qui sont pourtant déjà en nombre infini, il faut encore en intercaler d'autres, que l'on appelle irrationnels ou incommensurables.	Let us start from the scale of whole numbers; between two consecutive steps let us insert one or more intermediate steps, then between these new steps still others, and so on indefinitely. We shall thus have an unlimited number of terms; these will be the numbers called fractional, rational or commensurable. But even that is not enough; between these terms, which are already infinite in number, we must insert still others, which are called irrational or incommensurable.
1.2.4	Avant d'aller plus loin, faisons une première remarque. Le continu ainsi conçu n'est plus qu'une collection d'individus rangés dans un certain ordre, en nombre infini, il est vrai, mais *extérieurs* les uns aux autres. Ce n'est pas là la conception ordinaire, où l'on suppose entre les éléments du continu une sorte de lien intime qui en fait un tout, où le point ne préexiste pas à la ligne, mais la ligne au point. De la célèbre formule, le continu est l'unité dans la multiplicité, la multiplicité seule subsiste, l'unité a disparu. Les analystes n'en ont pas moins raison de définir leur continu comme ils le font, puisque c'est toujours sur celui-là qu'ils raisonnent depuis qu'ils se piquent de rigueur.	Before going further, let us make a first remark. The continuum so conceived is nothing but a collection of individuals arranged in a certain order, infinite in number, it is true, but *external* to one another. This is not the ordinary conception, in which we suppose between the elements of the continuum a sort of intimate bond that makes them a whole, in which the point does not exist before the line, but the line before the point. Of the famous formula "the continuum is unity in multiplicity," only the multiplicity remains; the unity has disappeared. The analysts are nonetheless right to define their continuum as they do, since it is always this one they reason about, ever since they have prided themselves on rigor.
	Mais c'est assez pour nous avertir que le véritable continu mathématique est tout autre chose que celui des physiciens et celui des métaphysiciens.	But it is enough to warn us that the true mathematical continuum is something quite different from that of the physicists and that of the metaphysicians.
1.2.5	On dira peut-être aussi que les mathématiciens qui se contentent de cette définition sont dupes de mots, qu'il	It may also be said that mathematicians who are content with this definition are the dupes of

	FRENCH	ENGLISH
	faudrait dire d'une façon précise ce que sont chacun de ces échelons intermédiaires, expliquer comment il faut les intercaler et démontrer qu'il est possible de le faire. Mais ce serait à tort ; la seule propriété de ces échelons qui intervienne dans leurs raisonnements[1], c'est celle de se trouver avant ou après tels autres échelons ; elle doit donc seule aussi intervenir dans la définition.	words; that they ought to say precisely what each of these intermediate steps is, explain how they are to be inserted, and prove that it is possible to do so. But that would be wrong; the only property of these steps that enters into their reasoning[1] is that of coming before or after certain other steps; so it alone must also enter into the definition.
4		
1.2.6	Ainsi, il n'y a pas à s'inquiéter de la manière dont on doit intercaler les termes intermédiaires ; d'autre part, personne ne doutera que cette opération ne soit possible, à moins d'oublier que ce dernier mot, dans le langage des géomètres, signifie simplement exempt de contradiction.	Thus there is no need to worry about how the intermediate terms are to be inserted; and on the other hand, no one will doubt that this operation is possible, unless he forgets that this last word, in the language of geometers, simply means free from contradiction.
1.2.7	Notre définition, toutefois, n'est pas complète encore, et j'y reviens après cette trop longue digression.	Our definition, however, is not yet complete, and I return to it after this overlong digression.
1.2.8	Définition des incommensurables. — Les mathématiciens de l'École de Berlin, M. Kronecker en particulier, se sont préoccupés de construire cette échelle continue des nombres fractionnaires et irrationnels sans se servir d'autres matériaux que du nombre entier. Le continu mathématique serait, dans cette manière de voir, une pure création de l'esprit, où l'expérience n'aurait aucune part.	Definition of incommensurable numbers.—The mathematicians of the Berlin school, Kronecker in particular, have set out to construct this continuous scale of fractional and irrational numbers using no other material than the whole number. On this view, the mathematical continuum would be a pure creation of the mind, in which experience would have no part.[5]
1.2.9	La notion du nombre rationnel ne leur semblant pas présenter de difficulté, ils se sont surtout efforcés de définir le nombre incommensurable. Mais avant de reproduire ici leur définition, je dois faire une observation, afin de prévenir l'étonnement qu'elle ne manquerait pas de provoquer chez les lecteurs peu familiers avec les habitudes des géomètres.	Since the notion of rational number did not seem to them to present any difficulty, they have chiefly tried to define the incommensurable number. But before reproducing their definition here, I must make an observation, to forestall the astonishment it would not fail to arouse in readers little acquainted with the habits of mathematicians.
1.2.10	Les mathématiciens n'étudient pas des objets, mais des relations entre les objets ; il leur est donc indifférent de remplacer ces objets par d'autres, pourvu que les relations ne changent pas. La matière ne leur importe pas, la forme seule les intéresse.	Mathematicians do not study objects but relations between objects; it is therefore a matter of indifference to them to replace these objects by others, provided the relations do not change. The matter does not concern them; only the form interests them.
1.2.11	Si l'on ne s'en souvenait, on ne comprendrait pas que M. Dedekind désigne par le nom de *nombre incommensurable*	Unless we remembered this, we could not understand how Dedekind can give the name *incommen-*

3 Jules Tannery (1848–1910), French mathematician; his *Introduction to the Theory of Functions of One Variable* appeared in 1886.

4

[1] Avec celles qui sont contenues dans les conventions spéciales qui servent à définir l'addition et dont nous parlerons plus loin.

[1] Together with those contained in the special conventions that serve to define addition, which we shall discuss later.

5 Leopold Kronecker (1823–1891), German mathematician who held that all of mathematics should be built up from the whole numbers.

	FRENCH	ENGLISH
	un simple symbole, c'est-à-dire quelque chose de très différent de l'idée que l'on croit se faire d'une quantité, qui doit être mesurable et presque tangible.	*surable number* to a mere symbol, that is, to something very different from the idea we think we have of a quantity, which ought to be measurable and almost tangible.[6]
1.2.12	Voici maintenant quelle est la définition de M. Dedekind :	Here, now, is Dedekind's definition:
1.2.13	On peut répartir d'une infinité de manières les nombres commensurables en deux classes, en s'assujettissant à cette condition qu'un nombre quelconque de la première classe soit plus grand qu'un nombre quelconque de la seconde classe.	The commensurable numbers can be divided into two classes in infinitely many ways, subject to the condition that any number of the first class is greater than any number of the second class.
1.2.14	Il peut arriver que parmi les nombres de la première classe, il y en ait un qui soit plus petit que tous les autres ; si, par exemple, on range dans la première classe tous les nombres plus grands que 2 et 2 lui-même, et dans la seconde classe tous les nombres plus petits que 2, il est clair que 2 sera le plus petit de tous les nombres de la première classe. Le nombre 2 pourra être choisi comme symbole de cette répartition.	It may happen that among the numbers of the first class there is one smaller than all the others. If, for example, we put into the first class all the numbers greater than 2, together with 2 itself, and into the second class all the numbers less than 2, it is clear that 2 will be the smallest of all the numbers of the first class. The number 2 may then be chosen as the symbol of this division.
1.2.15	Il peut se faire, au contraire, que parmi les nombres de la seconde classe, il y en ait un qui soit plus grand que tous les autres ; c'est ce qui a lieu, par exemple, si la première classe comprend tous les nombres plus grands que 2, et la seconde tous les nombres plus petits que 2 et 2 lui-même. Ici encore, le nombre 2 pourra être choisi comme symbole de cette répartition.	It may happen, on the contrary, that among the numbers of the second class there is one greater than all the others. This is the case, for example, if the first class includes all the numbers greater than 2, and the second all the numbers less than 2, together with 2 itself. Here again the number 2 may be chosen as the symbol of this division.
1.2.16	Mais il peut arriver également que l'on ne puisse trouver ni dans la première classe un nombre plus petit que tous les autres, ni dans la seconde un nombre plus grand que tous les autres. Supposons, par exemple, que l'on mette dans la première classe tous les nombres commensurables dont le carré est plus grand que 2 et dans la seconde tous ceux dont le carré est plus petit que 2. On sait qu'il n'y en a aucun dont le carré soit précisément égal à 2. Il n'y aura évidemment pas dans la première classe de nombre plus petit que tous les autres, car quelque voisin que le carré d'un nombre soit de 2, on pourra toujours trouver un nombre commensurable dont le carré soit encore plus rapproché que 2.	But it may equally happen that we can find neither a number in the first class smaller than all the others, nor a number in the second class greater than all the others. Suppose, for example, that we put into the first class all the commensurable numbers whose square is greater than 2, and into the second all those whose square is less than 2. We know that there is none whose square is exactly equal to 2. There will obviously be no number in the first class smaller than all the others, for however near to 2 the square of a number may be, we can always find a commensurable number whose square is nearer still to 2.
1.2.17	Dans la manière de voir de M. Dedekind, le nombre incommensurable $\sqrt{2}$, n'est autre chose que le symbole de ce mode particulier de répartition des nombres commensurables ; et à chaque mode de répartition	On Dedekind's view, the incommensurable number $\sqrt{2}$ is nothing but the symbol of this particular way of dividing the commensurable numbers. And so to each way of dividing them there corres-

6 Richard Dedekind (1831–1916), German mathematician who in 1872 defined the irrational numbers by means of "cuts" in the rational numbers.

	FRENCH	ENGLISH
	correspond ainsi un nombre commensurable ou non, qui lui sert de symbole.	ponds a number, commensurable or not, which serves as its symbol.
1.2.18	Mais se contenter de cela, ce serait trop oublier l'origine de ces symboles ; il reste à expliquer comment on a été conduit à leur attribuer une sorte d'existence concrète, et, d'autre part, la difficulté ne commence-t-elle pas pour les nombres fractionnaires eux-mêmes ? Aurions-nous la notion de ces nombres, si nous ne connaissions d'avance une matière que nous concevons comme divisible à l'infini, c'est-à-dire comme un continu ?	But to be content with this would be to forget too readily where these symbols came from. It remains to explain how we came to attribute to them a kind of concrete existence. Besides, does not the difficulty begin with the fractional numbers themselves? Would we have the notion of these numbers if we did not already know a matter that we conceive as infinitely divisible—that is, as a continuum?

THE PHYSICAL CONTINUUM

Our sensations give A = B, B = C, A < C, a contradiction that the mathematical continuum removes.

	FRENCH	ENGLISH
1.2.19	Le continu physique. — On en vient alors à se demander si la notion du continu mathématique n'est pas tout simplement tirée de l'expérience. Si cela était, les données brutes de l'expérience, qui sont nos sensations, seraient susceptibles de mesure. On pourrait être tenté de croire qu'il en est bien ainsi, puisque l'on s'est, dans ces derniers temps, efforcé de les mesurer et que l'on a même formulé une loi, connue sous le nom de loi de Fechner, et d'après laquelle la sensation serait proportionnelle au logarithme de l'excitation.	The physical continuum.—We are then led to ask whether the notion of the mathematical continuum is not simply drawn from experience. If it were, the raw data of experience, which are our sensations, would be capable of measurement. We might be tempted to believe that this is indeed so, since in recent times there have been attempts to measure them. A law has even been formulated, known as Fechner's law, according to which sensation is proportional to the logarithm of the stimulus.[7]
1.2.20	Mais si l'on examine de près les expériences par lesquelles on a cherché à établir cette loi, on sera conduit à une conclusion toute contraire. On a observé, par exemple, qu'un poids A de 10 grammes et un poids B de 11 grammes produisaient des sensations identiques, que le poids B ne pouvait non plus être discerné d'un poids C de 12 grammes, mais que l'on distinguait facilement le poids A du poids C. Les résultats bruts de l'expérience peuvent donc s'exprimer par les relations suivantes : A = B, B = C, A < C, qui peuvent être regardées comme la formule du continu physique.	But if we examine closely the experiments by which people have sought to establish this law, we shall be led to the opposite conclusion. It has been observed, for example, that a weight A of 10 grams and a weight B of 11 grams produced identical sensations. The weight B could not be distinguished from a weight C of 12 grams either, yet the weight A was easily distinguished from the weight C. The raw results of experience can therefore be expressed by the following relations: A = B, B = C, A < C, which may be regarded as the formula of the physical continuum.
1.2.21	Il y a là, avec le principe de contradiction, un désaccord intolérable, et c'est la nécessité de le faire cesser qui nous a contraints à inventer le continu mathématique.	Here there is an intolerable disagreement with the principle of contradiction, and it is the need to put an end to it that has forced us to invent the mathematical continuum.
1.2.22		

7 Gustav Theodor Fechner (1801–1887), German physicist and philosopher, a founder of psychophysics.

	FRENCH	ENGLISH
	On est donc forcé de conclure que cette notion a été créée de toutes pièces par l'esprit, mais que c'est l'expérience qui lui en a fourni l'occasion.	We are therefore forced to conclude that this notion was created wholesale by the mind, but that it was experience that provided the occasion.
1.2.23	Nous ne pouvons croire que deux quantités égales à une même troisième ne soient pas égales entre elles, et c'est ainsi que nous sommes amenés à supposer que A est différent de B et B de C, mais que l'imperfection de nos sens ne nous avait pas permis de les discerner.	We cannot believe that two quantities equal to the same third quantity are not equal to each other. And so we are led to suppose that A is different from B, and B from C, but that the imperfection of our senses had not allowed us to tell them apart.
1.2.24	Création du continu mathématique. — *Premier stade.* — Jusqu'ici il pourrait nous suffire, pour rendre compte des faits, d'intercaler entre A et B un petit nombre de termes qui resteraient discrets. Qu'arrive-t-il maintenant si nous avons recours à quelque instrument pour suppléer à l'infirmité de nos sens, si par exemple nous faisons usage d'un microscope ? Des termes que nous ne pouvions discerner l'un de l'autre comme étaient tout à l'heure A et B, nous apparaissent maintenant comme distincts ; mais entre A et B devenus distincts s'intercalera un terme nouveau D, que nous ne pourrons distinguer ni de A ni de B.	Creation of the mathematical continuum.—*First stage.*—So far, to account for the facts, it might be enough to insert between A and B a small number of terms that would remain discrete. What happens now if we have recourse to some instrument to make up for the weakness of our senses—if, for example, we use a microscope? Terms that we could not distinguish from each other, as was the case a moment ago with A and B, now appear to us as distinct. But between A and B, now distinct, a new term D will be inserted, which we shall be able to distinguish neither from A nor from B.
	Malgré l'emploi des méthodes les plus perfectionnées, les résultats bruts de notre expérience présenteront toujours les caractères du continu physique avec la contradiction qui y est inhérente.	However refined the methods we employ, the raw results of our experience will always present the characteristics of the physical continuum, with the contradiction inherent in it.
1.2.25	Nous n'y échapperons qu'en intercalant sans cesse des termes nouveaux entre les termes déjà discernés, et cette opération devra être poursuivie indéfiniment. Nous ne pourrions concevoir qu'on dût l'arrêter que si nous nous représentions quelque instrument assez puissant pour décomposer le continu physique en éléments discrets, comme le télescope résout la voie lactée en étoiles. Mais nous ne pouvons nous imaginer cela ; en effet, c'est toujours avec nos sens que nous nous servons de nos instruments ; c'est avec l'œil que nous observons l'image agrandie par le microscope, et cette image doit, par conséquent, toujours conserver les caractères de la sensation visuelle et par conséquent ceux du continu physique.	We shall escape it only by constantly inserting new terms between the terms already distinguished, and this operation will have to be continued indefinitely. We could conceive of its having to stop only if we pictured some instrument powerful enough to break the physical continuum down into discrete elements, as the telescope resolves the Milky Way into stars. But we cannot imagine this. For it is always with our senses that we use our instruments: it is with the eye that we observe the image enlarged by the microscope. This image must therefore always retain the characteristics of visual sensation, and therefore those of the physical continuum.
1.2.26	Rien ne distingue une longueur observée directement de la moitié de cette longueur doublée par le microscope. Le tout est homogène à la partie, c'est là une nouvelle contradiction, ou plutôt c'en serait une si le nombre des termes était supposé fini ; il est clair en effet que la partie contenant moins de termes que le tout ne saurait être semblable au tout.	Nothing distinguishes a length observed directly from half that length doubled by the microscope. The whole is homogeneous with the part. This is a new contradiction—or rather it would be one if the number of terms were supposed finite. For it is clear that the part, containing fewer terms than the whole, could not be similar to the whole.
1.2.27		

	FRENCH	ENGLISH
	La contradiction cesse dès que le nombre des termes est regardé comme infini ; rien n'empêche, par exemple, de considérer l'ensemble des nombres entiers comme semblable à l'ensemble des nombres pairs qui n'en est pourtant qu'une partie ; et, en effet, à chaque nombre entier correspond un nombre pair qui en est le double.	The contradiction ceases as soon as the number of terms is regarded as infinite. Nothing prevents us, for example, from regarding the set of whole numbers as similar to the set of even numbers, which is nevertheless only a part of it. Indeed, to each whole number there corresponds an even number, its double.
1.2.28	Mais ce n'est pas seulement pour échapper à cette contradiction contenue dans les données empiriques que l'esprit est amené à créer le concept d'un continu, formé d'un nombre indéfini de termes.	But it is not only to escape this contradiction contained in the empirical data that the mind is led to create the concept of a continuum formed of an indefinite number of terms.
1.2.29	Tout se passe comme pour la suite des nombres entiers. Nous avons la faculté de concevoir qu'une unité peut être ajoutée à une collection d'unités ; c'est grâce à l'expérience que nous avons l'occasion d'exercer cette faculté et que nous en prenons conscience ; mais, dès ce moment, nous sentons que notre pouvoir n'a pas de limite et que nous pourrions compter indéfiniment, quoique nous n'ayons jamais eu à compter qu'un nombre fini d'objets.	It is just as with the sequence of whole numbers. We have the faculty of conceiving that a unit can be added to a collection of units. It is thanks to experience that we have occasion to exercise this faculty and become aware of it. But from that moment we feel that our power has no limit and that we could count indefinitely, although we have never had to count more than a finite number of objects.
1.2.30	De même, dès que nous avons été amenés à intercaler des moyens entre deux termes consécutifs d'une série, nous sentons que cette opération peut être poursuivie au delà de toute limite et qu'il n'y a pour ainsi dire aucune raison intrinsèque de s'arrêter.	In the same way, as soon as we have been led to insert means between two consecutive terms of a series, we feel that this operation can be continued beyond any limit, and that there is, so to speak, no intrinsic reason to stop.
1.2.31	Qu'on me permette, afin d'abréger le langage, d'appeler continu mathématique du premier ordre tout ensemble de termes formés d'après la même loi que l'échelle des nombres commensurables. Si nous y intercalons ensuite des échelons nouveaux d'après la loi de formation des nombres incommensurables, nous obtiendrons ce que nous appellerons un continu du deuxième ordre.	To shorten the language, let me call a mathematical continuum of the first order any set of terms formed according to the same law as the scale of commensurable numbers. If we then insert new steps into it according to the law by which incommensurable numbers are formed, we shall obtain what we shall call a continuum of the second order.
1.2.32	*Deuxième stade.* — Nous n'avons fait encore que le premier pas ; nous avons expliqué l'origine des continus de premier ordre ; mais il faut voir maintenant pourquoi ils n'ont pu suffire encore et pourquoi il a fallu inventer les nombres incommensurables.	*Second stage.*—So far we have taken only the first step: we have explained the origin of continua of the first order. But we must now see why they still could not suffice, and why it was necessary to invent incommensurable numbers.
1.2.33	Si l'on veut s'imaginer une ligne, ce ne pourra être qu'avec les caractères du continu physique, c'est-à-dire qu'on ne pourra se la représenter qu'avec une certaine largeur. Deux lignes nous apparaîtront alors sous la forme de deux bandes étroites, et si l'on se contente de cette image grossière, il est évident que si les deux lignes se traversent, elles auront une partie commune.	If we try to imagine a line, we can do so only with the characteristics of the physical continuum; that is, we can picture it only with a certain width. Two lines will then appear to us as two narrow strips. If we are content with this crude image, it is evident that if the two lines cross, they will have a part in common.

	FRENCH	ENGLISH
1.2.34	Mais le géomètre pur fait un effort de plus : sans renoncer tout à fait au secours de ses sens, il veut arriver au concept de la ligne sans largeur, du point sans étendue. Il n'y peut parvenir qu'en regardant la ligne comme la limite vers laquelle tend une bande de plus en plus mince, et le point comme la limite vers laquelle tend une aire de plus en plus petite. Et alors, nos deux bandes, quelque étroites qu'elles soient, auront toujours une aire commune d'autant plus petite qu'elles seront moins larges et dont la limite sera ce que le géomètre pur appelle un point.	But the pure geometer makes a further effort. Without entirely giving up the help of his senses, he wants to arrive at the concept of a line without width, of a point without extension. He can do so only by regarding the line as the limit toward which a strip tends as it grows thinner and thinner, and the point as the limit toward which an area tends as it grows smaller and smaller. And then our two strips, however narrow they may be, will always have a common area, which will be smaller the narrower they are, and whose limit will be what the pure geometer calls a point.
1.2.35	C'est pourquoi l'on dit que deux lignes qui se traversent ont un point commun et cette vérité paraît intuitive.	That is why we say that two lines that cross have a point in common, and this truth seems intuitive.
1.2.36	Mais elle impliquerait contradiction si l'on concevait les lignes comme des continus du premier ordre, c'est-à-dire si sur les lignes tracées par le géomètre ne devaient se trouver que des points ayant pour coordonnées des nombres rationnels. La contradiction serait manifeste dès qu'on affirmerait par exemple l'existence des droites et des cercles.	But it would imply a contradiction if lines were conceived as continua of the first order—that is, if the lines drawn by the geometer were to contain only points whose coordinates are rational numbers. The contradiction would be manifest as soon as one asserted, for example, the existence of straight lines and circles.
1.2.37	Il est clair, en effet, que si les points dont les coordonnées sont commensurables étaient seuls regardés comme réels, le cercle inscrit dans un carré et la diagonale de ce carré ne se couperaient pas, puisque les coordonnées du point d'intersection sont incommensurables.	It is clear, in fact, that if only the points with commensurable coordinates were regarded as real, the circle inscribed in a square and the diagonal of that square would not intersect, since the coordinates of the point of intersection are incommensurable.
1.2.38	Cela ne serait pas encore assez, car on n'aurait ainsi que certains nombres incommensurables et non pas tous ces nombres.	Even that would not be enough, for in this way we would obtain only certain incommensurable numbers, and not all of them.
1.2.39	Mais représentons-nous une droite divisée en deux demi-droites. Chacune de ces demi-droites apparaîtra à notre imagination comme une bande d'une certaine largeur ; ces bandes empièteront d'ailleurs l'une sur l'autre, puisqu'entre elles il ne doit pas y avoir d'intervalle. La partie commune nous apparaîtra comme un point qui subsistera toujours quand nous voudrons imaginer nos bandes de plus en plus minces, de sorte que nous admettrons comme une vérité intuitive que si une droite est partagée en deux demi-droites, la frontière commune de ces deux droites est un point ; nous reconnaissons là la conception de Kronecker, où un nombre incommensurable était regardé comme la frontière commune de deux classes de nombres rationnels.	But let us picture a straight line divided into two half-lines. Each of these half-lines will appear to our imagination as a strip of a certain width. These strips will, moreover, overlap, since there must be no gap between them. The common part will appear to us as a point which will always remain, however thin we try to imagine our strips becoming. So we shall accept as an intuitive truth that if a straight line is divided into two half-lines, the common boundary of these two lines is a point. Here we recognize Kronecker's conception, in which an incommensurable number was regarded as the common boundary of two classes of rational numbers.
1.2.40		

FRENCH

Telle est l'origine du continu du deuxième ordre, qui est le continu mathématique proprement dit.

1.2.41 *Résumé.* — En résumé, l'esprit a la faculté de créer des symboles, et c'est ainsi qu'il a construit le continu mathématique, qui n'est qu'un système particulier de symboles. Sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction ; mais l'esprit n'en use que si l'expérience lui en fournit une raison.

1.2.42 Dans le cas qui nous occupe, cette raison était la notion du continu physique, tirée des données brutes des sens. Mais cette notion conduit à une série de contradictions dont il faut s'affranchir successivement. C'est ainsi que nous sommes contraints à imaginer un système de symboles de plus en plus compliqué. Celui auquel nous nous arrêterons est non seulement exempt de contradiction interne, il en était déjà ainsi à toutes les étapes que nous avons franchies, mais il n'est pas non plus en contradiction avec diverses propositions dites intuitives et qui sont tirées de notions empiriques plus ou moins élaborées.

ENGLISH

Such is the origin of the continuum of the second order, which is the mathematical continuum properly so called.

Summary.—In short, the mind has the faculty of creating symbols, and it is in this way that it has constructed the mathematical continuum, which is only a particular system of symbols. Its power is limited only by the need to avoid all contradiction. But the mind uses this power only if experience gives it a reason to.

In the case before us, this reason was the notion of the physical continuum, drawn from the raw data of the senses. But this notion leads to a series of contradictions from which we must free ourselves one after another. In this way we are compelled to imagine a more and more complicated system of symbols. The one at which we finally stop is not only free of internal contradiction—that was already true at every stage we have passed through. It is also not in contradiction with various so-called intuitive propositions, which are drawn from more or less elaborated empirical notions.

MEASURABLE MAGNITUDE

To measure a continuum we need a new convention fixing when two intervals are equal.

FRENCH

1.2.43 La grandeur mesurable. — Les grandeurs que nous avons étudiées jusqu'ici ne sont pas *mesurables* ; nous savons bien dire si telle de ces grandeurs est plus grande que telle autre, mais non si elle est deux fois ou trois fois plus grande.

1.2.44 Je ne me suis en effet préoccupé jusqu'ici que de l'ordre dans lequel nos termes sont rangés. Mais cela ne suffit pas pour la plupart des applications. Il faut apprendre à comparer l'intervalle qui sépare deux termes quelconques. C'est à cette condition seulement que le continu devient une grandeur mesurable et qu'on peut lui appliquer les opérations de l'arithmétique.

1.2.45 Cela ne peut se faire qu'à l'aide d'une *convention* nouvelle et spéciale. On *conviendra* que dans tel cas l'intervalle compris entre les termes A et B est égal à l'intervalle qui sépare C et D. Par exemple au début de notre travail, nous sommes partis de l'échelle des nombres entiers et nous avons supposé que l'on intercalait entre deux échelons consécutifs *n* échelons intermédiaires ; eh bien, ces

ENGLISH

Measurable magnitude.—The magnitudes we have studied so far are not *measurable*. We can indeed say whether one of these magnitudes is greater than another, but not whether it is twice or three times as great.

So far, in fact, I have been concerned only with the order in which our terms are arranged. But that is not enough for most applications. We must learn to compare the interval separating any two terms. Only on this condition does the continuum become a measurable magnitude, to which the operations of arithmetic can be applied.

This can be done only with the help of a new and special *convention*. We shall *agree* that in such and such a case the interval between the terms A and B is equal to the interval separating C and D. For example, at the beginning of our work we started from the scale of whole numbers and supposed that *n* intermediate steps were inserted between

	FRENCH	ENGLISH
	échelons nouveaux seront par convention regardés comme équidistants.	two consecutive steps. Well, these new steps will be regarded, by convention, as equidistant.
1.2.46	C'est là une façon de définir l'addition de deux grandeurs ; car si l'intervalle AB est par définition égale à l'intervalle CD, l'intervalle AD sera par définition la somme des intervalles AB et AC.	This is one way of defining the addition of two magnitudes; for if the interval AB is by definition equal to the interval CD, the interval AD will by definition be the sum of the intervals AB and AC.
1.2.47	Cette définition est arbitraire dans une très large mesure. Pourtant elle ne l'est pas complètement. Elle est assujettie à certaines conditions et par exemple aux règles de commutativité et d'associativité de l'addition. Mais pourvu que la définition choisie satisfasse à ces règles, le choix est indifférent et il est inutile de le préciser.	This definition is arbitrary to a very large extent. Yet it is not entirely so. It is subject to certain conditions—for example, to the commutative and associative laws of addition. But provided the definition chosen satisfies these rules, the choice does not matter, and there is no need to specify it.
1.2.48	Remarques diverses. — Nous pouvons nous poser plusieurs questions importantes :	Various remarks.—We may ask ourselves several important questions:
1.2.49	1° La puissance créatrice de l'esprit est-elle épuisée par la création du continu mathématique ?	1. Is the creative power of the mind exhausted by the creation of the mathematical continuum?
1.2.50	Non : les travaux de Du Bois-Reymond le démontrent d'une manière frappante.	No: the work of Du Bois-Reymond demonstrates this in a striking way.[8]
1.2.51	On sait que les mathématiciens distinguent des infiniment petits de différents ordres et que ceux du deuxième ordre sont infiniment petits non seulement d'une manière absolue, mais encore par rapport à ceux du premier ordre. Il n'est pas difficile d'imaginer des infiniment petits d'ordre fractionnaire ou même irrationnel, et nous retrouvons ainsi cette échelle du continu mathématique qui a fait l'objet des pages qui précèdent.	We know that mathematicians distinguish infinitesimals of different orders, and that those of the second order are infinitely small not only absolutely but also relative to those of the first order. It is not difficult to imagine infinitesimals of fractional or even irrational order. And so we come back to that scale of the mathematical continuum which was the subject of the preceding pages.
1.2.52	Mais il y a plus ; il existe des infiniment petits qui sont infiniment petits par rapport à ceux du premier ordre et infiniment grands, au contraire, par rapport à ceux de l'ordre $1 + \varepsilon$, et cela quelque petit que soit ε. Voilà donc des termes nouveaux intercalés dans notre série, et si l'on veut me permettre de revenir au langage que j'employais tout à l'heure et qui est assez commode, bien qu'il ne soit pas consacré par l'usage, je dirai que l'on a créé ainsi une sorte de continu du troisième ordre.	But there is more. There exist infinitesimals that are infinitely small relative to those of the first order and, on the contrary, infinitely large relative to those of order $1 + \varepsilon$, however small ε may be. Here, then, are new terms inserted into our series. If I may return to the language I was using a moment ago, which is quite convenient although not sanctioned by usage, I shall say that in this way a kind of continuum of the third order has been created.
1.2.53	Il serait aisé d'aller plus loin, mais ce serait un vain jeu de l'esprit ; on n'imaginerait que des symboles sans application possible, et personne ne s'en avisera. Le continu du troisième ordre auquel conduit la considération des divers ordres d'infiniment petits est lui-même trop peu utile pour avoir conquis droit de cité,	It would be easy to go further, but that would be an idle game of the mind. We would be imagining only symbols with no possible application, and no one will think of doing so. The continuum of the third order to which the consideration of the various orders of infinitesimals leads is itself of too

8 Paul du Bois-Reymond (1831–1889), German mathematician who studied the comparative rates of growth of functions.

	FRENCH	ENGLISH
	et les géomètres ne le regardent que comme une simple curiosité. L'esprit n'use de sa faculté créatrice que quand l'expérience lui en impose la nécessité.	little use to have earned full acceptance, and mathematicians regard it only as a mere curiosity. The mind uses its creative faculty only when experience imposes the necessity upon it.
1.2.54	2° Une fois en possession du concept du continu mathématique, est-on à l'abri de contradictions analogues à celles qui lui ont donné naissance ?	2. Once in possession of the concept of the mathematical continuum, are we safe from contradictions like those that gave rise to it?
1.2.55	Non, et j'en vais donner un exemple.	No, and I shall give an example.
1.2.56	Il faut être bien savant pour ne pas regarder comme évident que toute courbe a une tangente : et en effet si l'on se représente cette courbe et une droite comme deux bandes étroites, on pourra toujours les disposer de façon qu'elles aient une partie commune sans se traverser. Que l'on imagine ensuite la largeur de ces deux bandes diminuant indéfiniment, cette partie commune pourra toujours subsister et, à la limite pour ainsi dire, les deux lignes auront un point commun sans se traverser, c'est-à-dire qu'elles se toucheront.	It takes a great deal of learning not to regard it as obvious that every curve has a tangent. And indeed, if we picture this curve and a straight line as two narrow strips, we can always arrange them so that they have a part in common without crossing. If we then imagine the width of these two strips decreasing indefinitely, this common part can always remain. In the limit, so to speak, the two lines will have a point in common without crossing—that is, they will touch.
1.2.57	Le géomètre qui raisonnerait de la sorte, consciemment ou non, ne ferait pas autre chose que ce que nous avons fait plus haut pour démontrer que deux lignes qui se traversent ont un point commun, et son intuition pourrait paraître tout aussi légitime.	The geometer who reasoned in this way, consciously or not, would be doing nothing other than what we did above to show that two lines that cross have a point in common, and his intuition might seem just as legitimate.
1.2.58	Elle le tromperait cependant. On peut démontrer qu'il y a des courbes qui n'ont pas de tangente, si cette courbe est définie comme un continu analytique de deuxième ordre.	Yet it would deceive him. One can prove that there are curves that have no tangent, if the curve is defined as an analytic continuum of the second order.
1.2.59	Sans doute quelque artifice analogue à ceux que nous avons étudiés plus haut aurait permis de lever la contradiction ; mais, comme celle-ci ne se rencontre que dans des cas très exceptionnels, on ne s'en est pas préoccupé. Au lieu de chercher à concilier l'intuition avec l'analyse, on s'est contenté de sacrifier l'une des deux, et comme l'analyse doit rester impeccable, c'est à l'intuition que l'on a donné tort.	No doubt some device like those we studied above would have made it possible to remove the contradiction. But as it arises only in very exceptional cases, no one has bothered about it. Instead of trying to reconcile intuition with analysis, people have been content to sacrifice one of the two; and since analysis must remain flawless, it is intuition that has been declared in the wrong.

CONTINUA OF SEVERAL DIMENSIONS

Dimension is defined by the kinds of cuts needed to divide a physical continuum.

	FRENCH	ENGLISH
1.2.60	Le continu physique à plusieurs dimensions. — J'ai étudié plus haut le continu physique tel qu'il ressort des données immédiates de nos sens, ou, si l'on veut, des résultats bruts des expériences de Fechner ; j'ai montré	The physical continuum of several dimensions.—Above, I studied the physical continuum as it emerges from the immediate data of our senses, or, if you like, from the raw results of Fechner's experiments. I showed that these results are

	FRENCH	ENGLISH
	que ces résultats sont résumés dans les formules contradictoires A = B, B = C, A < C.	summed up in the contradictory formulas A = B, B = C, A < C.
1.2.61	Voyons maintenant comment cette notion s'est généralisée et comment a pu en sortir le concept des continus à plusieurs dimensions.	Let us now see how this notion was generalized, and how the concept of continua of several dimensions could arise from it.
1.2.62	Considérons deux ensembles quelconques de sensations. Ou bien nous pourrons les discerner l'un de l'autre, ou bien nous ne le pourrons pas, de même que dans les expériences de Fechner un poids de 10 grammes pouvait se distinguer d'un poids de 12 grammes, mais pas d'un poids de 11 grammes. Je n'ai pas besoin d'autre chose pour construire le continu à plusieurs dimensions.	Consider any two sets of sensations. Either we shall be able to tell them apart or we shall not, just as in Fechner's experiments a weight of 10 grams could be distinguished from a weight of 12 grams, but not from one of 11 grams. I need nothing more to construct the continuum of several dimensions.
1.2.63	Appelons *élément* un de ces ensembles de sensations. Ce sera quelque chose d'analogue au *point* des mathématiciens ; ce ne sera pas tout à fait la même chose cependant. Nous ne pouvons pas dire que notre élément soit sans étendue, puisque nous ne savons pas le distinguer des éléments voisins et qu'il est ainsi entouré d'une sorte de brouillard. Si l'on veut me permettre cette comparaison astronomique, nos « éléments » seraient comme des nébuleuses, tandis que les points mathématiques seraient comme des étoiles.	Let us call one of these sets of sensations an *element*. It will be something analogous to the mathematicians' *point*, yet it will not be quite the same thing. We cannot say that our element is without extension, since we cannot distinguish it from neighboring elements, and it is thus surrounded by a sort of fog. If I may use an astronomical comparison, our "elements" would be like nebulae, while mathematical points would be like stars.
1.2.64	Cela posé, un système d'éléments formera un *continu*, si l'on peut passer d'un quelconque d'entre eux à un autre également quelconque, par une série d'éléments consécutifs enchaînés de telle sorte que chacun d'eux ne puisse se discerner du précédent. Cette *chaîne* est à la *ligne* du mathématicien ce qu'un *élément* isolé était au point.	This being granted, a system of elements will form a *continuum* if we can pass from any one of them to any other by a series of consecutive elements, linked in such a way that each cannot be distinguished from the one before. This *chain* is to the mathematician's *line* what an isolated *element* was to the point.
1.2.65	Avant d'aller plus loin, il faut que j'explique ce que c'est qu'une *coupure*. Envisageons un continu C et enlevons-lui certains de ses éléments que pour un instant nous regarderons comme n'appartenant plus à ce continu. L'ensemble des éléments ainsi enlevés s'appellera une coupure. Il pourra se faire que grâce à cette coupure, C soit *subdivisé* en plusieurs continus distincts, l'ensemble des éléments restants cessant de former un continu unique.	Before going further, I must explain what a *cut* is. Consider a continuum C and remove from it some of its elements, which for the moment we shall regard as no longer belonging to that continuum. The set of elements so removed will be called a cut. It may happen that, by means of this cut, C is *subdivided* into several distinct continua, the set of remaining elements ceasing to form a single continuum.
1.2.66	Alors il y aura sur C deux éléments, A et B, que l'on devra regarder comme appartenant à deux continus distincts et on le reconnaîtra parce qu'il sera impossible de trouver une *chaîne* d'éléments consécutifs de C partant de A et allant en B, et chaque élément étant indiscernable du précédent, *à moins que l'un des éléments de cette chaîne ne soit indiscernable de l'un des éléments de la coupure et ne doive par suite être exclu*.	There will then be two elements of C, A and B, which must be regarded as belonging to two distinct continua. This will be recognized by the fact that it will be impossible to find a *chain* of consecutive elements of C starting from A and going to B, each element being indistinguishable from the one before, *unless one of the elements of this chain is*

	FRENCH	ENGLISH
		indistinguishable from one of the elements of the cut, and must therefore be excluded.
1.2.67	Il pourra se faire au contraire que la coupure établie soit insuffisante pour subdiviser le continu C. Pour classer les continus physiques, nous examinerons précisément quelles sont les coupures qu'il est nécessaire d'y faire pour les subdiviser.	It may happen, on the contrary, that the cut made is not enough to subdivide the continuum C. To classify physical continua, we shall examine precisely which cuts must be made in them in order to subdivide them.
1.2.68	Si on peut subdiviser un continu physique C par une coupure se réduisant à un nombre fini d'éléments tous discernables les uns des autres (et ne formant par conséquent ni un continu, ni plusieurs continus), nous dirons que C est un continu *à une dimension.*	If a physical continuum C can be subdivided by a cut consisting of a finite number of elements, all distinguishable from one another (and therefore forming neither one continuum nor several), we shall say that C is a continuum *of one dimension*.
1.2.69	Si au contraire C ne peut être subdivisé que par des coupures qui soient elles-mêmes des continus, nous dirons que C a plusieurs dimensions. S'il suffit de coupures qui soient des continus à une dimension, nous dirons que C a deux dimensions ; s'il suffit de coupures à deux dimensions, nous dirons que C a trois dimensions, et ainsi de suite.	If, on the other hand, C can be subdivided only by cuts that are themselves continua, we shall say that C has several dimensions. If cuts that are continua of one dimension suffice, we shall say that C has two dimensions; if cuts of two dimensions suffice, we shall say that C has three dimensions; and so on.
1.2.70	Ainsi se trouve définie la notion du continu physique à plusieurs dimensions, grâce à ce fait très simple que deux ensembles de sensations peuvent être discernables ou indiscernables.	Thus the notion of the physical continuum of several dimensions is defined, thanks to the very simple fact that two sets of sensations may be distinguishable or indistinguishable.
1.2.71	Le continu mathématique à plusieurs dimensions. — Celle du continu mathématique à *n* dimensions en est sortie tout naturellement par un processus tout pareil à celui que nous avons étudié au début de ce chapitre. Un point d'un pareil continu nous apparaît, on le sait, comme défini par un système de *n* grandeurs distinctes que l'on appelle ses coordonnées.	The mathematical continuum of several dimensions.—The notion of the mathematical continuum of *n* dimensions arose from it quite naturally, by a process just like the one we studied at the beginning of this chapter. A point of such a continuum appears to us, as we know, as defined by a system of *n* distinct magnitudes called its coordinates.
1.2.72	Il n'est pas toujours nécessaire que ces grandeurs soient mesurables et il y a par exemple une branche de la géométrie où on fait abstraction de la mesure de ces grandeurs, où on se préoccupe seulement de savoir par exemple si sur une courbe ABC, le point B est entre les points A et C et non de savoir si l'arc AB est égal à l'arc BC ou s'il est deux fois plus grand. C'est ce qu'on appelle l'*Analysis Situs*.	It is not always necessary for these magnitudes to be measurable. There is, for example, a branch of geometry in which the measurement of these magnitudes is disregarded. In it one is concerned only with knowing, say, whether on a curve ABC the point B lies between the points A and C—and not whether the arc AB is equal to the arc BC or twice as great. This is what is called *Analysis Situs*.[9]
1.2.73	C'est tout un corps de doctrine qui a attiré l'attention des plus grands géomètres et où l'on voit sortir les uns des autres une série de théorèmes remarquables. Ce qui distingue ces théorèmes de ceux de la géométrie ordinaire, c'est qu'ils sont purement qualitatifs et qu'ils	It is a whole body of doctrine that has attracted the attention of the greatest mathematicians, and in which we see a series of remarkable theorems arise one from another. What distinguishes these theorems from those of ordinary geometry is that

9 Latin for "analysis of position"; the branch of mathematics now called topology.

	FRENCH	ENGLISH
	resteraient vrais si les figures étaient copiées par un dessinateur malhabile qui en altérerait grossièrement les proportions et remplacerait les droites par un trait plus ou moins courbe.	they are purely qualitative. They would remain true if the figures were copied by a clumsy draftsman who grossly distorted their proportions and replaced the straight lines by strokes that were more or less curved.
1.2.74	C'est quand on a voulu introduire la mesure dans le continu que nous venons de définir que ce continu est devenu l'espace et que la géométrie est née. Mais je réserve cette étude pour la deuxième partie.	It was when people tried to introduce measurement into the continuum we have just defined that this continuum became space and geometry was born. But I reserve this study for the second part.

Part Two: Space

L'espace

Non-Euclidean geometries, the space of geometry against the space of perception, and why the axioms of geometry are neither synthetic a priori truths nor experimental facts but conventions (Chapters III–V).

CHAPITRE III. LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES.

	FRENCH	ENGLISH
2.3.1	Toute conclusion suppose des prémisses ; ces prémisses elles-mêmes ou bien sont évidentes par elles-mêmes et n'ont pas besoin de démonstration, ou bien ne peuvent être établies qu'en s'appuyant sur d'autres propositions, et comme on ne saurait remonter ainsi à l'infini, toute science déductive, et en particulier la géométrie, doit reposer sur un certain nombre d'axiomes indémontrables. Tous les traités de géométrie débutent donc par l'énoncé de ces axiomes. Mais il y a entre eux une distinction à faire : quelques-uns, comme celui-ci par exemple : « deux quantités égales à une même troisième sont égales entre elles », ne sont pas des propositions de géométrie, mais des propositions d'analyse. Je les regarde comme des jugements analytiques *a priori*, je ne m'en occuperai pas.	Every conclusion presupposes premises. These premises themselves are either self-evident and need no proof, or can be established only by relying on other propositions. Since we cannot go back in this way indefinitely, every deductive science, and geometry in particular, must rest on a certain number of unprovable axioms. All treatises on geometry therefore begin by stating these axioms. But a distinction must be made among them. Some, such as this one—"two quantities equal to the same third quantity are equal to each other"—are not propositions of geometry but propositions of analysis. I regard them as analytic *a priori* judgments, and I shall not deal with them.
2.3.2	Mais je dois insister sur d'autres axiomes qui sont spéciaux à la géométrie. La plupart des traités en énoncent trois explicitement :	But I must dwell on other axioms that are peculiar to geometry. Most treatises state three of them explicitly:
2.3.3	1° Par deux points ne peut passer qu'une droite ;	1. Through two points only one straight line can pass;
2.3.4	2° La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.	2. The straight line is the shortest path from one point to another.
2.3.5	3° Par un point on ne peut faire passer qu'une parallèle à une droite donnée.	3. Through a point only one parallel to a given straight line can be drawn.
2.3.6	Bien que l'on se dispense généralement de démontrer le second de ces axiomes, il serait possible de le déduire des deux autres et de ceux, beaucoup plus nombreux, que l'on admet implicitement sans les énoncer, ainsi que je l'expliquerai plus loin.	Although it is generally thought unnecessary to prove the second of these axioms, it could be deduced from the other two and from those—far more numerous—that are implicitly accepted without being stated, as I shall explain later.
2.3.7	On a longtemps cherché en vain à démontrer également le troisième axiome, connu sous le nom de *postulatum d'Euclide*. Ce qu'on a dépensé d'efforts dans cet espoir chimérique est vraiment inimaginable. Enfin au commencement du siècle et à peu près en même temps,	For a long time people tried in vain to prove the third axiom as well, known as *Euclid's postulate*. The amount of effort spent in this chimerical hope is truly unimaginable. At last, early in the nineteenth century and at about the same time, two

	FRENCH	ENGLISH
	deux savants, un Russe et un Hongrois, Lobatchevsky et Bolyai établirent d'une façon irréfutable que cette démonstration est impossible ; ils nous ont à peu près débarrassés des inventeurs de géométries sans postulatum ; depuis lors l'Académie des Sciences ne reçoit plus guère qu'une ou deux démonstrations nouvelles par an.	scientists, a Russian and a Hungarian, Lobachevsky and Bolyai, established irrefutably that this proof is impossible. They have more or less rid us of the inventors of geometries without the postulate; since then the Academy of Sciences receives hardly more than one or two new proofs a year.[1]
2.3.8	La question n'était pas épuisée ; elle ne tarda pas à faire un grand pas par la publication du célèbre mémoire de Riemann intitulé : *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zum Grunde liegen*. Cet opuscule a inspiré la plupart des travaux récents dont je parlerai plus loin et parmi lesquels il convient de citer ceux de Beltrami et de Helmholtz.	The question was not exhausted. It soon took a great step forward with the publication of Riemann's famous memoir entitled *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zum Grunde liegen*. This short work inspired most of the recent studies I shall discuss later, among which those of Beltrami and Helmholtz deserve mention.[2]

LOBACHEVSKY'S GEOMETRY

Denying Euclid's postulate yields a consistent geometry with strange but coherent theorems.

	FRENCH	ENGLISH
2.3.9	La Géométrie de Lobatchevsky. — S'il était possible de déduire le postulatum d'Euclide des autres axiomes, il arriverait évidemment qu'en niant le postulatum, et en admettant les autres axiomes, on serait conduit à des conséquences contradictoires ; il serait donc impossible d'appuyer sur de telles prémisses une géométrie cohérente.	Lobachevsky's geometry.—If it were possible to deduce Euclid's postulate from the other axioms, then clearly, by denying the postulate while accepting the other axioms, we would be led to contradictory consequences. It would therefore be impossible to base a coherent geometry on such premises.
2.3.10	Or c'est précisément ce qu'a fait Lobatchevsky. Il suppose au début que :	Now that is precisely what Lobachevsky did. He assumes at the outset that:
2.3.11	*L'on peut par un point mener plusieurs parallèles à une droite donnée ;*	*Through a point several parallels to a given straight line can be drawn;*
2.3.12	Et il conserve d'ailleurs tous les autres axiomes d'Euclide. De ces hypothèses, il déduit une suite de théorèmes entre lesquels il est impossible de relever aucune contradiction et il construit une géométrie dont l'impeccable logique ne le cède en rien à celle de la géométrie euclidienne.	And otherwise he keeps all of Euclid's other axioms. From these hypotheses he deduces a series of theorems among which it is impossible to find any contradiction, and he constructs a geometry whose flawless logic is in no way inferior to that of Euclidean geometry.
2.3.13	Les théorèmes sont, bien entendu, très différents de ceux auxquels nous sommes accoutumés et ils ne laissent pas de déconcerter un peu d'abord.	The theorems are, of course, very different from those we are used to, and at first they are somewhat disconcerting.
2.3.14	Ainsi la somme des angles d'un triangle est toujours plus petite que deux droits et la différence entre cette somme	Thus the sum of the angles of a triangle is always less than two right angles, and the difference between this sum and two right angles is proportional to the area of the triangle.

1 Euclid's postulate is the parallel postulate. János Bolyai (1802–1860), Hungarian mathematician, published his non-Euclidean geometry in 1832, independently of Lobachevsky.

	FRENCH	ENGLISH
	et deux droits est proportionnelle à la surface du triangle.	
2.3.15	Il est impossible de construire une figure semblable à une figure donnée mais de dimensions différentes.	It is impossible to construct a figure similar to a given figure but of different dimensions.
2.3.16	Si l'on divise une circonférence en *n* parties égales, et qu'on mène des tangentes aux points de division, ces *n* tangentes formeront un polygone si le rayon de la circonférence est assez petit ; mais si ce rayon est assez grand, elles ne se rencontreront pas.	If a circle is divided into *n* equal parts and tangents are drawn at the points of division, these *n* tangents will form a polygon if the radius of the circle is small enough; but if the radius is large enough, they will not meet.
2.3.17	Il est inutile de multiplier ces exemples ; les propositions de Lobatchevsky n'ont plus aucun rapport avec celles d'Euclide, mais elles ne sont pas moins logiquement reliées les unes aux autres.	There is no need to multiply these examples. Lobachevsky's propositions no longer bear any relation to Euclid's, but they are no less logically connected with one another.

RIEMANN'S GEOMETRY

Imaginary flat beings on a sphere illustrate a space that is finite yet unbounded.

	FRENCH	ENGLISH
2.3.18	La Géométrie de Riemann. — Imaginons un monde uniquement peuplé d'êtres dénués d'épaisseur ; et supposons que ces animaux « infiniment plats » soient tous dans un même plan et n'en puissent sortir. Admettons de plus que ce monde soit assez éloigné des autres pour être soustrait à leur influence. Pendant que nous sommes en train de faire des hypothèses, il ne nous en coûte pas plus de douer ces êtres de raisonnement et de les croire capables de faire de la géométrie. Dans ce cas, ils n'attribueront certainement à l'espace que deux dimensions.	Riemann's geometry.—Let us imagine a world inhabited solely by beings without thickness, and suppose that these "infinitely flat" animals all lie in one and the same plane and cannot leave it. Let us further assume that this world is far enough from the others to be free from their influence. While we are busy making hypotheses, it costs us nothing more to endow these beings with reason and to believe them capable of doing geometry. In that case they will certainly attribute to space only two dimensions.
2.3.19	Mais supposons maintenant que ces animaux imaginaires, tout en restant dénués d'épaisseur, aient la forme d'une figure sphérique, et non d'une figure plane et soient tous sur une même sphère sans pouvoir s'en écarter. Quelle géométrie pourront-ils construire ? Il est clair d'abord qu'ils n'attribueront à l'espace que deux dimensions ; ce qui jouera pour eux le rôle de la ligne droite, ce sera le plus court chemin d'un point à un autre sur la sphère, c'est-à-dire un arc de grand cercle, en un mot leur géométrie sera la géométrie sphérique.	But now suppose that these imaginary animals, while still without thickness, have the shape of a spherical figure rather than a plane one, and all lie on one and the same sphere, unable to move away from it. What geometry will they be able to construct? It is clear, first, that they will attribute to space only two dimensions. What will play for them the part of the straight line will be the shortest path from one point to another on the sphere—that is, an arc of a great circle. In a word, their geometry will be spherical geometry.
2.3.20	Ce qu'ils appelleront l'espace, ce sera cette sphère d'où ils ne peuvent sortir et sur laquelle se passent tous les phénomènes dont ils peuvent avoir connaissance. Leur	What they will call space will be this sphere, which they cannot leave and on which all the phe-

2 Bernhard Riemann (1826–1866), German mathematician; the memoir, "On the Hypotheses Which Lie at the Foundations of Geometry," was a lecture of 1854. Eugenio Beltrami (1835–1900) was an Italian mathematician; Hermann von Helmholtz (1821–1894) a German physicist and physiologist.

	FRENCH	ENGLISH
	espace sera donc *sans limites* puisqu'on peut sur une sphère aller toujours devant soi sans jamais être arrêté, et cependant il sera *fini* ; on n'en trouvera jamais le bout, mais on pourra en faire le tour.	nomena they can know about take place. Their space will therefore be *unbounded*, since on a sphere one can always go straight ahead without ever being stopped; and yet it will be *finite*. One will never find its end, but one will be able to go all the way around it.
2.3.21	Eh bien, la géométrie de Riemann, c'est la géométrie sphérique étendue à trois dimensions. Pour la construire, le mathématicien allemand a dû jeter par-dessus bord, non seulement le postulatum d'Euclide, mais encore le premier axiome : *Par deux points on ne peut faire passer qu'une droite*.	Well then, Riemann's geometry is spherical geometry extended to three dimensions. To construct it, the German mathematician had to throw overboard not only Euclid's postulate but also the first axiom: *Through two points only one straight line can pass*.
2.3.22	Sur une sphère, par deux points donnés on ne peut faire *en général* passer qu'un grand cercle (qui, comme nous venons de le voir, jouerait le rôle de la droite pour nos êtres imaginaires), mais il y a une exception : si les deux points donnés sont diamétralement opposés, on pourra faire passer par ces deux points une infinité de grands cercles.	On a sphere, through two given points only one great circle can *in general* pass (which, as we have just seen, would play the part of the straight line for our imaginary beings). But there is an exception: if the two given points are diametrically opposite, infinitely many great circles can be drawn through them.
2.3.23	De même dans la géométrie de Riemann (au moins sous une de ses formes), par deux points ne passera en général qu'une seule droite ; mais il y a des cas exceptionnels où par deux points pourront passer une infinité de droites.	Similarly, in Riemann's geometry (at least in one of its forms), through two points there will in general pass only one straight line; but there are exceptional cases in which infinitely many straight lines may pass through two points.
2.3.24	Il y a une sorte d'opposition entre la géométrie de Riemann et celle de Lobatchevsky.	There is a kind of opposition between Riemann's geometry and Lobachevsky's.
2.3.25	Ainsi la somme des angles d'un triangle est :	Thus the sum of the angles of a triangle is:
2.3.26	Égale à deux droits dans la géométrie d'Euclide.	Equal to two right angles in Euclid's geometry.
2.3.27	Plus petite que deux droits dans celle de Lobatchevsky.	Less than two right angles in Lobachevsky's.
2.3.28	Plus grande que deux droits dans celle de Riemann.	Greater than two right angles in Riemann's.
2.3.29	Le nombre des parallèles qu'on peut mener à une droite donnée par un point donné est égal :	The number of parallels that can be drawn to a given straight line through a given point is equal to:
2.3.30	À un dans la géométrie d'Euclide,	One in Euclid's geometry,
2.3.31	À zéro dans celle de Riemann,	Zero in Riemann's,
2.3.32	À l'infini dans celle de Lobatchevsky.	Infinity in Lobachevsky's.
2.3.33	Ajoutons que l'espace de Riemann est fini, quoique sans limite, au sens donné plus haut à ces deux mots.	Let us add that Riemann's space is finite, though unbounded, in the sense given above to these two words.
2.3.34	Les surfaces à courbure constante. — Une objection restait possible cependant. Les théorèmes de	Surfaces of constant curvature.—One objection, however, still remained possible. The theorems of

	FRENCH	ENGLISH
	Lobatchevsky et de Riemann ne présentent aucune contradiction ; mais quelque nombreuses que soient les conséquences que ces deux géomètres ont tirées de leurs hypothèses, ils ont dû s'arrêter avant de les avoir toutes épuisées, car le nombre en serait infini ; qui nous dit alors que s'ils avaient poussé plus loin leurs déductions, ils n'auraient pas fini par arriver à quelque contradiction ?	Lobachevsky and Riemann present no contradiction. But however numerous the consequences these two geometers drew from their hypotheses, they must have stopped before exhausting them all, for their number would be infinite. Who can tell us, then, that if they had pushed their deductions further, they would not eventually have arrived at some contradiction?
2.3.35	Cette difficulté n'existe pas pour la géométrie de Riemann, pourvu qu'on se borne à deux dimensions ; la géométrie de Riemann à deux dimensions ne diffère pas en effet, nous l'avons vu, de la géométrie sphérique, qui n'est qu'une branche de la géométrie ordinaire et qui est par conséquent en dehors de toute discussion.	This difficulty does not exist for Riemann's geometry, provided we confine ourselves to two dimensions. For two-dimensional Riemannian geometry, as we have seen, does not differ from spherical geometry, which is only a branch of ordinary geometry and is therefore beyond all dispute.
2.3.36	M. Beltrami, en ramenant de même la géométrie de Lobatchevsky à deux dimensions à ne plus être qu'une branche de la géométrie ordinaire, a réfuté également l'objection en ce qui la concerne	Beltrami, by likewise reducing Lobachevsky's two-dimensional geometry to a mere branch of ordinary geometry, has also refuted the objection as far as that geometry is concerned.
2.3.37	Voici comment il y est parvenu. Considérons sur une surface une figure quelconque. Imaginons que cette figure soit tracée sur une toile flexible et inextensible appliquée sur cette surface, de telle façon que quand la toile se déplace et se déforme, les diverses lignes de cette figure puissent changer de forme, sans changer de longueur. En général, cette figure flexible et inextensible ne pourra se déplacer sans quitter la surface ; mais il y a certaines surfaces particulières pour lesquelles un pareil mouvement serait possible : ce sont les surfaces à courbure constante.	Here is how he did it. Consider any figure on a surface. Imagine that this figure is drawn on a flexible and inextensible cloth fitted to this surface, in such a way that when the cloth moves and is deformed, the various lines of this figure can change their shape without changing their length. In general, this flexible and inextensible figure cannot move without leaving the surface. But there are certain particular surfaces for which such a motion would be possible: these are the surfaces of constant curvature.
2.3.38	Si nous reprenons la comparaison que nous faisions plus haut et que nous imaginions des êtres sans épaisseur vivant sur une de ces surfaces, ils regarderont comme possible le mouvement d'une figure dont toutes les lignes conservent une longueur constante. Un pareil mouvement paraîtrait absurde, au contraire, à des animaux sans épaisseur vivant sur une surface à courbure variable.	If we return to the comparison we made above and imagine beings without thickness living on one of these surfaces, they will regard as possible the motion of a figure all of whose lines keep a constant length. Such a motion would, on the contrary, seem absurd to animals without thickness living on a surface of variable curvature.
2.3.39	Ces surfaces à courbure constante sont de deux sortes :	These surfaces of constant curvature are of two kinds:
2.3.40	Les unes sont *à courbure positive*, et peuvent être déformées de façon à être appliquées sur une sphère. La géométrie de ces surfaces se réduit donc à la géométrie sphérique, qui est celle de Riemann.	Some are *of positive curvature*, and can be deformed so as to be fitted onto a sphere. The geometry of these surfaces therefore reduces to spherical geometry, which is Riemann's.
2.3.41		

	FRENCH	ENGLISH
	Les autres sont *à courbure négative*. M. Beltrami a fait voir que la géométrie de ces surfaces n'est autre que celle de Lobatchevsky. Les géométries à deux dimensions de Riemann et de Lobatchevsky se trouvent donc rattachées à la géométrie euclidienne.	The others are *of negative curvature*. Beltrami showed that the geometry of these surfaces is none other than Lobachevsky's. The two-dimensional geometries of Riemann and Lobachevsky are thus connected to Euclidean geometry.

THE DICTIONARY

A translation table turns Lobachevsky's theorems into theorems of ordinary geometry, proving them consistent.

	FRENCH	ENGLISH
2.3.42	Interprétation des géométries non euclidiennes. — Ainsi s'évanouit l'objection en ce qui concerne les géométries à deux dimensions.	Interpretation of the non-Euclidean geometries.—Thus the objection vanishes as far as two-dimensional geometries are concerned.
2.3.43	Il serait aisé d'étendre le raisonnement de M. Beltrami aux géométries à trois dimensions. Les esprits que ne rebute pas l'espace à quatre dimensions n'y verront aucune difficulté, mais ils sont peu nombreux. Je préfère donc procéder autrement.	It would be easy to extend Beltrami's reasoning to three-dimensional geometries. Minds not put off by four-dimensional space will see no difficulty in it, but they are few. I therefore prefer to proceed differently.
2.3.44	Considérons un certain plan que j'appellerai fondamental et construisons une sorte de dictionnaire, en faisant correspondre chacun à chacun une double suite de termes écrits dans deux colonnes, de la même façon que se correspondent dans les dictionnaires ordinaires les mots de deux langues dont la signification est la même : *Espace* — Portion de l'espace située au-dessus du plan fondamental. *Plan* — Sphère coupant orthogonalement le plan fondamental. *Droite* — Cercle coupant orthogonalement le plan fondamental. *Sphère* — Sphère. *Cercle* — Cercle. *Angle* — Angle. *Distance de deux points* — Logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections du plan fondamental avec un cercle passant par ces deux points et le coupant orthogonalement. etc...	Let us consider a certain plane, which I shall call fundamental, and construct a kind of dictionary. We set in one-to-one correspondence a double series of terms written in two columns, just as in ordinary dictionaries the words of two languages that have the same meaning correspond: *Space*—Portion of space above the fundamental plane. *Plane*—Sphere cutting the fundamental plane orthogonally. *Straight line*—Circle cutting the fundamental plane orthogonally. *Sphere*—Sphere. *Circle*—Circle. *Angle*—Angle. *Distance between two points*—Logarithm of the cross-ratio of these two points and the intersections of the fundamental plane with a circle passing through these two points and cutting it orthogonally. Etc.[3]
2.3.45	Prenons ensuite les théorèmes de Lobatchevsky et traduisons-les à l'aide de ce dictionnaire comme nous traduirions un texte allemand à l'aide d'un dictionnaire allemand-français. *Nous obtiendrons ainsi des théorèmes de la géométrie ordinaire.*	Next let us take Lobachevsky's theorems and translate them with the help of this dictionary, as we would translate a German text with the help of a German–French dictionary. *We shall thus obtain theorems of ordinary geometry*.
2.3.46	Par exemple, ce théorème de Lobatchevsky : « la somme des angles d'un triangle est plus petite que deux droits » se traduit ainsi : « Si un triangle curviligne a pour côtés des arcs de cercle qui prolongés iraient couper orthogonalement le plan fondamental, la somme des angles de ce triangle curviligne sera plus petite que deux	For example, this theorem of Lobachevsky's—"the sum of the angles of a triangle is less than two right angles"—translates as follows: "If a curvilinear triangle has as its sides arcs of circles which, if extended, would cut the fundamental plane orthogonally, the sum of the angles of this curvilinear

3 The cross-ratio (older "anharmonic ratio") is a quantity formed from four points on a line or circle. This dictionary describes what is now called Poincaré's half-space model.

	FRENCH	ENGLISH
	droits ». Ainsi, quelque loin que l'on pousse les conséquences des hypothèses de Lobatchevsky, on ne sera jamais conduit à une contradiction.	triangle will be less than two right angles." Thus, however far we push the consequences of Lobachevsky's hypotheses, we shall never be led to a contradiction.
	En effet, si deux théorèmes de Lobatchevsky étaient contradictoires, il en serait de même des traductions de ces deux théorèmes, faites à l'aide de notre dictionnaire, mais ces traductions sont des théorèmes de géométrie ordinaire et personne ne doute que la géométrie ordinaire ne soit exempte de contradiction. D'où nous vient cette certitude et est-elle justifiée ? C'est là une question que je ne saurais traiter ici, car elle exigerait quelques développements. Il ne reste donc plus rien de l'objection que j'ai formulée plus haut.	For if two of Lobachevsky's theorems were contradictory, the same would be true of the translations of these two theorems made with our dictionary. But these translations are theorems of ordinary geometry, and no one doubts that ordinary geometry is free from contradiction. Where does this certainty come from, and is it justified? That is a question I cannot deal with here, for it would require some development. So nothing remains of the objection I raised above.
2.3.47	Ce n'est pas tout. La géométrie de Lobatchevsky, susceptible d'une interprétation concrète, cesse d'être un vain exercice de logique et peut recevoir des applications ; je n'ai pas le temps de parler ici de ces applications ni du parti que M. Klein et moi en avons tiré pour l'intégration des équations linéaires.	That is not all. Lobachevsky's geometry, being open to a concrete interpretation, ceases to be an idle exercise in logic and can be put to use. I have no time here to speak of these applications, nor of the use Klein and I have made of them for the integration of linear equations.[4]
2.3.48	Cette interprétation n'est d'ailleurs pas unique, et l'on pourrait établir plusieurs dictionnaires analogues à celui qui précède et qui tous permettraient par une simple « traduction » de transformer les théorèmes de Lobatchevsky en théorèmes de géométrie ordinaire.	Moreover, this interpretation is not unique. Several dictionaries like the one above could be drawn up, all of which would make it possible, by a simple "translation," to turn Lobachevsky's theorems into theorems of ordinary geometry.

THE IMPLICIT AXIOMS

Treatises silently assume that figures can be moved without deformation; Lie's theorem limits the possible geometries.

	FRENCH	ENGLISH
2.3.49	Les axiomes implicites. — Les axiomes explicitement énoncés dans les traités sont-ils les seuls fondements de la géométrie ? On peut être assuré du contraire en voyant qu'après les avoir successivement abandonnés on laisse encore debout quelques propositions communes aux théories d'Euclide, de Lobatchevsky et de Riemann. Ces propositions doivent reposer sur quelques prémisses que les géomètres admettent sans les énoncer. Il est intéressant de chercher à les dégager des démonstrations classiques.	The implicit axioms.—Are the axioms explicitly stated in the treatises the only foundations of geometry? We can be sure they are not when we see that, after they have been abandoned one after another, a few propositions common to the theories of Euclid, Lobachevsky and Riemann are still left standing. These propositions must rest on certain premises that geometers accept without stating them. It is interesting to try to extract them from the classical proofs.
2.3.50	Stuart Mill a prétendu que toute définition contient un axiome, puisqu'en définissant on affirme implicitement l'existence de l'objet défini. C'est aller beaucoup trop loin ; il est rare qu'en mathématiques on donne une	Stuart Mill claimed that every definition contains an axiom, since in defining we implicitly assert the existence of the object defined. This is going much too far. In mathematics a definition is rarely

4 Felix Klein (1849–1925), German mathematician; in the early 1880s he and Poincaré both worked on functions connected with linear differential equations.

	FRENCH	ENGLISH
	définition sans la faire suivre par la démonstration de l'existence de l'objet défini, et quand on s'en dispense, c'est généralement que le lecteur y peut aisément suppléer. Il ne faut pas oublier que le mot existence n'a pas le même sens quand il s'agit d'un être mathématique et quand il est question d'un objet matériel. Un être mathématique existe, pourvu que sa définition n'implique pas contradiction, soit en elle-même, soit avec les propositions antérieurement admises.	given without being followed by a proof of the existence of the object defined, and when this is omitted, it is generally because the reader can easily supply it. We must not forget that the word existence does not have the same meaning when it is a question of a mathematical entity as when a material object is concerned. A mathematical entity exists provided its definition implies no contradiction, either in itself or with the propositions previously accepted.[5]
2.3.51	Mais si l'observation de Stuart Mill ne saurait s'appliquer à toutes les définitions, elle n'en est pas moins juste pour quelques-unes d'entre elles. On définit quelquefois le plan de la manière suivante :	But if Stuart Mill's observation cannot apply to all definitions, it is nonetheless correct for some of them. The plane is sometimes defined as follows:
2.3.52	Le plan est une surface telle que la droite qui joint deux quelconques de ses points est tout entière sur cette surface.	The plane is a surface such that the straight line joining any two of its points lies wholly on that surface.
2.3.53	Cette définition cache manifestement un nouvel axiome ; on pourrait, il est vrai, la changer, et cela vaudrait mieux, mais alors il faudrait énoncer l'axiome explicitement.	This definition obviously conceals a new axiom. It could, it is true, be changed, and that would be better; but then the axiom would have to be stated explicitly.
2.3.54	D'autres définitions peuvent donner lieu à des réflexions non moins importantes.	Other definitions may give rise to reflections that are no less important.
2.3.55	Telle est par exemple celle de l'égalité de deux figures : deux figures sont égales quand on peut les superposer ; pour les superposer il faut déplacer l'une d'elles jusqu'à ce qu'elle coïncide avec l'autre ; mais comment faut-il la déplacer ? Si nous le demandions, on nous répondrait sans doute qu'on doit le faire sans la déformer et à la façon d'un solide invariable. Le cercle vicieux serait alors évident.	Such, for example, is the definition of the equality of two figures: two figures are equal when they can be superposed. To superpose them, one of them must be moved until it coincides with the other. But how is it to be moved? If we asked, we would no doubt be told that it must be done without deforming it, in the manner of an invariable solid. The vicious circle would then be obvious.
2.3.56	En fait, cette définition ne définit rien ; elle n'aurait aucun sens pour un être qui habiterait un monde où il n'y aurait que des fluides. Si elle nous semble claire, c'est que nous sommes habitués aux propriétés des solides naturels qui ne diffèrent pas beaucoup de celles des solides idéaux dont toutes les dimensions sont invariables.	In fact this definition defines nothing; it would have no meaning for a being who lived in a world containing only fluids. If it seems clear to us, that is because we are accustomed to the properties of natural solids, which do not differ much from those of ideal solids, all of whose dimensions are invariable.
2.3.57	Cependant, tout imparfaite qu'elle soit, cette définition implique un axiome.	Yet, imperfect as it is, this definition implies an axiom.
2.3.58	La possibilité du mouvement d'une figure invariable n'est pas une vérité évidente par elle-même, ou du moins elle	That an invariable figure can move is not a self-evident truth. Or at least it is self-evident only in

5 John Stuart Mill (1806–1873), English philosopher, author of *A System of Logic* (1843).

	FRENCH	ENGLISH
	ne l'est qu'à la façon du postulatum d'Euclide et non comme le serait un jugement analytique *a priori*.	the way Euclid's postulate is, and not as an analytic *a priori* judgment would be.
2.3.59	D'ailleurs, en étudiant les définitions et les démonstrations de la géométrie, on voit qu'on est obligé d'admettre, sans les démontrer, non seulement la possibilité de ce mouvement, mais encore quelques-unes de ses propriétés.	Besides, when we study the definitions and proofs of geometry, we see that we are obliged to accept, without proof, not only that such motion is possible but also some of its properties.
2.3.60	C'est ce qui ressort d'abord de la définition de la ligne droite. On en a donné beaucoup de défectueuses, mais la véritable est celle qui est sous-entendue dans toutes les démonstrations où la ligne droite intervient :	This is clear, to begin with, from the definition of the straight line. Many faulty definitions have been given, but the true one is the one implied in every proof in which the straight line plays a part:
2.3.61	« Il peut arriver que le mouvement d'une figure invariable soit tel que tous les points d'une ligne appartenant à cette figure restent immobiles pendant que tous les points situés en dehors de cette ligne se meuvent. Une pareille ligne s'appellera une ligne droite ». Nous avons à dessein, dans cet énoncé, séparé la définition de l'axiome qu'elle implique.	"It may happen that an invariable figure moves in such a way that all the points of a line belonging to that figure remain fixed, while all the points lying outside that line move. Such a line will be called a straight line." In this statement we have deliberately separated the definition from the axiom it implies.
2.3.62	Beaucoup de démonstrations, telles que celles des cas d'égalité des triangles, de la possibilité d'abaisser une perpendiculaire d'un point sur une droite, supposent des propositions qu'on se dispense d'énoncer, puisqu'elles obligent à admettre qu'il est possible de transporter une figure dans l'espace d'une certaine manière.	Many proofs, such as those of the cases of equality of triangles, or of the possibility of dropping a perpendicular from a point to a straight line, presuppose propositions that are never stated. For they compel us to accept that a figure can be moved through space in a certain way.
2.3.63	La quatrième géométrie. — Parmi ces axiomes implicites, il en est un qui me semble mériter quelque attention, parce qu'en l'abandonnant, on peut construire une quatrième géométrie aussi cohérente que celles d'Euclide, de Lobatchevsky et de Riemann.	The fourth geometry.—Among these implicit axioms there is one that seems to me to deserve some attention, because by abandoning it we can construct a fourth geometry, as coherent as those of Euclid, Lobachevsky and Riemann.
2.3.64	Pour démontrer que l'on peut toujours élever en un point A une perpendiculaire à une droite AB, on considère une droite AC mobile autour du point A et primitivement confondue avec la droite fixe AB ; et on la fait tourner autour du point A jusqu'à ce qu'elle vienne dans le prolongement de AB.	To prove that a perpendicular to a straight line AB can always be erected at a point A, we consider a straight line AC that can turn about the point A and that initially coincides with the fixed line AB. We then turn it about the point A until it lies in the extension of AB.
2.3.65	On suppose ainsi deux propositions : d'abord qu'une pareille rotation est possible, et ensuite qu'elle peut se continuer jusqu'à ce que les deux droites viennent dans le prolongement l'une de l'autre.	We thus assume two propositions: first, that such a rotation is possible; and second, that it can be continued until the two lines lie in the extension of each other.
2.3.66	Si l'on admet le premier point et que l'on rejette le second, on est conduit à une suite de théorèmes encore plus étranges que ceux de Lobatchevsky et de Riemann, mais également exempts de contradiction.	If we accept the first point and reject the second, we are led to a series of theorems even stranger than those of Lobachevsky and Riemann, but equally free from contradiction.
2.3.67		

	FRENCH	ENGLISH
	Je ne citerai qu'un de ces théorèmes et je ne choisirai pas le plus singulier : *une droite réelle peut être perpendiculaire à elle-même.*	I shall quote only one of these theorems, and I shall not choose the oddest: *a real straight line can be perpendicular to itself*.
2.3.68	Le Théorème de Lie. — Le nombre des axiomes implicitement introduits dans les démonstrations classiques est plus grand qu'il ne serait nécessaire, et on cherche à le réduire au minimum. M. Hilbert semble avoir donné la solution définitive de ce problème. On pouvait *a priori* se demander d'abord si cette réduction est possible, si le nombre des axiomes nécessaires et celui des géométries imaginables n'est pas infini.	Lie's theorem.—The number of axioms implicitly introduced in the classical proofs is greater than necessary, and efforts are being made to reduce it to a minimum. Hilbert seems to have given the definitive solution to this problem. One might first have asked, *a priori*, whether such a reduction is possible at all: whether the number of necessary axioms, and the number of conceivable geometries, might not be infinite.[6]
2.3.69	Un théorème de M. Sophus Lie domine toute cette discussion. On peut l'énoncer ainsi :	A theorem of Sophus Lie governs this whole discussion. It may be stated as follows:[7]
2.3.70	Supposons qu'on admette les prémisses suivantes :	Suppose we accept the following premises:
2.3.71	1° L'espace a *n* dimensions ;	1. Space has *n* dimensions;
2.3.72	2° Le mouvement d'une figure invariable est possible.	2. The motion of an invariable figure is possible.
2.3.73	3° Il faut *p* conditions pour déterminer la position de cette figure dans l'espace.	3. *p* conditions are needed to determine the position of this figure in space.
2.3.74	*Le nombre des géométries compatibles avec ces prémisses sera limité.*	*The number of geometries compatible with these premises will be limited.*
2.3.75	Je puis même ajouter que si *n* est donné, on peut assigner à *p* une limite supérieure.	I may even add that if *n* is given, an upper limit can be assigned to *p*.
2.3.76	Si donc on admet la possibilité du mouvement, on ne pourra inventer qu'un nombre fini (et même assez restreint) de géométries à trois dimensions.	If, then, we accept that motion is possible, we can invent only a finite (and indeed fairly small) number of three-dimensional geometries.
2.3.77	Les géométries de Riemann. — Cependant ce résultat semble contredit par Riemann, car ce savant construit une infinité de géométries différentes, et celle à laquelle on donne ordinairement son nom n'en est qu'un cas particulier.	Riemann's geometries.—Yet this result seems to be contradicted by Riemann, for he constructs an infinity of different geometries, and the one usually called by his name is only a special case among them.
2.3.78	Tout dépend, dit-il, de la façon dont on définit la longueur d'une courbe. Or il y a une infinité de manières de définir cette longueur, et chacune d'elles peut devenir le point de départ d'une nouvelle géométrie.	Everything depends, he says, on how the length of a curve is defined. Now there are infinitely many ways of defining this length, and each of them can become the starting point of a new geometry.
2.3.79	Cela est parfaitement exact, mais la plupart de ces définitions sont incompatibles avec le mouvement d'une figure invariable, que l'on suppose possible dans le	That is perfectly correct; but most of these definitions are incompatible with the motion of an invariable figure, which Lie's theorem assumes to be

6 David Hilbert (1862–1943), German mathematician whose *Grundlagen der Geometrie* (1899) set out a complete system of axioms for Euclidean geometry.
7 Sophus Lie (1842–1899), Norwegian mathematician, founder of the theory of continuous groups of transformations.

FRENCH	ENGLISH
théorème de Lie. Ces géométries de Riemann, si intéressantes à divers titres, ne pourraient donc jamais être que purement analytiques et ne se prêteraient pas à des démonstrations analogues à celles d'Euclide.	possible. These geometries of Riemann, interesting as they are in various respects, could therefore never be anything but purely analytical, and would not lend themselves to proofs like those of Euclid.
2.3.80 Les Géométries de Hilbert. — Enfin M. Veronese et M. Hilbert ont imaginé de nouvelles géométries plus étranges encore, qu'ils appellent *non-archimédiennes*. Ils les construisent en rejetant l'*axiome d'Archimède* en vertu duquel toute longueur donnée, multipliée par un entier suffisamment grand, finira par surpasser toute autre longueur donnée si grande qu'elle soit. Sur une droite non archimédienne, les points de notre géométrie ordinaire existent tous, mais il y en a une infinité d'autres qui viennent s'intercaler entre eux, de telle sorte qu'entre deux segments, que les géomètres de la vieille école auraient regardés comme contigus, on puisse caser une infinité de points nouveaux.	Hilbert's geometries.—Finally, Veronese and Hilbert have devised new geometries stranger still, which they call *non-Archimedean*. They construct them by rejecting the *axiom of Archimedes*, according to which any given length, multiplied by a sufficiently large whole number, will end up exceeding any other given length, however great. On a non-Archimedean straight line all the points of our ordinary geometry exist, but there are infinitely many others slotted in between them. So between two segments that geometers of the old school would have regarded as adjacent, an infinity of new points can be fitted.[8]
En un mot, l'espace non archimédien n'est plus un continu du second ordre, pour employer le langage du chapitre précédent, mais un continu du troisième ordre.	In a word, non-Archimedean space is no longer a continuum of the second order, to use the language of the previous chapter, but a continuum of the third order.

WHAT ARE THE AXIOMS OF GEOMETRY?

They are neither synthetic a priori judgments nor experimental facts, but conventions.

FRENCH	ENGLISH
2.3.81 De la nature des axiomes. — La plupart des mathématiciens ne regardent la géométrie de Lobatchevsky que comme une simple curiosité logique ; quelques-uns d'entre eux sont allés plus loin cependant. Puisque plusieurs géométries sont possibles, est-il certain que ce soit la nôtre qui soit vraie ? L'expérience nous apprend sans doute que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits ; mais c'est parce que nous n'opérons que sur des triangles trop petits ; la différence, d'après Lobatchevsky, est proportionnelle à la surface du triangle : ne pourra-t-elle devenir sensible quand nous opérerons sur des triangles plus grands ou quand nos mesures deviendront plus précises ? La géométrie euclidienne ne serait ainsi qu'une géométrie provisoire.	On the nature of the axioms.—Most mathematicians regard Lobachevsky's geometry as a mere logical curiosity; some of them, however, have gone further. Since several geometries are possible, is it certain that ours is the true one? Experience no doubt teaches us that the sum of the angles of a triangle equals two right angles. But that is because we work only with triangles that are too small. According to Lobachevsky, the difference is proportional to the area of the triangle: might it not become perceptible when we work with larger triangles, or when our measurements become more precise? Euclidean geometry would then be only a provisional geometry.
2.3.82 Pour discuter cette opinion, nous devons d'abord nous demander quelle est la nature des axiomes géométriques.	To discuss this view, we must first ask what the nature of the geometric axioms is.
2.3.83 Sont-ce des jugements synthétiques *à priori*, comme disait Kant ?	

8 Giuseppe Veronese (1854–1917), Italian mathematician who developed non-Archimedean geometry in the 1890s.

	FRENCH	ENGLISH
		Are they synthetic *a priori* judgments, as Kant said?
2.3.84	Ils s'imposeraient alors à nous avec une telle force, que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sur elle un édifice théorique. Il n'y aurait pas de géométrie non euclidienne.	In that case they would impose themselves on us with such force that we could neither conceive the contrary proposition nor build a theoretical structure upon it. There would be no non-Euclidean geometry.
2.3.85	Pour s'en convaincre, qu'on prenne un véritable jugement synthétique *à priori*, par exemple celui-ci, dont nous avons vu au chapitre premier le rôle prépondérant :	To be convinced of this, take a genuine synthetic *a priori* judgment—for example the following one, whose leading role we saw in the first chapter:
2.3.86	*Si un théorème est vrai pour le nombre* 1, *si on a démontré qu'il est vrai de* n + 1, *pourvu qu'il le soit de* n, *il sera vrai de tous les nombres entiers positifs.*	*If a theorem is true for the number* 1, *and if it has been proved that it is true of* n + 1 *provided it is true of* n, *it will be true of all positive whole numbers.*
2.3.87	Qu'on essaie ensuite de s'y soustraire et de fonder, en niant cette proposition, une fausse arithmétique analogue à la géométrie non euclidienne, — on n'y pourra pas parvenir ; on serait même tenté au premier abord de regarder ces jugements comme analytiques.	Then try to escape from it, and, by denying this proposition, to found a false arithmetic analogous to non-Euclidean geometry—you will not succeed. At first sight one would even be tempted to regard such judgments as analytic.
2.3.88	D'ailleurs, reprenons notre fiction des animaux sans épaisseur ; nous ne pouvons guère admettre que ces êtres, s'ils ont l'esprit fait comme nous, adopteraient la géométrie euclidienne qui serait contredite par toute leur expérience ?	Besides, let us return to our fiction of animals without thickness. Can we really suppose that these beings, if their minds were made like ours, would adopt Euclidean geometry, which all their experience would contradict?
2.3.89	Devons-nous donc conclure que les axiomes de la géométrie sont des vérités expérimentales ? Mais on n'expérimente pas sur des droites ou des circonférences idéales ; on ne peut le faire que sur des objets matériels. Sur quoi porteraient donc les expériences qui serviraient de fondement à la géométrie ? La réponse est facile.	Must we then conclude that the axioms of geometry are experimental truths? But we do not experiment on ideal straight lines or circles; we can experiment only on material objects. What, then, would the experiments that served as the foundation of geometry be about? The answer is easy.
2.3.90	Nous avons vu plus haut que l'on raisonne constamment comme si les figures géométriques se comportaient à la manière des solides. Ce que la géométrie emprunterait à l'expérience, ce seraient donc les propriétés de ces corps.	We saw above that we constantly reason as if geometric figures behaved like solids. What geometry would borrow from experience, then, would be the properties of these bodies.
2.3.91	Les propriétés de la lumière et sa propagation rectiligne ont été aussi l'occasion d'où sont sorties quelques-unes des propositions de la géométrie, et en particulier celles de la géométrie projective, de sorte qu'à ce point de vue on serait tenté de dire que la géométrie métrique est l'étude des solides et que la géométrie projective est celle de la lumière.	The properties of light and its propagation in straight lines have also been the occasion from which some of the propositions of geometry arose, in particular those of projective geometry. From this point of view one would be tempted to say that metric geometry is the study of solids, and projective geometry the study of light.
2.3.92	Mais une difficulté subsiste, et elle est insurmontable. Si la géométrie était une science expérimentale, elle ne serait pas une science exacte, elle serait soumise à une continuelle révision. Que dis-je ? elle serait dès	But a difficulty remains, and it is insurmountable. If geometry were an experimental science, it would not be an exact science; it would be subject to constant revision. What am I saying? It would

	FRENCH	ENGLISH
	aujourd'hui convaincue d'erreur puisque nous savons qu'il n'existe pas de solide rigoureusement invariable.	already stand convicted of error, since we know that no rigorously invariable solid exists.
2.3.93	*Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques* à priori *ni des faits expérimentaux.*	*The axioms of geometry, then, are neither synthetic* a priori *judgments nor experimental facts*.
2.3.94	Ce sont des *conventions ;* notre choix, parmi toutes les conventions possibles, est *guidé* par des faits expérimentaux ; mais il reste *libre* et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester *rigoureusement* vrais quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives.	They are *conventions*; our choice among all possible conventions is *guided* by experimental facts, but it remains *free,* and is limited only by the need to avoid all contradiction. That is how the postulates can remain *rigorously* true even though the experimental laws that determined their adoption are only approximate.
2.3.95	En d'autres termes, *les axiomes de la géométrie* (je ne parle pas de ceux de l'arithmétique) *ne sont que des définitions déguisées.*	In other words, *the axioms of geometry* (I am not speaking of those of arithmetic) *are only disguised definitions.*
2.3.96	Dès lors, que doit-on penser de cette question : La géométrie euclidienne est-elle vraie ?	What, then, are we to think of the question: Is Euclidean geometry true?
2.3.97	Elle n'a aucun sens.	It has no meaning.
2.3.98	Autant demander si le système métrique est vrai et les anciennes mesures fausses ; si les coordonnées cartésiennes sont vraies et les coordonnées polaires fausses. Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être *plus commode*.	One might as well ask whether the metric system is true and the old measures false; whether Cartesian coordinates are true and polar coordinates false. One geometry cannot be more true than another; it can only be *more convenient*.
2.3.99	Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode :	Now Euclidean geometry is, and will remain, the most convenient:
2.3.100	1° Parce qu'elle est la plus simple ; et elle n'est pas telle seulement par suite de nos habitudes d'esprit ou de je ne sais quelle intuition directe que nous aurions de l'espace euclidien ; elle est la plus simple en soi de même qu'un polynôme du premier degré est plus simple qu'un polynôme du second degré ; les formules de la trigonométrie sphérique sont plus compliquées que celles de la trigonométrie rectiligne, et elles paraîtraient encore telles à un analyste qui en ignorerait la signification géométrique.	1. Because it is the simplest. And it is not so merely because of our habits of mind, or because of some direct intuition we might have of Euclidean space. It is the simplest in itself, just as a polynomial of the first degree is simpler than a polynomial of the second degree. The formulas of spherical trigonometry are more complicated than those of plane trigonometry, and they would still seem so to an analyst who knew nothing of their geometric meaning.
2.3.101	2° Parce qu'elle s'accorde assez bien avec les propriétés des solides naturels, ces corps dont se rapprochent nos membres et notre œil et avec lesquels nous faisons nos instruments de mesure.	2. Because it agrees fairly well with the properties of natural solids—those bodies that our limbs and our eye resemble, and out of which we make our measuring instruments.

CHAPTER IV: THE SPACE OF GEOMETRY

Beings raised in a suitable world could build a non-Euclidean or four-dimensional geometry.

	FRENCH	ENGLISH
2.4.1	Commençons par un petit paradoxe.	Let us begin with a little paradox.
2.4.2	Des êtres dont l'esprit serait fait comme le nôtre et qui auraient les mêmes sens que nous, mais qui n'auraient reçu aucune éducation préalable, pourraient recevoir d'un monde extérieur convenablement choisi des impressions telles qu'ils seraient amenés à construire une géométrie autre que celle d'Euclide et à localiser les phénomènes de ce monde extérieur dans un espace non euclidien ou même dans un espace à quatre dimensions.	Beings whose minds were made like ours, and who had the same senses as we do, but who had received no prior education, might receive from a suitably chosen external world impressions such that they would be led to construct a geometry other than Euclid's, and to locate the phenomena of that external world in a non-Euclidean space, or even in a space of four dimensions.
2.4.3	Pour nous, dont l'éducation a été faite par notre monde actuel, si nous étions brusquement transportés dans ce monde nouveau, nous n'aurions pas de difficulté à en rapporter les phénomènes à notre espace euclidien. Inversement, si ces êtres étaient transportés chez nous, ils seraient amenés à rapporter nos phénomènes à l'espace non euclidien.	As for us, whose education has been shaped by our present world, if we were suddenly transported into that new world we would have no difficulty in referring its phenomena to our Euclidean space. Conversely, if those beings were transported into our world, they would be led to refer our phenomena to non-Euclidean space.
2.4.4	Que dis-je ; avec un peu d'efforts nous pourrions le faire également. Quelqu'un qui y consacrerait son existence pourrait peut-être arriver à se représenter la quatrième dimension.	What is more, with a little effort we could do the same. Someone who devoted their life to it might perhaps manage to picture the fourth dimension.

GEOMETRIC SPACE AND REPRESENTATIVE SPACE

The space of our sensations, visual, tactile and motor, differs in every way from the geometer's space.

	FRENCH	ENGLISH
2.4.5	L'espace géométrique et l'espace représentatif. — On dit souvent que les images des objets extérieurs sont localisées dans l'espace, que même elles ne peuvent se former qu'à cette condition. On dit aussi que cet espace, qui sert ainsi de *cadre* tout préparé à nos sensations et à nos représentations, est identique à celui des géomètres dont il possède toutes les propriétés.	Geometric space and representative space.—It is often said that the images of external objects are localized in space, and even that they can only be formed on that condition. It is also said that this space, which thus serves as a ready-made *framework* for our sensations and our representations, is identical with the space of the geometers, and possesses all its properties.
2.4.6	À tous les bons esprits qui pensent ainsi, la phrase précédente a dû paraître bien extraordinaire. Mais il convient de voir s'ils ne subissent pas quelque illusion qu'une analyse approfondie pourrait dissiper.	To all the sensible minds who think this way, the preceding statement must have seemed very extraordinary. But we should see whether they are not under some illusion that a thorough analysis might dispel.
2.4.7	Quelles sont d'abord les propriétés de l'espace proprement dit ? je veux dire de celui qui fait l'objet de la géométrie et que j'appellerai l'*espace géométrique*. Voici quelques-unes des plus essentielles :	First, what are the properties of space properly so called? I mean the space that is the object of geometry, which I shall call *geometric space*. Here are some of the most essential:

	FRENCH	ENGLISH
2.4.8	1° Il est continu ;	1. It is continuous;
2.4.9	2° Il est infini ;	2. It is infinite;
2.4.10	3° Il a trois dimensions ;	3. It has three dimensions;
2.4.11	4° Il est homogène, c'est-à-dire que tous ses points sont identiques entre eux ;	4. It is homogeneous, that is, all its points are identical with one another;
2.4.12	5° Il est isotrope, c'est-à-dire que toutes les droites qui passent par un même point sont identiques entre elles.	5. It is isotropic, that is, all the straight lines passing through any one point are identical with one another.
2.4.13	Comparons-le maintenant au cadre de nos représentations et de nos sensations, que je pourrais appeler l'*espace représentatif*.	Let us now compare it with the framework of our representations and sensations, which I might call *representative space*.
2.4.14	L'espace visuel. — Considérons d'abord une impression purement visuelle, due à une image qui se forme sur le fond de la rétine.	Visual space.—Let us first consider a purely visual impression, due to an image formed at the back of the retina.
2.4.15	Une analyse sommaire nous montre cette image comme continue, mais comme possédant seulement deux dimensions, cela distingue déjà de l'espace géométrique ce que l'on peut appeler l'*espace visuel pur*.	A brief analysis shows us this image as continuous, but as having only two dimensions. This already distinguishes what may be called *pure visual space* from geometric space.
2.4.16	D'autre part cette image est enfermée dans un cadre limité.	Moreover, this image is enclosed within a limited frame.
2.4.17	Enfin il y a une autre différence non moins importante : *cet espace visuel pur n'est pas homogène*. Tous les points de la rétine, abstraction faite des images qui s'y peuvent former, ne jouent pas le même rôle. La tache jaune ne peut à aucun titre être regardée comme identique à un point du bord de la rétine. Non seulement en effet le même objet y produit des impressions beaucoup plus vives, mais dans tout cadre *limité* le point qui occupe le centre du cadre n'apparaîtra pas comme identique à un point voisin de l'un des bords.	Finally, there is another difference, no less important: *this pure visual space is not homogeneous*. Not all points of the retina play the same role, quite apart from the images that may form there. The yellow spot cannot on any account be regarded as identical with a point at the edge of the retina. Not only does the same object produce much more vivid impressions there; in any *limited* frame, the point at the center of the frame will not appear identical with a point near one of its edges.[9]
2.4.18	Une analyse plus approfondie nous montrerait sans doute que cette continuité de l'espace visuel et ses deux dimensions ne sont non plus qu'une illusion ; elle l'éloignerait donc encore davantage de l'espace géométrique, mais passons sur cette remarque dont les conséquences ont été suffisamment examinées au chapitre II.	A more thorough analysis would no doubt show us that this continuity of visual space and its two dimensions are themselves only an illusion. That would set it still further apart from geometric space; but let us pass over this remark, whose consequences were examined sufficiently in Chapter II.
2.4.19	Cependant la vue nous permet d'apprécier les distances et par conséquent de percevoir une troisième dimension. Mais chacun sait que cette perception de la troisième	Sight does, however, allow us to judge distances, and therefore to perceive a third dimension. But everyone knows that this perception of the third

9 The yellow spot (macula lutea) is the small central region of the retina responsible for the sharpest vision.

FRENCH

dimension se réduit au sentiment de l'effort d'accommodation qu'il faut faire, et à celui de la convergence qu'il faut donner aux deux yeux, pour percevoir un objet distinctement.

2.4.20 Ce sont là des sensations musculaires tout à fait différentes des sensations visuelles qui nous ont donné la notion des deux premières dimensions. La troisième dimension ne nous apparaîtra donc pas comme jouant le même rôle que les deux autres. Ce que l'on peut appeler l'*espace visuel complet* n'est donc pas un espace isotrope.

2.4.21 Il a, il est vrai, précisément trois dimensions ; cela veut dire que les éléments de nos sensations visuelles (ceux du moins qui concourent à former la notion de l'étendue), seront complètement définis quand on connaîtra trois d'entre eux ; pour employer le langage mathématique, ce seront des fonctions de trois variables indépendantes.

2.4.22 Mais examinons la chose d'un peu plus près. La troisième dimension nous est révélée de deux manières différentes : par l'effort d'accommodation et par la convergence des yeux.

2.4.23 Sans doute ces deux indications sont toujours concordantes, il y a entre elles une relation constante, ou en termes mathématiques, les deux variables qui mesurent ces deux sensations musculaires ne nous apparaissent pas comme indépendantes, ou bien encore nous pouvons pour éviter un appel à des notions mathématiques déjà assez raffinées, revenir au langage du chapitre II et énoncer le même fait comme il suit : Si deux sensations de convergence A et B sont indiscernables, les deux sensations d'accommodation A′ et B′ qui les accompagneront respectivement seront également indiscernables.

2.4.24 Mais c'est là pour ainsi dire un fait expérimental ; rien n'empêche *à priori* de supposer le contraire, et si le contraire a lieu, si ces deux sensations musculaires varient indépendamment l'une de l'autre, nous aurons à tenir compte d'une variable indépendante de plus et « l'espace visuel complet » nous apparaîtra comme un continu physique à quatre dimensions.

2.4.25 C'est là même, ajouterai-je, un fait d'expérience *externe*. Rien n'empêche de supposer qu'un être ayant l'esprit fait comme nous, ayant les mêmes organes des sens que nous, soit placé dans un monde où la lumière ne lui parviendrait qu'après avoir traversé des milieux

ENGLISH

dimension comes down to the feeling of the effort of accommodation we must make, and to the feeling of the convergence we must give to the two eyes, in order to see an object distinctly.

These are muscular sensations, entirely different from the visual sensations that gave us the notion of the first two dimensions. So the third dimension will not appear to us to play the same role as the other two. What may be called *complete visual space* is therefore not an isotropic space.

It has, it is true, exactly three dimensions. This means that the elements of our visual sensations (at least those that contribute to forming the notion of extension) will be completely determined when three of them are known; to use mathematical language, they will be functions of three independent variables.

But let us look at the matter a little more closely. The third dimension is revealed to us in two different ways: by the effort of accommodation and by the convergence of the eyes.

No doubt these two indications always agree; there is a constant relation between them. In mathematical terms, the two variables that measure these two muscular sensations do not appear to us as independent. Or again, to avoid appealing to mathematical notions that are already rather refined, we may return to the language of Chapter II and state the same fact as follows: if two sensations of convergence A and B are indistinguishable, the two sensations of accommodation A′ and B′ that respectively accompany them will also be indistinguishable.

But this is, so to speak, an experimental fact. Nothing prevents us from supposing the contrary *a priori*; and if the contrary occurs—if these two muscular sensations vary independently of each other—we shall have to take one more independent variable into account, and "complete visual space" will appear to us as a physical continuum of four dimensions.

This is even, I would add, a fact of *external* experience. Nothing prevents us from supposing that a being whose mind is made like ours, and who has the same sense organs as we do, is placed in a world where light reaches it only after passing

FRENCH

réfringents de forme compliquée. Les deux indications qui nous servent à apprécier les distances, cesseraient d'être liées par une relation constante. Un être qui ferait dans un pareil monde l'éducation de ses sens, attribuerait sans doute quatre dimensions à l'espace visuel complet.

2.4.26 L'espace tactile et l'espace moteur. — « L'espace tactile » est plus compliqué encore que l'espace visuel et s'éloigne davantage de l'espace géométrique. Il est inutile de répéter, pour le toucher, la discussion que j'ai faite pour la vue.

2.4.27 Mais en dehors des données de la vue et du toucher, il y a d'autres sensations qui contribuent autant et plus qu'elles à la genèse de la notion d'espace. Ce sont celles que tout le monde connaît, qui accompagnent tous nos mouvements et que l'on appelle ordinairement musculaires.

2.4.28 Le cadre correspondant constitue ce que l'on peut appeler l'*espace moteur*.

2.4.29 Chaque muscle donne naissance à une sensation spéciale susceptible d'augmenter ou de diminuer, de sorte que l'ensemble de nos sensations musculaires dépendra d'autant de variables que nous avons de muscles. À ce point de vue, *l'espace moteur aurait autant de dimensions que nous avons de muscles*.

2.4.30 Je sais qu'on va dire que si les sensations musculaires contribuent à former la notion d'espace, c'est que nous avons le sentiment de la *direction* de chaque mouvement et qu'il fait partie intégrante de la sensation. S'il en était ainsi, si une sensation musculaire ne pouvait naître qu'accompagnée de ce sentiment géométrique de la direction, l'espace géométrique serait bien une forme imposée à notre sensibilité.

2.4.31 Mais c'est ce que je n'aperçois pas du tout quand j'analyse mes sensations.

2.4.32 Ce que je vois, c'est que les sensations qui correspondent à des mouvements de même direction sont liées dans mon esprit par une simple *association d'idées*. C'est à cette association que se ramène ce que nous appelons « le sentiment de la direction ». On ne saurait donc retrouver ce sentiment dans une sensation unique.

2.4.33 Cette association est extrêmement complexe, puisque la contraction d'un même muscle peut correspondre, selon la position des membres, à des mouvements de direction très différente.

ENGLISH

through refracting media of complicated shape. The two indications we use to judge distances would then cease to be linked by a constant relation. A being who trained its senses in such a world would no doubt ascribe four dimensions to complete visual space.

Tactile space and motor space.—"Tactile space" is even more complicated than visual space, and further removed from geometric space. There is no need to repeat for touch the discussion I gave for sight.

But apart from the data of sight and touch, there are other sensations that contribute as much as they do, and more, to the genesis of the notion of space. These are the ones everyone knows, which accompany all our movements and are usually called muscular.

The corresponding framework constitutes what may be called *motor space*.

Each muscle gives rise to a particular sensation that can increase or decrease, so that the totality of our muscular sensations will depend on as many variables as we have muscles. From this point of view, *motor space would have as many dimensions as we have muscles*.

I know it will be said that if muscular sensations help to form the notion of space, it is because we have a feeling of the *direction* of each movement, and that this feeling is an integral part of the sensation. If that were so—if a muscular sensation could arise only accompanied by this geometric feeling of direction—then geometric space would indeed be a form imposed on our sensibility.

But this is something I do not perceive at all when I analyze my sensations.

What I see is that the sensations corresponding to movements in the same direction are linked in my mind by a simple *association of ideas*. What we call "the feeling of direction" comes down to this association. So this feeling cannot be found in a single sensation.

This association is extremely complex, since the contraction of one and the same muscle may cor-

	FRENCH	ENGLISH
		respond, depending on the position of the limbs, to movements in very different directions.
2.4.34	Elle est d'ailleurs évidemment acquise ; elle est, comme toutes les associations d'idées, le résultat d'une *habitude ;* cette habitude résulte elle-même d'*expériences* très nombreuses ; sans aucun doute, si l'éducation de nos sens s'était faite dans un milieu différent, où nous aurions subi des impressions différentes, des habitudes contraires auraient pris naissance et nos sensations musculaires se seraient associées selon d'autres lois.	Moreover, it is obviously acquired. Like all associations of ideas, it is the result of a *habit*, and this habit itself results from a great many *experiences*. Beyond any doubt, if our senses had been trained in a different environment, where we had received different impressions, contrary habits would have arisen, and our muscular sensations would have become associated according to other laws.
2.4.35	Caractères de l'espace représentatif. — Ainsi l'espace représentatif, sous sa triple forme, visuelle, tactile et motrice, est essentiellement différent de l'espace géométrique.	Characteristics of representative space.—Thus representative space, in its threefold form—visual, tactile and motor—is essentially different from geometric space.
2.4.36	Il n'est ni homogène, ni isotrope ; on ne peut même pas dire qu'il ait trois dimensions.	It is neither homogeneous nor isotropic; we cannot even say that it has three dimensions.
2.4.37	On dit souvent que nous « projetons » dans l'espace géométrique les objets de notre perception externe ; que nous les « localisons ».	It is often said that we "project" the objects of our external perception into geometric space; that we "localize" them.
2.4.38	Cela a-t-il un sens et quel sens cela a-t-il ?	Does this have a meaning, and if so, what meaning?
2.4.39	Cela veut-il dire que nous nous *représentons* les objets extérieurs dans l'espace géométrique ?	Does it mean that we *represent* external objects to ourselves in geometric space?
2.4.40	Nos représentations ne sont que la reproduction de nos sensations, elles ne peuvent donc se ranger que dans le même cadre qu'elles, c'est-à-dire dans l'espace représentatif.	Our representations are only reproductions of our sensations; so they can be arranged only in the same framework as those sensations, that is, in representative space.
2.4.41	Il nous est aussi impossible de nous représenter les corps extérieurs dans l'espace géométrique, qu'il est impossible à un peintre de peindre, sur un tableau plan, des objets avec leurs trois dimensions.	It is as impossible for us to represent external bodies to ourselves in geometric space as it is for a painter to paint objects with their three dimensions on a flat canvas.
2.4.42	L'espace représentatif n'est qu'une image de l'espace géométrique, image déformée par une sorte de perspective, et nous ne pouvons nous représenter les objets qu'en les pliant aux lois de cette perspective.	Representative space is only an image of geometric space, an image distorted by a kind of perspective; and we can represent objects to ourselves only by bending them to the laws of that perspective.
2.4.43	Nous ne nous *représentons* donc pas les corps extérieurs dans l'espace géométrique, mais nous *raisonnons* sur ces corps, comme s'ils étaient situés dans l'espace géométrique.	So we do not *represent* external bodies to ourselves in geometric space; but we *reason* about these bodies as if they were located in geometric space.
2.4.44	Quand on dit d'autre part que nous « localisons » tel objet en tel point de l'espace, qu'est-ce que cela veut dire ?	On the other hand, when we say that we "localize" a given object at a given point in space, what does that mean?

	FRENCH	ENGLISH
2.4.45	*Cela signifie simplement que nous nous représentons les mouvements qu'il faut faire pour atteindre cet objet* ; et qu'on ne dise pas que pour se représenter ces mouvements, il faut les projeter eux-mêmes dans l'espace et que la notion d'espace doit, par conséquent, préexister.	*It simply means that we represent to ourselves the movements that must be made to reach that object.* And let no one say that to represent these movements we must ourselves project them into space, and that the notion of space must therefore exist beforehand.
2.4.46	Quand je dis que nous nous représentons ces mouvements, je veux dire seulement que nous nous représentons les sensations musculaires qui les accompagnent et qui n'ont aucun caractère géométrique, qui par conséquent n'impliquent nullement la préexistence de la notion d'espace.	When I say that we represent these movements to ourselves, I mean only that we represent to ourselves the muscular sensations that accompany them. These have no geometric character, and so in no way imply that the notion of space exists beforehand.

CHANGES OF STATE AND CHANGES OF POSITION

We learn of displacements by finding that some changes can be corrected by moving our own bodies.

	FRENCH	ENGLISH
2.4.47	Changements d'état et changements de position. — Mais, dira-t-on, si l'idée de l'espace géométrique ne s'impose pas à notre esprit, si d'autre part aucune de nos sensations ne peut nous la fournir, comment a-t-elle pu prendre naissance ?	Changes of state and changes of position.—But, it will be asked, if the idea of geometric space is not imposed on our mind, and if on the other hand none of our sensations can supply it, how could it have arisen?
2.4.48	C'est ce que nous avons maintenant à examiner et cela nous demandera quelque temps, mais je puis résumer en quelques mots la tentative d'explication que je vais développer.	That is what we must now examine, and it will take us some time; but I can sum up in a few words the attempted explanation I am about to develop.
2.4.49	*Aucune de nos sensations, isolée, n'aurait pu nous conduire à l'idée de l'espace, nous y sommes amenés seulement en étudiant les lois suivant lesquelles ces sensations se succèdent*.	*None of our sensations, taken in isolation, could have led us to the idea of space; we are led to it only by studying the laws according to which these sensations follow one another*.
2.4.50	Nous voyons d'abord que nos impressions sont sujettes au changement ; mais parmi les changements que nous constatons, nous sommes bientôt conduits à faire une distinction.	We see first that our impressions are subject to change; but among the changes we observe, we are soon led to draw a distinction.
2.4.51	Nous disons tantôt que les objets, causes de ces impressions, ont changé d'état, tantôt qu'ils ont changé de position, qu'ils se sont seulement déplacés.	Sometimes we say that the objects causing these impressions have changed their state; sometimes that they have changed their position, that they have merely moved.
2.4.52	Qu'un objet change d'état ou seulement de position, cela se traduit toujours pour nous de la même manière : *par une modification dans un ensemble d'impressions.*	Whether an object changes its state or only its position, this always shows up for us in the same way: *as a modification in a set of impressions.*
2.4.53	Comment donc avons-nous pu être amenés à les distinguer ? Il est facile de s'en rendre compte. S'il y a eu seulement changement de position, nous pouvons	How, then, could we have come to distinguish them? It is easy to see. If there has been only a change of position, we can restore the original set

	FRENCH	ENGLISH
	restaurer l'ensemble primitif d'impressions en faisant des mouvements qui nous replacent vis-à-vis de l'objet mobile dans la même situation *relative*. Nous *corrigeons* ainsi la modification qui s'est produite et nous rétablissons l'état initial par une modification inverse.	of impressions by making movements that put us back in the same *relative* situation with respect to the moving object. We thus *correct* the modification that has occurred, and re-establish the initial state by an inverse modification.
2.4.54	S'il s'agit par exemple de la vue et si un objet se déplace devant notre œil, nous pouvons le « suivre de l'œil » et maintenir son image en un même point de la rétine par des mouvements appropriés du globe oculaire.	If, for example, sight is involved, and an object moves in front of our eye, we can "follow it with the eye" and keep its image at the same point of the retina by appropriate movements of the eyeball.
2.4.55	Ces mouvements, nous en avons conscience parce qu'ils sont volontaires et parce qu'ils sont accompagnés de sensations musculaires, mais cela ne veut pas dire que nous nous les représentons dans l'espace géométrique.	We are conscious of these movements because they are voluntary and because they are accompanied by muscular sensations; but that does not mean that we represent them to ourselves in geometric space.
2.4.56	Ainsi ce qui caractérise le changement de position, ce qui le distingue du changement d'état, c'est qu'il peut être *corrigé* par ce moyen.	So what characterizes a change of position, what distinguishes it from a change of state, is that it can be *corrected* by this means.
2.4.57	Il peut donc arriver que l'on passe de l'ensemble d'impressions A à l'ensemble B de deux manières différentes : 1° involontairement et sans éprouver de sensations musculaires, c'est ce qui arrive quand c'est l'objet qui se déplace ; 2° volontairement et avec des sensations musculaires, c'est ce qui arrive quand l'objet est immobile, mais que nous nous déplaçons, de telle façon que l'objet a par rapport à nous un mouvement relatif.	It may therefore happen that we pass from the set of impressions A to the set B in two different ways: 1. involuntarily and without experiencing muscular sensations—this is what happens when it is the object that moves; 2. voluntarily and with muscular sensations—this is what happens when the object is stationary but we ourselves move, so that the object has a relative motion with respect to us.
2.4.58	S'il en est ainsi, le passage de l'ensemble A à l'ensemble B n'est qu'un changement de position.	If this is so, the passage from set A to set B is only a change of position.
2.4.59	Il résulte de là que la vue et le toucher ne nous auraient pu donner la notion d'espace sans le secours du « sens musculaire ».	It follows that sight and touch could not have given us the notion of space without the help of the "muscular sense."
2.4.60	Non seulement cette notion ne pouvait dériver d'une sensation unique, mais *d'une suite de sensations*, mais encore un être *immobile* n'aurait pu jamais l'acquérir puisque, ne pouvant *corriger* par ses mouvements les effets des changements de position des objets extérieurs, il n'aurait eu aucune raison de les distinguer des changements d'état. Il n'aurait pu l'acquérir non plus si ses mouvements n'étaient pas volontaires ou s'ils n'étaient pas accompagnés de sensations quelconques.	Not only could this notion arise not from a single sensation but only *from a series of sensations*; what is more, an *immobile* being could never have acquired it. For, being unable to *correct* by its own movements the effects of changes in the position of external objects, it would have had no reason to distinguish them from changes of state. Nor could it have acquired the notion if its movements were not voluntary, or if they were not accompanied by sensations of some kind.
2.4.61	Condition de la compensation. — Comment une pareille compensation est-elle possible de telle façon que deux	Condition of compensation.—How is such compensation possible, so that two changes, otherwise independent of each other, correct each other?

FRENCH	ENGLISH
changements, d'ailleurs indépendants l'un de l'autre, se corrigent réciproquement ?	
2.4.62 Un esprit *qui saurait déjà la géométrie* raisonnerait comme il suit :	A mind *that already knew geometry* would reason as follows:
2.4.63 Pour que la compensation se produise, il faut évidemment que les diverses parties de l'objet extérieur d'une part, les divers organes de nos sens d'autre part, se retrouvent après le double changement, dans la même position *relative*. Et pour cela il faut que les diverses parties de l'objet extérieur aient également conservé, les unes par rapport aux autres, la même position relative et qu'il en soit de même des diverses parties de notre corps les unes par rapport aux autres.	For compensation to occur, the various parts of the external object on the one hand, and the various organs of our senses on the other, must obviously end up, after the double change, in the same *relative* position. And for that, the various parts of the external object must also have kept the same relative position with respect to one another, and the same must be true of the various parts of our body with respect to one another.
2.4.64 En d'autres termes, l'objet extérieur, dans le premier changement, doit se déplacer à la façon d'un solide invariable et il en doit être de même de l'ensemble de notre corps dans le second changement qui corrige le premier.	In other words, in the first change the external object must move like an invariable solid, and so must our body as a whole in the second change, which corrects the first.
2.4.65 À ces conditions, la compensation peut se produire.	Under these conditions compensation can occur.
2.4.66 Mais nous *qui ne savons pas encore la géométrie*, puisque pour nous la notion d'espace n'est pas encore formée, nous ne pouvons pas raisonner de la sorte, nous ne pouvons pas prévoir *à priori* si la compensation est possible. Mais l'expérience nous apprend qu'elle se fait quelquefois et c'est de ce fait expérimental que nous partons pour distinguer les changements d'état des changements de position.	But we, *who do not yet know geometry*, since for us the notion of space is not yet formed, cannot reason in this way; we cannot foresee *a priori* whether compensation is possible. But experience teaches us that it sometimes occurs, and it is from this experimental fact that we start in order to distinguish changes of state from changes of position.
2.4.67 Les corps solides et la géométrie. — Parmi les objets qui nous entourent, il y en a qui éprouvent fréquemment des déplacements susceptibles d'être ainsi corrigés par un mouvement *corrélatif* de notre propre corps, ce sont les *corps solides*.	Solid bodies and geometry.—Among the objects around us, there are some that frequently undergo displacements that can be corrected in this way by a *correlative* movement of our own body: these are *solid bodies*.
2.4.68 Les autres objets, dont la forme est variable, ne subissent qu'exceptionnellement de semblables déplacements (changement de position sans changement de forme). Quand un corps s'est déplacé en se *déformant*, nous ne pouvons plus, par des mouvements appropriés, ramener les organes de nos sens dans la même situation *relative* par rapport à ce corps ; nous ne pouvons plus par conséquent rétablir l'ensemble primitif d'impressions.	Other objects, whose shape is variable, undergo such displacements (change of position without change of shape) only exceptionally. When a body has moved while *changing shape*, we can no longer, by appropriate movements, bring our sense organs back into the same *relative* situation with respect to that body; and so we can no longer restore the original set of impressions.
2.4.69 Ce n'est que plus tard, et à la suite d'expériences nouvelles, que nous apprenons à décomposer les corps de forme variable en éléments plus petits tels que chacun d'eux se déplace à peu près suivant les mêmes lois que les corps solides. Nous distinguons ainsi les « déformations »	Only later, and as a result of new experiences, do we learn to break up bodies of variable shape into smaller elements, each of which moves according to roughly the same laws as solid bodies. We thus distinguish "deformations" from other changes of

	FRENCH	ENGLISH
	des autres changements d'état ; dans ces déformations chaque élément subit un simple changement de position, qui peut être corrigé, mais la modification subie par l'ensemble est plus profonde et n'est plus susceptible d'être corrigée par un mouvement corrélatif.	state. In these deformations each element undergoes a simple change of position, which can be corrected; but the modification undergone by the whole is more profound, and can no longer be corrected by a correlative movement.
2.4.70	Une pareille notion est déjà très complexe et n'a pu apparaître que d'une façon relativement tardive ; elle n'aurait pu naître d'ailleurs si l'observation des corps solides ne nous avait appris déjà à distinguer les changements de position.	Such a notion is already very complex and can only have appeared relatively late. Besides, it could not have arisen if the observation of solid bodies had not already taught us to distinguish changes of position.
2.4.71	*Si donc il n'y avait pas de corps solides dans la nature, il n'y aurait pas de géométrie.*	*If, then, there were no solid bodies in nature, there would be no geometry*.
2.4.72	Une autre remarque mérite aussi un instant d'attention. Supposons un corps solide occupant d'abord la position α et passant ensuite à la position β ; dans sa première position, il causera sur nous l'ensemble d'impressions A, et dans sa seconde position l'ensemble d'impressions B. Soit maintenant un second corps solide, ayant des qualités entièrement différentes du premier, par exemple de couleur différente. Supposons encore qu'il passe de la position α, où il cause sur nous l'ensemble d'impressions A′, à la position β, où il cause sur nous l'ensemble d'impressions B′.	Another remark also deserves a moment's attention. Suppose a solid body first occupies the position α and then passes to the position β. In its first position it will produce in us the set of impressions A, and in its second position the set of impressions B. Now take a second solid body, with qualities entirely different from the first—of a different color, for example. Suppose again that it passes from the position α, where it produces in us the set of impressions A′, to the position β, where it produces in us the set of impressions B′.
2.4.73	En général, l'ensemble A n'aura rien de commun avec l'ensemble A′, ni l'ensemble B avec l'ensemble B′. Le passage de l'ensemble A à l'ensemble B et celui de l'ensemble A′ à l'ensemble B′ sont donc deux changements qui *en soi* n'ont en général rien de commun.	In general, set A will have nothing in common with set A′, nor set B with set B′. The passage from set A to set B and the passage from set A′ to set B′ are therefore two changes that, *in themselves*, generally have nothing in common.
2.4.74	Et cependant, ces deux changements, nous les regardons l'un et l'autre comme des déplacements et mieux encore, nous les considérons comme le *même* déplacement. Comment cela se fait-il ?	And yet we regard both of these changes as displacements; better still, we consider them to be the *same* displacement. How does this come about?
2.4.75	C'est simplement parce qu'ils peuvent être l'un et l'autre corrigés par le *même* mouvement corrélatif de notre corps.	Simply because both can be corrected by the *same* correlative movement of our body.
2.4.76	C'est donc le « mouvement corrélatif » qui constitue le *seul lien* entre deux phénomènes qu'autrement nous n'aurions jamais songé à rapprocher.	It is therefore the "correlative movement" that constitutes the *only link* between two phenomena that we would otherwise never have thought of connecting.
2.4.77	D'autre part, notre corps, grâce au nombre de ses articulations et de ses muscles, peut prendre une foule de mouvements différents ; mais tous ne sont pas susceptibles de « corriger » une modification des objets extérieurs ; ceux-là seulement en seront capables où tout notre corps, ou tout au moins tous ceux des organes de	On the other hand, our body, thanks to the number of its joints and muscles, can make a host of different movements; but not all of them can "correct" a modification of external objects. Only those can do so in which our whole body, or at

	FRENCH	ENGLISH
	nos sens qui entrent en jeu se déplacent d'un bloc, c'est-à-dire sans que leurs positions relatives varient, à la façon d'un corps solide.	least all those of our sense organs that come into play, move as a block—that is, without their relative positions changing—like a solid body.
2.4.78	En résumé :	To sum up:
2.4.79	1° Nous sommes amenés d'abord à distinguer deux catégories de phénomènes :	1. We are first led to distinguish two categories of phenomena:
2.4.80	Les uns, involontaires, non accompagnés de sensations musculaires, sont attribués par nous aux objets extérieurs ; ce sont les changements externes ;	Some, which are involuntary and not accompanied by muscular sensations, we ascribe to external objects; these are external changes;
2.4.81	Les autres, dont les caractères sont opposés et que nous attribuons aux mouvements de notre propre corps, sont les changements internes ;	The others, whose characteristics are the opposite and which we ascribe to the movements of our own body, are internal changes;
2.4.82	2° Nous remarquons que certains changements de chacune de ces catégories peuvent être corrigés par un changement corrélatif de l'autre catégorie ;	2. We notice that certain changes in each of these categories can be corrected by a correlative change in the other category;
2.4.83	3° Nous distinguons, parmi les changements externes, ceux qui ont ainsi un corrélatif dans l'autre catégorie, c'est ce que nous appelons les déplacements ; et de même parmi les changements internes, nous distinguons ceux qui ont un corrélatif dans la première catégorie.	3. Among external changes, we distinguish those that have a correlative in the other category in this way; these are what we call displacements. Likewise, among internal changes, we distinguish those that have a correlative in the first category.
2.4.84	Ainsi se trouve définie, grâce à cette réciprocité, une classe particulière de phénomènes que nous appelons déplacements. *Ce sont les lois de ces phénomènes qui font l'objet de la géométrie*.	Thanks to this reciprocity, a particular class of phenomena is thus defined, which we call displacements. *It is the laws of these phenomena that are the object of geometry*.
2.4.85	Loi d'homogénéité. — La première de ces lois est celle de l'homogénéité.	Law of homogeneity.—The first of these laws is the law of homogeneity.
2.4.86	Supposons que, par un changement externe α, nous passions de l'ensemble d'impressions A à l'ensemble B, puis que ce changement α soit corrigé par un mouvement corrélatif volontaire β, et de façon que nous soyons ramenés à l'ensemble A.	Suppose that by an external change α we pass from the set of impressions A to the set B, and that this change α is then corrected by a voluntary correlative movement β, so that we are brought back to set A.
2.4.87	Supposons maintenant qu'un autre changement externe α′ nous fasse de nouveau passer de l'ensemble A à l'ensemble B.	Now suppose that another external change α′ again makes us pass from set A to set B.
2.4.88	L'expérience nous apprend alors que ce changement α′ est, comme α, susceptible d'être corrigé par un mouvement corrélatif volontaire β′ et que ce mouvement β′ correspond aux mêmes sensations musculaires que le mouvement β qui corrigeait α.	Experience then teaches us that this change α′, like α, can be corrected by a voluntary correlative movement β′, and that this movement β′ corresponds to the same muscular sensations as the movement β that corrected α.
2.4.89	C'est ce fait que l'on énonce d'ordinaire en disant que *l'espace est homogène et isotrope*.	This is the fact that is usually expressed by saying that *space is homogeneous and isotropic*.
2.4.90		

	FRENCH	ENGLISH
	On peut dire aussi qu'un mouvement qui s'est produit une fois peut se répéter une seconde fois, une troisième fois, et ainsi de suite, sans que ses propriétés varient.	We may also say that a movement that has occurred once can be repeated a second time, a third time, and so on, without its properties changing.
2.4.91	Dans le chapitre premier, où nous avons étudié la nature du raisonnement mathématique, nous avons vu l'importance qu'on doit attribuer à la possibilité de répéter indéfiniment une même opération.	In the first chapter, where we studied the nature of mathematical reasoning, we saw how much importance should be attached to the possibility of repeating the same operation indefinitely.
2.4.92	C'est de cette répétition que le raisonnement mathématique tire sa vertu ; c'est donc grâce à la loi d'homogénéité qu'il a prise sur les faits géométriques.	It is from this repetition that mathematical reasoning draws its power; so it is thanks to the law of homogeneity that it has a hold on geometric facts.
2.4.93	Pour être complet, il conviendrait d'adjoindre à la loi d'homogénéité une foule d'autres lois analogues dans le détail desquelles je ne veux pas entrer, mais que les mathématiciens résument d'un mot en disant que les déplacements forment « un groupe ».	To be complete, we ought to add to the law of homogeneity a host of other similar laws, whose details I do not wish to go into, but which mathematicians sum up in a word by saying that displacements form "a group."[10]

THE NON-EUCLIDEAN WORLD

In a sphere where heat shrinks every body, the inhabitants would naturally adopt non-Euclidean geometry.

	FRENCH	ENGLISH
2.4.94	Le monde non euclidien. — Si l'espace géométrique était un cadre imposé à *chacune* de nos représentations, considérée individuellement, il serait impossible de se représenter une image dépouillée de ce cadre, et nous ne pourrions rien changer à notre géométrie.	The non-Euclidean world.—If geometric space were a framework imposed on *each* of our representations, taken individually, it would be impossible to picture an image stripped of that framework, and we could change nothing in our geometry.
2.4.95	Mais il n'en est pas ainsi, la géométrie n'est que le résumé des lois suivant lesquelles *se succèdent* ces images. Rien n'empêche alors d'imaginer une série de représentations, de tout point semblables à nos représentations ordinaires, mais se succédant d'après des lois différentes de celles auxquelles nous sommes accoutumés.	But this is not so; geometry is only the summary of the laws according to which these images *follow one another*. Nothing then prevents us from imagining a series of representations, in every respect like our ordinary ones, but following one another according to laws different from those we are used to.
2.4.96	On conçoit alors que des êtres dont l'éducation se ferait dans un milieu où ces lois seraient ainsi bouleversées pourraient avoir une géométrie très différente de la nôtre.	We can then conceive that beings educated in an environment where these laws were thus overturned might have a geometry very different from ours.
2.4.97	Supposons, par exemple, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes :	Suppose, for example, a world enclosed in a large sphere and subject to the following laws:
2.4.98	La température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour	The temperature in it is not uniform. It is greatest at the center and decreases as one moves away

10 In mathematics, a group is a set of operations such that combining any two gives another member of the set, and each operation can be undone by one in the set.

	FRENCH	ENGLISH
	se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé.	from it, falling to absolute zero when one reaches the sphere in which this world is enclosed.
2.4.99	Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon de la sphère limite ; soit *r* la distance du point considéré au centre de cette sphère. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$.	Let me state more precisely the law according to which this temperature varies. Let R be the radius of the bounding sphere, and let *r* be the distance of the point in question from the center of this sphere. The absolute temperature will be proportional to $R^2 - r^2$.
2.4.100	Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue.	I shall further suppose that in this world all bodies have the same coefficient of expansion, so that the length of any rule is proportional to its absolute temperature.
2.4.101	Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu.	Finally, I shall suppose that an object carried from one point to another at a different temperature immediately comes into thermal equilibrium with its new surroundings.
2.4.102	Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable.	Nothing in these hypotheses is contradictory or unimaginable.
2.4.103	Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera de la sphère limite.	A moving object will then become smaller and smaller as it approaches the bounding sphere.
2.4.104	Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants.	Let us note first that, although this world is finite from the point of view of our ordinary geometry, it will seem infinite to its inhabitants.
2.4.105	Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre la sphère limite.	For when they try to approach the bounding sphere, they grow colder and become smaller and smaller. The steps they take are therefore also smaller and smaller, so that they can never reach the bounding sphere.
2.4.106	Si, pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables ; pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides *déformés par ces différences de température* dont je viens de parler.	If for us geometry is only the study of the laws according to which invariable solids move, for these imaginary beings it will be the study of the laws according to which solids move when *deformed by the differences of temperature* I have just described.
2.4.107	Sans doute, dans notre monde, les solides naturels éprouvent également des variations de forme et de volume dues à l'échauffement ou au refroidissement. Mais nous négligeons ces variations en jetant les fondements de la géométrie ; car, outre qu'elles sont très faibles, elles sont irrégulières et nous paraissent par conséquent accidentelles.	No doubt, in our world too, natural solids undergo changes of shape and volume due to heating or cooling. But we neglect these changes when laying the foundations of geometry; for besides being very small, they are irregular and therefore seem to us accidental.
2.4.108	Dans ce monde hypothétique, il n'en serait plus de même, et ces variations suivraient des lois régulières et très simples.	In this hypothetical world that would no longer be the case; these changes would follow regular and very simple laws.

	FRENCH	ENGLISH
2.4.109	D'autre part, les diverses pièces solides dont se composerait le corps de ses habitants, subiraient les mêmes variations de forme et volume.	Moreover, the various solid pieces making up the bodies of its inhabitants would undergo the same changes of shape and volume.
2.4.110	Je ferai encore une autre hypothèse ; je supposerai que la lumière traverse des milieux diversement réfringents et de telle sorte que l'indice de réfraction soit inversement proportionnel à $R^2 - r^2$. Il est aisé de voir que, dans ces conditions, les rayons lumineux ne seraient pas rectilignes, mais circulaires.	I shall make one more hypothesis: I shall suppose that light passes through media of varying refractive power, such that the refractive index is inversely proportional to $R^2 - r^2$. It is easy to see that under these conditions rays of light would not be straight but circular.
2.4.111	Pour justifier ce qui précède, il me reste à montrer que certains changements survenus dans la position des objets extérieurs peuvent être *corrigés* par des mouvements corrélatifs des êtres sentants qui habitent ce monde imaginaire ; et cela de façon à restaurer l'ensemble primitif des impressions subies par ces êtres sentants.	To justify what precedes, I still have to show that certain changes in the position of external objects can be *corrected* by correlative movements of the sentient beings who inhabit this imaginary world, and in such a way as to restore the original set of impressions experienced by those beings.
2.4.112	Supposons en effet qu'un objet se déplace, en se déformant, non comme un solide invariable, mais comme un solide éprouvant des dilatations inégales exactement conformes à la loi de température que j'ai supposée plus haut. Qu'on me permette pour abréger le langage, d'appeler un pareil mouvement *déplacement non euclidien*.	Suppose, in fact, that an object moves and changes shape, not like an invariable solid, but like a solid undergoing unequal expansions that conform exactly to the law of temperature I assumed above. To shorten the language, allow me to call such a movement a *non-Euclidean displacement*.
2.4.113	Si un être sentant se trouve dans le voisinage, ses impressions seront modifiées par le déplacement de l'objet, mais il pourra les rétablir en se mouvant lui-même d'une manière convenable. Il suffit que finalement l'ensemble de l'objet et de l'être sentant, considéré comme formant un seul corps, ait éprouvé un de ces déplacements particuliers que je viens d'appeler non euclidiens. Cela est possible si l'on suppose que les membres de ces êtres se dilatent d'après la même loi que les autres corps du monde qu'ils habitent.	If a sentient being happens to be nearby, its impressions will be altered by the object's displacement, but it will be able to restore them by moving itself in a suitable way. All that is needed is that, in the end, the object and the sentient being together, considered as forming a single body, have undergone one of those particular displacements I have just called non-Euclidean. This is possible if we suppose that the limbs of these beings expand according to the same law as the other bodies of the world they inhabit.
2.4.114	Bien qu'au point de vue de notre géométrie habituelle les corps se soient déformés dans ce déplacement et que leurs diverses parties ne se retrouvent plus dans la même situation relative, cependant nous allons voir que les impressions de l'être sentant sont redevenues les mêmes.	Although, from the point of view of our ordinary geometry, the bodies have been deformed in this displacement, and their various parts no longer stand in the same relative situation, we shall see that the impressions of the sentient being have nevertheless become the same again.
2.4.115	En effet, si les distances mutuelles des diverses parties ont pu varier, néanmoins les parties primitivement en contact sont revenues en contact. Les impressions tactiles n'ont donc pas changé.	For although the mutual distances of the various parts may have changed, the parts originally in contact have come back into contact. So the tactile impressions have not changed.
2.4.116	D'autre part, en tenant compte de l'hypothèse faite plus haut au sujet de la réfraction et de la courbure des rayons	On the other hand, given the hypothesis made above about the refraction and curvature of rays

	FRENCH	ENGLISH
	lumineux, les impressions visuelles seront aussi restées les mêmes.	of light, the visual impressions too will have remained the same.
2.4.117	Ces êtres imaginaires seront donc comme nous conduits à classer les phénomènes dont ils seront témoins et à distinguer parmi eux, les « changements de position » susceptibles d'être corrigés par un mouvement volontaire corrélatif.	These imaginary beings will therefore, like us, be led to classify the phenomena they witness, and to distinguish among them the "changes of position" that can be corrected by a voluntary correlative movement.
2.4.118	S'ils fondent une géométrie, ce ne sera pas comme la nôtre, l'étude des mouvements de nos solides invariables ; ce sera celle des changements de position qu'ils auront ainsi distingués, et qui ne sont autres que les « déplacements non euclidiens », *ce sera la géométrie non euclidienne*.	If they found a geometry, it will not be, like ours, the study of the movements of our invariable solids. It will be the study of the changes of position they have distinguished in this way, which are none other than the "non-Euclidean displacements": *it will be non-Euclidean geometry*.
2.4.119	Ainsi des êtres comme nous, dont l'éducation se ferait dans un pareil monde, n'auraient pas la même géométrie que nous.	Thus beings like ourselves, educated in such a world, would not have the same geometry as we do.

THE FOUR-DIMENSIONAL WORLD

Successive perspectives linked by muscular sensations could let us picture a fourth dimension.

	FRENCH	ENGLISH
2.4.120	Le monde à quatre dimensions. — De même qu'un monde non euclidien, on peut se représenter un monde à quatre dimensions.	The four-dimensional world.—Just as we can picture a non-Euclidean world, so we can picture a world of four dimensions.
2.4.121	Le sens de la vue, même avec un seul œil, joint aux sensations musculaires relatives aux mouvements du globe oculaire, pourrait suffire pour nous faire connaître l'espace à trois dimensions.	The sense of sight, even with a single eye, together with the muscular sensations relating to the movements of the eyeball, could suffice to acquaint us with three-dimensional space.
2.4.122	Les images des objets extérieurs viennent se peindre sur la rétine qui est un tableau à deux dimensions ; ce sont des *perspectives*.	The images of external objects are painted on the retina, which is a two-dimensional canvas; they are *perspectives*.
2.4.123	Mais, comme ces objets sont mobiles, comme il en est de même de notre œil, nous voyons successivement diverses perspectives d'un même corps, prises de plusieurs points de vue différents.	But since these objects can move, and so can our eye, we see in succession various perspectives of the same body, taken from several different points of view.
2.4.124	Nous constatons en même temps que le passage d'une perspective à une autre est souvent accompagné de sensations musculaires.	At the same time we observe that the passage from one perspective to another is often accompanied by muscular sensations.
2.4.125	Si le passage de la perspective A à la perspective B, et celui de la perspective A′ à la perspective B′ sont accompagnés des mêmes sensations musculaires, nous les rapprochons l'un de l'autre comme des opérations de même nature.	If the passage from perspective A to perspective B, and that from perspective A′ to perspective B′, are accompanied by the same muscular sensations, we group them together as operations of the same kind.
2.4.126		

	FRENCH	ENGLISH
	Étudiant ensuite les lois d'après lesquelles se combinent ces opérations, nous reconnaissons qu'elles forment un groupe, qui a même structure que celui des mouvements des solides invariables.	Next, studying the laws by which these operations combine, we recognize that they form a group, which has the same structure as the group of motions of invariable solids.
2.4.127	Or nous avons vu que c'est des propriétés de ce groupe que nous avons tiré la notion de l'espace géométrique et celle des trois dimensions.	Now, we have seen that it is from the properties of this group that we derived the notion of geometric space and that of three dimensions.
2.4.128	Nous comprenons ainsi comment l'idée d'un espace à trois dimensions a pu naître du spectacle de ces perspectives, bien que chacune d'elles n'ait que deux dimensions, parce qu'*elles se succèdent suivant certaines lois*.	We thus understand how the idea of a three-dimensional space could arise from the spectacle of these perspectives, even though each of them has only two dimensions, because *they follow one another according to certain laws*.
2.4.129	Eh bien, de même qu'on peut faire sur un plan la perspective d'une figure à trois dimensions, on peut faire celle d'une figure à quatre dimensions sur un tableau à trois (ou à deux) dimensions. Ce n'est qu'un jeu pour le géomètre.	Well then, just as we can draw on a plane the perspective of a three-dimensional figure, we can draw the perspective of a four-dimensional figure on a three-dimensional (or two-dimensional) picture. For the geometer this is mere play.
2.4.130	On peut même prendre d'une même figure plusieurs perspectives de plusieurs points de vue différents.	We can even take several perspectives of the same figure from several different points of view.
2.4.131	Nous pouvons facilement nous représenter ces perspectives puisqu'elles n'ont que trois dimensions.	We can easily picture these perspectives to ourselves, since they have only three dimensions.
2.4.132	Imaginons que les diverses perspectives d'un même objet se succèdent les unes aux autres ; que le passage de l'une à l'autre soit accompagné de sensations musculaires.	Let us imagine that the various perspectives of the same object follow one another, and that the passage from one to the next is accompanied by muscular sensations.
2.4.133	On considérera bien entendu deux de ces passages comme deux opérations de même nature quand ils seront associés aux mêmes sensations musculaires.	We shall of course regard two of these passages as two operations of the same kind when they are associated with the same muscular sensations.
2.4.134	Rien n'empêche alors d'imaginer que ces opérations se combinent suivant telle loi que nous voudrons, par exemple de façon à former un groupe qui ait même structure que celui des mouvements d'un solide invariable à quatre dimensions.	Nothing then prevents us from imagining that these operations combine according to any law we please—for example, so as to form a group with the same structure as that of the motions of an invariable four-dimensional solid.
2.4.135	Il n'y a rien là qu'on ne puisse se représenter et pourtant ces sensations sont précisément celles qu'éprouverait un être muni d'une rétine à deux dimensions et qui pourrait se déplacer dans l'espace à quatre dimensions.	There is nothing here that cannot be pictured, and yet these sensations are precisely those that would be experienced by a being equipped with a two-dimensional retina who could move about in four-dimensional space.
2.4.136	C'est dans ce sens qu'il est permis de dire qu'on pourrait se représenter la quatrième dimension.	It is in this sense that we may say one could picture the fourth dimension.
2.4.137	Il ne serait pas possible de se représenter de cette façon l'espace de M. Hilbert dont nous parlions au chapitre précédent, parce que cet espace n'est plus un continu du	It would not be possible to picture in this way Hilbert's space, of which we spoke in the previous

	FRENCH	ENGLISH
	second ordre. Il diffère donc beaucoup trop profondément de notre espace ordinaire.	chapter, because that space is no longer a continuum of the second order. It therefore differs far too profoundly from our ordinary space.
2.4.138	Conclusions. — On voit que l'expérience joue un rôle indispensable dans la genèse de la géométrie ; mais ce serait une erreur d'en conclure que la géométrie est une science expérimentale, même en partie.	Conclusions.—We see that experience plays an indispensable part in the genesis of geometry; but it would be a mistake to conclude from this that geometry is an experimental science, even in part.
2.4.139	Si elle était expérimentale, elle ne serait qu'approximative et provisoire. Et quelle approximation grossière !	If it were experimental, it would be only approximate and provisional. And what a rough approximation!
2.4.140	La géométrie ne serait que l'étude des mouvements des solides ; mais elle ne s'occupe pas en réalité des solides naturels, elle a pour objet certains solides idéaux, absolument invariables, qui n'en sont qu'une image simplifiée et bien lointaine.	Geometry would be nothing but the study of the motions of solids; but in reality it is not concerned with natural solids. Its object is certain ideal solids, absolutely invariable, which are only a simplified and very distant image of them.
2.4.141	La notion de ces corps idéaux est tirée de toutes pièces de notre esprit et l'expérience n'est qu'une occasion qui nous engage à l'en faire sortir.	The notion of these ideal bodies is drawn entirely from our own mind, and experience is merely an occasion that prompts us to bring it out.
2.4.142	Ce qui est l'objet de la géométrie, c'est l'étude d'un « groupe » particulier ; mais le concept général de groupe préexiste dans notre esprit au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement.	What geometry studies is a particular "group"; but the general concept of group pre-exists in our mind, at least potentially. It imposes itself on us not as a form of our sensibility, but as a form of our understanding.
2.4.143	Seulement, parmi tous les groupes possibles, il faut choisir celui qui sera pour ainsi dire l'*étalon* auquel nous rapporterons les phénomènes naturels.	Only, among all possible groups, we must choose the one that will be, so to speak, the *standard* to which we shall refer natural phenomena.
2.4.144	L'expérience nous guide dans ce choix qu'elle ne nous impose pas ; elle nous fait reconnaître non quelle est la géométrie la plus vraie, mais quelle est la plus *commode*.	Experience guides us in this choice but does not impose it on us; it shows us not which geometry is the most true, but which is the most *convenient*.
2.4.145	On remarquera que j'ai pu décrire les mondes fantaisistes que j'ai imaginés plus haut, *sans cesser d'employer le langage de la géométrie ordinaire*.	It will be noticed that I was able to describe the fanciful worlds I imagined above *without ceasing to use the language of ordinary geometry*.
2.4.146	Et, en effet, nous n'aurions pas à en changer si nous y étions transportés.	And indeed we would not need to change that language if we were transported there.
2.4.147	Des êtres qui y feraient leur éducation trouveraient sans doute plus commode de créer une géométrie différente de la nôtre, qui s'adapterait mieux à leurs impressions. Quant à nous, en face des *mêmes* impressions, il est certain que nous trouverions plus commode de ne pas changer nos habitudes.	Beings who were educated in those worlds would no doubt find it more convenient to create a geometry different from ours, one better suited to their impressions. As for us, faced with the *same* impressions, we would certainly find it more convenient not to change our habits.

CHAPTER V: EXPERIENCE AND GEOMETRY

No measurement on circles, stars or light rays can decide between Euclid and Lobachevsky.

	FRENCH	ENGLISH
2.5.1	1. Dans les lignes qui précèdent, j'ai déjà à diverses reprises cherché à montrer que les principes de la géométrie ne sont pas des faits expérimentaux et qu'en particulier le postulatum d'Euclide ne saurait être démontré par l'expérience.	1. In the foregoing pages I have already tried more than once to show that the principles of geometry are not experimental facts, and in particular that Euclid's postulate cannot be proved by experiment.
2.5.2	Quelque péremptoires que me paraissent les raisons déjà données, je crois devoir insister parce qu'il y a là une idée fausse profondément enracinée dans bien des esprits.	However conclusive the reasons already given seem to me, I feel I must press the point, because there is a false idea here that is deeply rooted in many minds.
2.5.3	2. Qu'on réalise un cercle matériel, qu'on en mesure le rayon et la circonférence, et qu'on cherche à voir si le rapport de ces deux longueurs est égal à π, qu'aura-t-on fait ? On aura fait une expérience, non sur les propriétés de l'espace, mais sur celles de la matière avec laquelle on a réalisé ce *rond*, et de celle dont est fait le mètre qui a servi aux mesures.	2. Suppose we make a material circle, measure its radius and its circumference, and try to see whether the ratio of these two lengths is equal to π. What will we have done? We will have made an experiment, not on the properties of space, but on those of the material from which we made this *round* object, and of the material of the meter rule used for the measurements.
2.5.4	3. La géométrie et l'astronomie. — On a également posé la question d'une autre manière. Si la géométrie de Lobatchevsky est vraie, la parallaxe d'une étoile très éloignée sera finie ; si celle de Riemann est vraie, elle sera négative. Ce sont là des résultats qui semblent accessibles à l'expérience et on a espéré que les observations astronomiques pourraient permettre de décider entre les trois géométries.	3. Geometry and astronomy.—The question has also been put another way. If Lobachevsky's geometry is true, the parallax of a very distant star will be finite; if Riemann's is true, it will be negative. These are results that seem accessible to experiment, and it was hoped that astronomical observations might make it possible to decide among the three geometries.
2.5.5	Mais ce qu'on appelle ligne droite en astronomie, c'est simplement la trajectoire du rayon lumineux. Si donc, par impossible, on venait à découvrir des parallaxes négatives, ou à démontrer que toutes les parallaxes sont supérieures à une certaine limite, on aurait le choix entre deux conclusions : nous pourrions renoncer à la géométrie euclidienne ou bien modifier les lois de l'optique et admettre que la lumière ne se propage pas rigoureusement en ligne droite.	But what is called a straight line in astronomy is simply the path of a ray of light. If, then, to suppose the impossible, we were to discover negative parallaxes, or to prove that all parallaxes are greater than a certain limit, we would have a choice between two conclusions: we could give up Euclidean geometry, or else modify the laws of optics and admit that light does not travel exactly in a straight line.
2.5.6	Inutile d'ajouter que tout le monde regarderait cette solution comme plus avantageuse.	Needless to say, everyone would regard the latter solution as the more advantageous.
2.5.7	La géométrie euclidienne n'a donc rien à craindre d'expériences nouvelles.	Euclidean geometry, then, has nothing to fear from new experiments.
2.5.8	4. Peut-on soutenir que certains phénomènes, possibles dans l'espace euclidien, seraient impossibles dans l'espace non euclidien, de sorte que l'expérience, en	4. Can it be maintained that certain phenomena, possible in Euclidean space, would be impossible in non-Euclidean space, so that experiment, by es-

	FRENCH	ENGLISH
	constatant ces phénomènes, contredirait directement l'hypothèse non euclidienne ? Pour moi, une pareille question ne peut se poser. À mon sens elle équivaut tout à fait à la suivante, dont l'absurdité saute aux yeux de tous : y a-t-il des longueurs que l'on peut exprimer en mètres et centimètres, mais que l'on ne saurait mesurer en toises, pieds et pouces, de sorte que l'expérience, en constatant l'existence de ces longueurs, contredirait directement cette hypothèse qu'il y a des toises partagées en six pieds ?	tablishing these phenomena, would directly contradict the non-Euclidean hypothesis? For my part, I hold that such a question cannot even be asked. In my view it is exactly equivalent to the following one, whose absurdity is obvious to everyone: are there lengths that can be expressed in meters and centimeters but cannot be measured in toises, feet and inches, so that experiment, by establishing the existence of these lengths, would directly contradict the hypothesis that there are toises divided into six feet?[11]
2.5.9	Examinons la question de plus près. Je suppose que la ligne droite possède dans l'espace euclidien deux propriétés quelconques que j'appellerai A et B ; que dans l'espace non euclidien elle possède encore la propriété A, mais ne possède plus la propriété B ; je suppose enfin que, tant dans l'espace euclidien que dans l'espace non euclidien, la ligne droite soit la seule ligne qui possède la propriété A.	Let us look at the question more closely. Suppose that in Euclidean space the straight line has any two properties, which I shall call A and B; that in non-Euclidean space it still has property A but no longer has property B; and finally that, in Euclidean and non-Euclidean space alike, the straight line is the only line that has property A.
2.5.10	S'il en était ainsi, l'expérience pourrait être apte à décider entre l'hypothèse d'Euclide et celle de Lobatchevsky. On constaterait que tel objet concret, accessible à l'expérience, par exemple un pinceau de rayons lumineux, possède la propriété A ; on en conclurait qu'il est rectiligne et on chercherait ensuite s'il possède ou non la propriété B.	If that were so, experiment might be able to decide between Euclid's hypothesis and Lobachevsky's. We would establish that some concrete object accessible to experiment—for instance a pencil of light rays—has property A; we would conclude that it is rectilinear, and we would then look to see whether or not it has property B.
2.5.11	Mais *il n'en est pas ainsi*, il n'existe pas de propriété qui puisse, comme cette propriété A, être un critère absolu permettant de reconnaître la ligne droite et de la distinguer de toute autre ligne.	But *this is not so*: there is no property that can, like this property A, be an absolute criterion for recognizing the straight line and distinguishing it from every other line.
2.5.12	Dira-t-on par exemple : « cette propriété sera la suivante : la ligne droite est une ligne telle qu'une figure dont fait partie cette ligne peut se mouvoir sans que les distances mutuelles de ses points varient et de telle sorte que tous les points de cette ligne restent fixes ? »	Will it be said, for example: "This property will be the following: the straight line is a line such that a figure of which this line forms part can move without the mutual distances of its points changing, and in such a way that all the points of this line remain fixed"?
2.5.13	Voilà en effet une propriété qui, dans l'espace euclidien ou non euclidien, appartient à la droite et n'appartient qu'à elle. Mais comment reconnaîtra-t-on par expérience si elle appartient à tel ou tel objet concret ? Il faudra mesurer des distances, et comment saura-t-on que telle grandeur concrète que j'ai mesurée avec mon instrument matériel représente bien la distance abstraite ?	Here indeed is a property which, in Euclidean or non-Euclidean space, belongs to the straight line and to it alone. But how shall we recognize by experiment whether it belongs to this or that concrete object? We shall have to measure distances—and how shall we know that a given concrete magnitude that I have measured with my material instrument really represents the abstract distance?

11 The toise was an old French unit of length (about 1.95 m), divided into six pieds (feet); it was replaced by the metric system.

	FRENCH	ENGLISH
2.5.14	On n'a fait que reculer la difficulté.	We have merely pushed the difficulty back.
2.5.15	En réalité la propriété que je viens d'énoncer n'est pas une propriété de la ligne droite seule, c'est une propriété de la ligne droite et de la distance. Pour qu'elle pût servir de critère absolu, il faudrait que l'on pût établir non seulement qu'elle n'appartient pas aussi à une autre ligne que la ligne droite et à la distance, mais encore qu'elle n'appartient pas à une autre ligne que la ligne droite et à une autre grandeur que la distance. Or cela n'est pas vrai.	In reality, the property I have just stated is not a property of the straight line alone; it is a property of the straight line and of distance. For it to serve as an absolute criterion, we would have to establish not only that it does not also belong to some line other than the straight line taken together with distance, but also that it does not belong to some line other than the straight line taken together with some magnitude other than distance. Now that is not true.
2.5.16	Il est donc impossible d'imaginer une expérience concrète qui puisse être interprétée dans le système euclidien et qui ne puisse pas l'être dans le système lobatchevskien, de sorte que je puis conclure :	It is therefore impossible to imagine a concrete experiment that could be interpreted in the Euclidean system and could not be interpreted in the Lobachevskian system, so that I may conclude:
2.5.17	Aucune expérience ne sera jamais en contradiction avec le postulatum d'Euclide ; en revanche aucune expérience ne sera jamais en contradiction avec le postulatum de Lobatchevsky.	No experiment will ever be in contradiction with Euclid's postulate; but, on the other hand, no experiment will ever be in contradiction with Lobachevsky's postulate.
2.5.18	5. Mais il ne suffit pas que la géométrie euclidienne (ou non euclidienne) ne puisse jamais être directement contredite par l'expérience. Ne pourrait-il pas se faire qu'elle ne puisse s'accorder avec l'expérience qu'en violant le principe de raison suffisante et celui de la relativité de l'espace ?	5. But it is not enough that Euclidean (or non-Euclidean) geometry can never be directly contradicted by experiment. Might it not happen that it can be made to agree with experiment only by violating the principle of sufficient reason and that of the relativity of space?
2.5.19	Je m'explique : considérons un système matériel quelconque ; nous aurons à envisager d'une part « l'état » des divers corps de ce système (par exemple leur température, leur potentiel électrique, etc.), et d'autre part leur position dans l'espace ; et parmi les données qui permettent de définir cette position, nous distinguerons encore les distances mutuelles de ces corps qui définissent leurs positions relatives, et les conditions qui définissent la position absolue du système et son orientation absolue dans l'espace.	Let me explain. Consider any material system. We shall have to take into account, on the one hand, the "state" of the various bodies of this system (for example their temperature, their electric potential, and so on), and on the other hand their position in space; and among the data that allow us to define this position we shall further distinguish the mutual distances of these bodies, which define their relative positions, from the conditions that define the absolute position of the system and its absolute orientation in space.
2.5.20	Les lois des phénomènes qui se produiront dans ce système pourront dépendre de l'état de ces corps et de leurs distances mutuelles ; mais, à cause de la relativité et de la passivité de l'espace, elles ne dépendront pas de la position et de l'orientation absolues du système.	The laws of the phenomena that occur in this system may depend on the state of these bodies and on their mutual distances; but, because of the relativity and the passivity of space, they will not depend on the absolute position and orientation of the system.
2.5.21	En d'autres termes, l'état des corps et leurs distances mutuelles à un instant quelconque dépendront	In other words, the state of the bodies and their mutual distances at any instant will depend only

	FRENCH	ENGLISH
	seulement de l'état de ces mêmes corps et de leurs distances mutuelles à l'instant initial, mais ne dépendront nullement de la position absolue initiale du système et de son orientation absolue initiale. C'est ce que je pourrai appeler, pour abréger le langage, *la loi de relativité*.	on the state of those same bodies and their mutual distances at the initial instant, and will not depend at all on the initial absolute position of the system or on its initial absolute orientation. This is what, for brevity, I may call *the law of relativity*.
2.5.22	J'ai parlé jusqu'ici comme un géomètre euclidien. Mais je l'ai dit, une expérience, quelle qu'elle soit, comporte une interprétation dans l'hypothèse euclidienne ; mais elle en comporte une également dans l'hypothèse non euclidienne. Eh bien, nous avons fait une série d'expériences, nous les avons interprétées dans l'hypothèse euclidienne, et nous avons reconnu que ces expériences ainsi interprétées ne violent pas cette « loi de relativité ».	So far I have spoken as a Euclidean geometer. But, as I have said, any experiment whatever admits of an interpretation on the Euclidean hypothesis; it equally admits of one on the non-Euclidean hypothesis. Well then, we have made a series of experiments, we have interpreted them on the Euclidean hypothesis, and we have found that these experiments, so interpreted, do not violate this "law of relativity."
2.5.23	Nous les interprétons maintenant dans l'hypothèse non euclidienne : cela est toujours possible ; seulement les distances non euclidiennes de nos différents corps dans cette interprétation nouvelle ne seront généralement pas les mêmes que les distances euclidiennes dans l'interprétation primitive.	Now let us interpret them on the non-Euclidean hypothesis. This is always possible; only, the non-Euclidean distances between our various bodies in this new interpretation will generally not be the same as the Euclidean distances in the original interpretation.
2.5.24	Nos expériences, interprétées de cette manière nouvelle, seront-elles encore d'accord avec notre « loi de relativité » ? Et si cet accord n'avait pas lieu, n'aurait-on pas encore le droit de dire que l'expérience a prouvé la fausseté de la géométrie non euclidienne.	Will our experiments, interpreted in this new way, still agree with our "law of relativity"? And if they did not, would we not still be entitled to say that experiment had proved non-Euclidean geometry false?
2.5.25	Il est aisé de voir que cette crainte est vaine ; en effet, pour qu'on puisse appliquer la loi de relativité en toute rigueur, il faut l'appliquer à l'univers entier. Car si on considérait seulement une partie de cet univers, et si la position absolue de cette partie venait à varier, les distances aux autres corps de l'univers varieraient également, leur influence sur la partie de l'univers envisagée pourrait par conséquent augmenter ou diminuer, ce qui pourrait modifier les lois des phénomènes qui s'y passent.	It is easy to see that this fear is groundless. For the law of relativity to be applied with full rigor, it must be applied to the entire universe. For if we considered only part of the universe, and if the absolute position of that part were to change, its distances from the other bodies of the universe would change as well; their influence on the part of the universe under consideration might therefore increase or diminish, which could alter the laws of the phenomena taking place in it.
2.5.26	Mais si notre système est l'univers entier, l'expérience est impuissante à nous renseigner sur sa position et son orientation absolues dans l'espace. Tout ce que nos instruments, si perfectionnés qu'ils soient, pourront nous faire connaître, ce sera l'état des diverses parties de l'univers et leurs distances mutuelles.	But if our system is the entire universe, experiment is powerless to tell us anything about its absolute position and orientation in space. All that our instruments, however perfect they may be, can tell us will be the state of the various parts of the universe and their mutual distances.
2.5.27	De sorte que notre loi de relativité pourra s'énoncer ainsi :	So our law of relativity can be stated as follows:
2.5.28		

	FRENCH	ENGLISH
	Les lectures que nous pourrons faire sur nos instruments, à un instant quelconque, dépendront seulement des lectures que nous aurions pu faire sur ces mêmes instruments à l'instant initial.	The readings we can take on our instruments at any instant will depend only on the readings we could have taken on those same instruments at the initial instant.
2.5.29	Or un pareil énoncé est indépendant de toute interprétation des expériences. Si la loi est vraie dans l'interprétation euclidienne, elle sera vraie aussi dans l'interprétation non euclidienne.	Now such a statement is independent of any interpretation of the experiments. If the law is true in the Euclidean interpretation, it will also be true in the non-Euclidean interpretation.
2.5.30	Qu'on me permette à ce sujet une petite digression. J'ai parlé plus haut des données qui définissent la position des divers corps de système ; j'aurais dû parler également de celles qui définissent leurs vitesses ; j'aurais eu alors à distinguer la vitesse avec laquelle varient les distances mutuelles des divers corps ; et d'autre part les vitesses de translation et de rotation du système, c'est-à-dire les vitesses avec lesquelles varient sa position et son orientation absolues.	Allow me a short digression on this subject. Above, I spoke of the data that define the position of the various bodies of the system; I ought also to have spoken of those that define their velocities. I would then have had to distinguish, on the one hand, the velocity with which the mutual distances of the various bodies change and, on the other, the velocities of translation and rotation of the system, that is, the velocities with which its absolute position and orientation change.
2.5.31	Pour que l'esprit fût pleinement satisfait, il aurait fallu que la loi de relativité pût s'énoncer ainsi :	For the mind to be fully satisfied, it would have been necessary for the law of relativity to be statable as follows:
2.5.32	L'état des corps et leurs distances mutuelles à un instant quelconque, ainsi que les vitesses avec lesquelles varient ces distances à ce même instant, dépendront seulement de l'état de ces corps et de leurs distances mutuelles à l'instant initial, ainsi que des vitesses avec lesquelles variaient ces distances à cet instant initial, mais elles ne dépendront ni de la position absolue initiale du système, ni de son orientation absolue, ni des vitesses avec lesquelles variaient cette position et cette orientation absolues à l'instant initial.	The state of the bodies and their mutual distances at any instant, as well as the velocities with which these distances are changing at that same instant, will depend only on the state of these bodies and their mutual distances at the initial instant, and on the velocities with which these distances were changing at that initial instant; but they will depend neither on the initial absolute position of the system, nor on its absolute orientation, nor on the velocities with which that absolute position and orientation were changing at the initial instant.
2.5.33	Malheureusement la loi ainsi énoncée n'est pas d'accord avec les expériences, au moins telles qu'on les interprète d'ordinaire.	Unfortunately the law so stated does not agree with experiment, at least as experiments are usually interpreted.

	FRENCH	ENGLISH
2.5.34	Qu'un homme soit transporté sur une planète dont le ciel serait constamment couvert d'un épais rideau de nuages, de telle façon qu'on ne puisse jamais apercevoir les autres astres ; sur cette planète on vivra comme si elle était isolée dans l'espace. Cet homme pourra cependant s'apercevoir qu'elle tourne, soit en mesurant l'aplatissement (ce qu'on fait ordinairement en s'aidant d'observations astronomiques, mais ce qui pourrait se faire par des moyens purement géodésiques), soit en répétant l'expérience du pendule de Foucault. La rotation absolue de cette planète pourrait donc être mise en évidence.	Suppose a man were transported to a planet whose sky was permanently covered by a thick curtain of cloud, so that the other heavenly bodies could never be seen; on that planet one would live as if it were isolated in space. Yet this man could discover that it rotates, either by measuring its flattening (which is usually done with the help of astronomical observations, but could be done by purely geodetic means) or by repeating Foucault's pendulum experiment. The absolute rotation of this planet could therefore be demonstrated.[12]
2.5.35	Il y a là un fait qui choque le philosophe, mais que le physicien est bien forcé d'accepter.	Here is a fact that shocks the philosopher, but which the physicist is obliged to accept.
2.5.36	On sait que, de ce fait, Newton a conclu à l'existence de l'espace absolu ; je ne puis en aucune façon adopter cette manière de voir, j'expliquerai pourquoi dans la troisième partie. Pour le moment je n'ai pas voulu aborder cette difficulté.	We know that from this fact Newton concluded that absolute space exists. I cannot in any way adopt this view; I shall explain why in the third part. For the moment I have not wished to tackle this difficulty.
2.5.37	J'ai donc dû me résigner, dans l'énoncé de la loi de relativité, à confondre les vitesses de toutes sortes parmi les données qui définissent l'état des corps.	So, in stating the law of relativity, I have had to resign myself to lumping velocities of every kind in with the data that define the state of the bodies.
2.5.38	Quoi qu'il en soit, cette difficulté est la même pour la géométrie d'Euclide et pour celle de Lobatchevsky ; je n'ai donc pas à m'en inquiéter et je n'en ai parlé qu'incidemment.	Be that as it may, this difficulty is the same for Euclid's geometry and for Lobachevsky's; so I need not worry about it, and I have mentioned it only in passing.
2.5.39	Ce qui importe, c'est la conclusion : l'expérience ne peut décider entre Euclide et Lobatchevsky.	What matters is the conclusion: experiment cannot decide between Euclid and Lobachevsky.
2.5.40	En résumé, de quelque façon qu'on se retourne, il est impossible de découvrir à l'empirisme géométrique un sens raisonnable.	In short, whichever way we turn, it is impossible to find any reasonable meaning in geometric empiricism.

EXPERIMENTS CONCERN BODIES, NOT SPACE

Like measuring a ship's timbers to find the captain's age, experiments reveal only relations among bodies.

	FRENCH	ENGLISH
2.5.41	6. Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux ; aucune d'elles ne porte, ni ne peut porter, sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace.	6. Experiments tell us only about the relations of bodies to one another; none of them bears, or can bear, on the relations of bodies to space, or on the mutual relations of the various parts of space.
2.5.42	« Oui, répondez-vous à cela, une expérience unique est insuffisante, parce qu'elle ne me donne qu'une seule	"Yes," you reply, "a single experiment is not enough, because it gives me only one equation

12 In 1851 Léon Foucault showed the earth's rotation with a long pendulum whose plane of swing slowly turns.

	FRENCH	ENGLISH
	équation avec plusieurs inconnues ; mais quand j'aurai fait assez d'expériences, j'aurai assez d'équations pour calculer toutes mes inconnues. »	with several unknowns; but when I have made enough experiments, I shall have enough equations to calculate all my unknowns."
2.5.43	Connaître la hauteur du grand mât, cela ne suffit pas pour calculer l'âge du capitaine. Quand vous aurez mesuré tous les morceaux de bois du navire, vous aurez beaucoup d'équations, mais vous ne connaîtrez pas mieux cet âge. Toutes vos mesures ayant porté sur vos morceaux de bois ne peuvent rien vous révéler que ce qui concerne ces morceaux de bois. De même vos expériences, quelque nombreuses qu'elles soient, n'ayant porté que sur les rapports des corps entre eux, ne nous révéleront rien sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace.	Knowing the height of the mainmast is not enough to calculate the captain's age. When you have measured every piece of wood in the ship, you will have plenty of equations, but you will know that age no better. All your measurements, having been made on your pieces of wood, can reveal nothing to you except what concerns those pieces of wood. In the same way your experiments, however numerous they may be, having dealt only with the relations of bodies to one another, will reveal nothing to us about the mutual relations of the various parts of space.
2.5.44	7. Direz-vous que, si les expériences portent sur les corps, elles portent du moins sur les propriétés géométriques des corps ?	7. Will you say that, if experiments deal with bodies, they at least deal with the geometric properties of bodies?
2.5.45	Et d'abord, qu'entendez-vous par propriétés géométriques des corps ? Je suppose qu'il s'agit des rapports des corps avec l'espace ; ces propriétés sont donc inaccessibles à des expériences qui ne portent que sur les rapports des corps entre eux. Cela seul suffirait pour montrer que ce n'est pas d'elles qu'il peut être question.	First of all, what do you mean by the geometric properties of bodies? I suppose you mean the relations of bodies to space; these properties are therefore inaccessible to experiments that deal only with the relations of bodies to one another. That alone would be enough to show that these cannot be what is in question.
2.5.46	Commençons toutefois par nous entendre sur le sens de ce mot : propriétés géométriques des corps. Quand je dis qu'un corps se compose de plusieurs parties, je suppose que je n'énonce pas là une propriété géométrique, et cela resterait vrai, même si je convenais de donner le nom impropre de points aux parties les plus petites que j'envisage.	Let us nevertheless begin by agreeing on the meaning of this phrase: geometric properties of bodies. When I say that a body is made up of several parts, I take it that I am not stating a geometric property; and this would remain true even if I agreed to give the improper name of points to the smallest parts I consider.
2.5.47	Quand je dis que telle partie de tel corps est en contact avec telle partie de tel autre corps, j'énonce une proposition qui concerne les rapports mutuels de ces deux corps et non pas leurs rapports avec l'espace.	When I say that a certain part of one body is in contact with a certain part of another body, I am stating a proposition that concerns the mutual relations of these two bodies, and not their relations to space.
2.5.48	Je suppose que vous m'accorderez que ce ne sont pas là des propriétés géométriques ; je suis sûr au moins que vous m'accorderez que ces propriétés sont indépendantes de toute connaissance de la géométrie métrique.	I suppose you will grant me that these are not geometric properties; at least I am sure you will grant me that these properties are independent of any knowledge of metric geometry.
2.5.49	Cela posé, j'imagine que l'on ait un corps solide formé de huit tiges minces de fer OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, réunies par une de leurs extrémités O. Nous aurons d'autre part un second corps solide, par exemple un	That being established, let us imagine a solid body made of eight thin iron rods OA, OB, OC, OD, OE, OF, OG, OH, joined at one of their ends, O. We shall also have a second solid body, say a piece of wood,

FRENCH

morceau de bois sur lequel on remarquera trois petites taches d'encre que j'appellerai α, β, γ.

Je suppose ensuite que l'on constate que l'on peut amener en contact : α β γ avec AGO (je veux dire par là α avec A, en même temps que β avec G et γ avec O), puis qu'on peut amener successivement en contact α β γ avec BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, puis avec AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, puis α γ successivement avec AB, BC, CD, DE, EF, FA.

2.5.50 Voilà des constatations que l'on peut faire sans avoir d'avance aucune notion sur la forme ou sur les propriétés métriques de l'espace. Elles ne portent nullement sur les « propriétés géométriques des corps ». Et ces constatations ne seront pas possibles si les corps sur lesquels on a expérimenté se meuvent suivant un groupe ayant même structure que le groupe lobatchevskien (je veux dire d'après les mêmes lois que les corps solides dans la géométrie de Lobatchevsky). Elles suffisent donc pour prouver que ces corps se meuvent suivant le groupe euclidien, ou tout au moins qu'ils ne se meuvent pas suivant le groupe lobatchevskien.

2.5.51 Qu'elles soient compatibles avec le groupe euclidien, c'est ce qu'il est aisé de voir.

2.5.52 Car on pourrait les faire si le corps α β γ était un solide invariable de notre géométrie ordinaire présentant la forme d'un triangle rectangle et si les points A B C D E F G H étaient les sommets d'un polyèdre formé de deux pyramides hexagonales régulières de notre géométrie ordinaire, ayant pour base commune A B C D E F et pour sommets l'une G et l'autre H.

2.5.53 Supposons maintenant qu'au lieu des constatations précédentes, on observe qu'on peut comme tout à l'heure appliquer α β γ successivement sur AGO, BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, puis qu'on peut appliquer α β (et non plus α γ) successivement sur AB, BC, CD, DE, EF et FA.

2.5.54 Ce sont les constatations que l'on pourrait faire si la géométrie non euclidienne était vraie, si les corps α β γ, O A B C D E F G H étaient des solides invariables, si le premier était un triangle rectangle et le second une double pyramide hexagonale régulière de dimensions convenables.

2.5.55 Ces constatations nouvelles ne sont donc pas possibles si les corps se meuvent suivant le groupe euclidien ; mais elles le deviennent si l'on suppose que les corps se

ENGLISH

on which we notice three small ink spots, which I shall call α, β, γ.

Next, suppose we find that we can bring α β γ into contact with AGO (by which I mean α with A, while at the same time β is in contact with G and γ with O), and then that we can successively bring α β γ into contact with BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, then with AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, then α γ successively with AB, BC, CD, DE, EF, FA.

These are observations that can be made without any prior notion of the form or the metric properties of space. They in no way concern the "geometric properties of bodies." And these observations will not be possible if the bodies experimented on move according to a group with the same structure as the Lobachevskian group (I mean, according to the same laws as solid bodies in Lobachevsky's geometry). They are therefore enough to prove that these bodies move according to the Euclidean group, or at least that they do not move according to the Lobachevskian group.

That they are compatible with the Euclidean group is easy to see.

For they could be made if the body α β γ were an invariable solid of our ordinary geometry in the shape of a right-angled triangle, and if the points A B C D E F G H were the vertices of a polyhedron formed of two regular hexagonal pyramids of our ordinary geometry, having A B C D E F as their common base and having G and H respectively as their apexes.

Now suppose that, instead of the preceding observations, we find that we can, as before, apply α β γ successively to AGO, BGO, CGO, DGO, EGO, FGO, AHO, BHO, CHO, DHO, EHO, FHO, and then that we can apply α β (and no longer α γ) successively to AB, BC, CD, DE, EF and FA.

These are the observations that could be made if non-Euclidean geometry were true, if the bodies α β γ, O A B C D E F G H were invariable solids, and if the first were a right-angled triangle and the second a regular hexagonal double pyramid of suitable dimensions.

These new observations are therefore not possible if bodies move according to the Euclidean group;

	FRENCH	ENGLISH
	meuvent suivant le groupe lobatchevskien. Elles suffiraient donc (si on les faisait) pour prouver que les corps en question ne se meuvent pas suivant le groupe euclidien.	but they become possible if we suppose that bodies move according to the Lobachevskian group. They would therefore be enough (if they were made) to prove that the bodies in question do not move according to the Euclidean group.
2.5.56	Ainsi, sans faire aucune hypothèse sur la forme, sur la nature de l'espace, sur les rapports des corps avec l'espace, sans attribuer aux corps aucune propriété géométrique, j'ai fait des constatations qui m'ont permis de montrer dans un cas que les corps expérimentés se meuvent suivant un groupe dont la structure est euclidienne, dans l'autre cas qu'ils se meuvent suivant un groupe dont la structure est lobatchevskienne.	Thus, without making any hypothesis about the form or the nature of space, or about the relations of bodies to space, and without attributing any geometric property to bodies, I have made observations that have enabled me to show in one case that the bodies experimented on move according to a group whose structure is Euclidean, and in the other case that they move according to a group whose structure is Lobachevskian.
2.5.57	Et qu'on ne dise pas que le premier ensemble de constatations constituerait une expérience prouvant que l'espace est euclidien, et le second une expérience prouvant que l'espace est non euclidien.	And let no one say that the first set of observations would constitute an experiment proving that space is Euclidean, and the second an experiment proving that space is non-Euclidean.
2.5.58	Et en effet on pourrait imaginer (je dis imaginer) des corps se mouvant de manière à rendre possible la seconde série de constatations. Et la preuve c'est que le premier mécanicien venu pourrait en construire, s'il voulait s'en donner la peine et y mettre le prix. Vous n'en conclurez pas pourtant que l'espace est non euclidien.	Indeed, one could imagine (I say imagine) bodies moving in such a way as to make the second series of observations possible. And the proof is that any mechanic could build such bodies, if he cared to take the trouble and pay the cost. Yet you will not conclude from this that space is non-Euclidean.
2.5.59	Et même, comme les corps solides ordinaires continueraient à exister quand le mécanicien aurait construit les corps étranges dont je viens de parler, il faudrait conclure que l'espace est à la fois euclidien et non euclidien.	Indeed, since ordinary solid bodies would go on existing once the mechanic had built the strange bodies I have just described, we would have to conclude that space is at once Euclidean and non-Euclidean.
2.5.60	Supposons par exemple que nous ayons une grande sphère de rayon R et que la température décroisse du centre à la surface de cette sphère suivant la loi dont j'ai parlé en décrivant le monde non euclidien.	Suppose, for example, that we have a large sphere of radius R, and that the temperature decreases from the center to the surface of this sphere according to the law I mentioned when describing the non-Euclidean world.
2.5.61	Nous pourrions avoir des corps dont la dilatation sera négligeable et qui se comporteront comme des solides invariables ordinaires ; et d'autre part des corps très dilatables et qui se comporteraient comme des solides non euclidiens. Nous pourrions avoir deux doubles pyramides O A B C D E F G H et O′ A′ B′ C′ D′ E′ F′ G′ H′ et deux triangles α β γ et α′ β′ γ′. La première double pyramide serait rectiligne et la seconde curviligne ; le triangle α β γ serait fait d'une matière indilatable et l'autre d'une matière très dilatable.	We could have bodies whose expansion is negligible and which would behave like ordinary invariable solids; and, on the other hand, highly expansible bodies which would behave like non-Euclidean solids. We could have two double pyramids O A B C D E F G H and O′ A′ B′ C′ D′ E′ F′ G′ H′ and two triangles α β γ and α′ β′ γ′. The first double pyramid would be rectilinear and the second curvilinear; the triangle α β γ would be made of a non-expanding material and the other of a highly expansible material.

	FRENCH	ENGLISH
2.5.62	On pourrait alors faire les premières constatations avec la double pyramide OAH et le triangle α β γ, et les secondes avec la double pyramide O′H′A′ et le triangle α′ β′ γ′. Et alors l'expérience semblerait prouver d'abord que la géométrie euclidienne est vraie et ensuite qu'elle est fausse.	We could then make the first observations with the double pyramid OAH and the triangle α β γ, and the second with the double pyramid O′H′A′ and the triangle α′ β′ γ′. And then experiment would seem to prove first that Euclidean geometry is true and then that it is false.
2.5.63	*Les expériences ont donc porté, non sur l'espace, mais sur les corps.*	*Experiments, therefore, have dealt not with space but with bodies.*

SUPPLEMENT: WHY THREE DIMENSIONS?

A point in space is defined through classes of muscular sensations; ancestral experience made geometry convenient.

	FRENCH	ENGLISH
2.5.64	8. Pour être complet, je devrais parler d'une question très délicate et qui demanderait de longs développements, je me bornerai à résumer ici ce que j'ai exposé dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* et dans *The Monist*. Quand nous disons que l'espace a trois dimensions, que voulons-nous dire ?	8. To be complete, I ought to discuss a very delicate question that would call for lengthy treatment; I shall confine myself here to summarizing what I have set out in the *Revue de Métaphysique et de Morale* and in *The Monist*. When we say that space has three dimensions, what do we mean?[13]
2.5.65	Nous avons vu l'importance de ces « changements internes » qui nous sont révélés par nos sensations musculaires. Ils peuvent servir à caractériser les diverses *attitudes* de notre corps. Prenons arbitrairement pour origine une de ces attitudes A. Quand nous passons de cette attitude initiale à une autre attitude quelconque B, nous éprouvons une série S de sensations musculaires et cette série S définira B. Observons toutefois que nous regarderons souvent deux séries S et S′ comme définissant une même attitude B (puisque les attitudes initiale et finale A et B restant les mêmes, les attitudes intermédiaires et les sensations correspondantes peuvent différer). Comment donc reconnaîtrons-nous l'équivalence de ces deux séries ?	We have seen the importance of those "internal changes" that are revealed to us by our muscular sensations. They can serve to characterize the various *attitudes* of our body. Let us arbitrarily take one of these attitudes, A, as our origin. When we pass from this initial attitude to any other attitude B, we experience a series S of muscular sensations, and this series S will define B. Let us note, however, that we shall often regard two series S and S′ as defining the same attitude B (since, while the initial and final attitudes A and B remain the same, the intermediate attitudes and the corresponding sensations may differ). How, then, shall we recognize the equivalence of these two series?
	Parce qu'elles peuvent servir à compenser un même changement externe, ou plus généralement parce que, quand il s'agit de compenser un changement externe, une des séries peut être remplacée par l'autre.	Because they can serve to compensate for the same external change, or, more generally, because, when it is a matter of compensating for an external change, one of the series can be replaced by the other.
2.5.66	Parmi ces séries, nous avons distingué celles qui peuvent à elles seules compenser un changement externe et que nous avons appelées « déplacements ». Comme nous ne pouvons discerner deux déplacements qui sont trop voisins, l'ensemble de ces déplacements présente les caractères d'un continu physique ; l'expérience nous	Among these series we have singled out those that can by themselves compensate for an external change, and which we have called "displacements." Since we cannot distinguish two displacements that are too close together, the set of these displacements has the characteristics of a physical

13 The *Revue de Métaphysique et de Morale* is a French philosophical journal founded in 1893; *The Monist* is an American philosophical journal founded in 1890.

FRENCH

enseigne que ce sont ceux d'un continu physique à six dimensions ; mais nous ne savons pas encore combien l'espace lui-même a de dimensions, il nous faut résoudre une autre question.

2.5.67 Qu'est-ce qu'un point de l'espace ? Tout le monde croit le savoir, mais c'est une illusion. Ce que nous voyons, quand nous cherchons à nous représenter un point de l'espace, c'est une tache noire sur du papier blanc, une tache de craie sur un tableau noir, c'est toujours un objet. La question doit donc être entendue comme il suit :

2.5.68 Que veux-je dire quand je dis que l'objet B est au même point qu'occupait tout à l'heure l'objet A ? Ou encore quel critère me permettra de le reconnaître ?

2.5.69 Je veux dire que, *bien que je n'aie pas bougé* (ce que m'enseigne mon sens musculaire), mon premier doigt, qui tout à l'heure touchait l'objet A, touche maintenant l'objet B. J'aurais pu me servir d'autres critères, par exemple d'un autre doigt ou du sens de la vue. Mais le premier critère est suffisant ; je sais que s'il répond oui, tous les autres critères donneront la même réponse. Je le sais *par expérience*, je ne puis le savoir *à priori*. C'est aussi pour cela que je dis que le toucher ne peut s'exercer à distance, c'est une autre manière d'énoncer le même fait expérimental.

Et, si je dis au contraire que la vue s'exerce à distance, cela veut dire que le critère fourni par la vue peut répondre oui, tandis que les autres répondent non.

2.5.70 Et en effet l'objet, bien que s'étant éloigné, peut former son image au même point de la rétine. La vue répond oui, l'objet est resté au même point, et le toucher répond non, car mon doigt qui tout à l'heure touchait l'objet, ne le touche plus maintenant. Si l'expérience nous avait montré qu'un doigt peut répondre non quand l'autre dit oui, nous dirions de même que le toucher s'exerce à distance.

2.5.71 En résumé, pour chaque attitude de mon corps, mon premier doigt détermine un point et c'est cela, et cela seulement qui définit un point de l'espace.

2.5.72 À chaque attitude correspond de la sorte un point ; mais il arrive souvent que le même point correspond à plusieurs attitudes différentes (c'est dans ce cas que nous disons que notre doigt n'a pas bougé, mais que le reste du corps a bougé). Nous distinguons donc parmi les

ENGLISH

continuum; experience teaches us that they are those of a six-dimensional physical continuum. But we do not yet know how many dimensions space itself has; we must solve another question.

What is a point in space? Everyone thinks he knows, but that is an illusion. What we see, when we try to picture a point in space, is a black spot on white paper, a chalk mark on a blackboard—it is always an object. The question must therefore be understood as follows:

What do I mean when I say that object B is at the same point that object A occupied a moment ago? Or again, what criterion will enable me to recognize this?

I mean that, *although I have not moved* (as my muscular sense tells me), my first finger, which a moment ago was touching object A, is now touching object B. I could have used other criteria—another finger, for example, or the sense of sight. But the first criterion is enough; I know that if it answers yes, all the other criteria will give the same answer. I know this *by experience*; I cannot know it *a priori*. It is for this reason, too, that I say that touch cannot act at a distance; that is another way of stating the same experimental fact.

And if, on the other hand, I say that sight acts at a distance, this means that the criterion provided by sight may answer yes while the others answer no.

And indeed the object, although it has moved away, may form its image at the same point of the retina. Sight answers yes, the object has stayed at the same point; and touch answers no, for my finger, which a moment ago was touching the object, no longer touches it. If experience had shown us that one finger can answer no when the other says yes, we would likewise say that touch acts at a distance.

In short, for each attitude of my body, my first finger determines a point, and it is this, and this alone, that defines a point in space.

To each attitude there thus corresponds a point; but it often happens that the same point corresponds to several different attitudes (in that case we say that our finger has not moved, but the rest

FRENCH	ENGLISH
changements d'attitude ceux où le doigt ne bouge pas. Comment y sommes-nous conduits ? C'est parce que souvent nous remarquons que dans ces changements l'objet qui est au contact du doigt ne quitte pas ce contact.	of the body has). We therefore single out, among changes of attitude, those in which the finger does not move. How are we led to do so? Because we often notice that in these changes the object in contact with the finger does not lose that contact.
2.5.73 Rangeons donc dans une même classe toutes les attitudes qui se déduisent les unes des autres par un des changements que nous avons ainsi distingués. À toutes les attitudes d'une même classe correspondra le même point de l'espace. Donc à chaque classe correspondra un point et à chaque point une classe. Mais on peut dire que, ce que l'expérience atteint, ce n'est pas le point, c'est cette classe de changements, ou mieux la classe de sensations musculaires correspondante.	Let us therefore put in one class all the attitudes that can be derived from one another by one of the changes we have thus singled out. To all the attitudes of the same class there will correspond the same point in space. So to each class there will correspond a point, and to each point a class. But we may say that what experience reaches is not the point; it is this class of changes, or better, the corresponding class of muscular sensations.
2.5.74 Et alors quand nous disons que l'espace a trois dimensions, nous voulons dire simplement que l'ensemble de ces classes nous apparaît avec les caractères d'un continu physique à trois dimensions.	And so, when we say that space has three dimensions, we simply mean that the totality of these classes appears to us with the characteristics of a three-dimensional physical continuum.
2.5.75 On pourrait être tenté de conclure que c'est l'expérience qui nous a appris combien l'espace a de dimensions. Mais en réalité ici encore nos expériences ont porté, non sur l'espace, mais sur notre corps et ses rapports avec les objets voisins. De plus elles sont excessivement grossières.	One might be tempted to conclude that it is experience that has taught us how many dimensions space has. But in reality, here again, our experiments have dealt not with space but with our body and its relations with neighboring objects. Moreover, they are exceedingly crude.
2.5.76 Dans notre esprit préexistait l'idée latente d'un certain nombre de groupes ; ce sont ceux dont Lie a fait la théorie. Lequel choisirons-nous pour en faire une sorte d'étalon auquel nous comparerons les phénomènes naturels ? Et, ce groupe choisi, quel est celui de ses sous-groupes que nous prendrons pour caractériser un point de l'espace ? L'expérience nous a guidés en nous montrant quel choix s'adapte le mieux aux propriétés de notre corps. Mais son rôle s'est borné là. *L'expérience ancestrale*.	In our mind there pre-existed the latent idea of a certain number of groups—those whose theory Lie worked out. Which shall we choose to make into a kind of standard against which we shall compare natural phenomena? And, once this group is chosen, which of its subgroups shall we take to characterize a point in space? Experience has guided us by showing us which choice best fits the properties of our body. But its role ended there. *Ancestral experience*.
2.5.77 On a dit souvent que si l'expérience individuelle n'a pu créer la géométrie, il n'en est pas de même de l'expérience ancestrale. Mais qu'entend-on par là ? Veut-on dire que nous ne pouvons démontrer expérimentalement le postulatum d'Euclide, mais que nos ancêtres ont pu le faire ? Pas le moins du monde. On veut dire que par sélection naturelle notre esprit s'est *adapté* aux conditions du monde extérieur, qu'il a adopté la géométrie *la plus avantageuse* à l'espèce ; ou en d'autres termes *la plus commode*. Cela est tout à fait conforme à nos conclusions, la géométrie n'est pas vraie, elle est avantageuse.	It has often been said that, if individual experience could not create geometry, the same is not true of ancestral experience. But what is meant by this? Is it meant that we cannot prove Euclid's postulate experimentally, but that our ancestors were able to do so? Not in the least. What is meant is that through natural selection our mind has *adapted* itself to the conditions of the external world, that it has adopted the geometry *most advantageous* to the species—or, in other words, *the most convenient*. This is entirely in keeping with our conclusions: geometry is not true, it is advantageous.

Part Three: Force

La force
The principles of classical mechanics, relative and absolute motion, energy and thermodynamics: how experimental laws harden into conventions (Chapters VI–VIII).

CHAPITRE VI. LA MÉCANIQUE CLASSIQUE.

	FRENCH	ENGLISH
3.6.1	Les Anglais enseignent la mécanique comme une science expérimentale ; sur le continent, on l'expose toujours plus ou moins comme une science déductive et *à priori*. Ce sont les Anglais qui ont raison, cela va sans dire ; mais comment a-t-on pu persévérer si longtemps dans d'autres errements ? Pourquoi les savants continentaux, qui ont cherché à échapper aux habitudes de leurs devanciers, n'ont-ils pas pu le plus souvent s'en affranchir complètement ?	The English teach mechanics as an experimental science; on the Continent it is always presented more or less as a deductive, *a priori* science. The English are right, needless to say; but how could the other course have been persisted in for so long? Why have Continental scientists, who tried to escape the habits of their predecessors, for the most part been unable to free themselves from them completely?
3.6.2	D'autre part, si les principes de la mécanique n'ont d'autre source que l'expérience, ne sont-ils donc qu'approchés et provisoires ? Des expériences nouvelles ne pourront-elles un jour nous conduire à les modifier ou même à les abandonner ?	On the other hand, if the principles of mechanics have no source other than experience, are they then only approximate and provisional? Might new experiments not one day lead us to modify them or even abandon them?
3.6.3	Telles sont les questions qui se posent naturellement, et la difficulté de la solution provient principalement de ce que les traités de mécanique ne distinguent pas bien nettement ce qui est expérience, ce qui est raisonnement mathématique, ce qui est convention, ce qui est hypothèse.	Such are the questions that naturally arise, and the difficulty of answering them comes mainly from the fact that treatises on mechanics do not clearly distinguish what is experiment, what is mathematical reasoning, what is convention, and what is hypothesis.
3.6.4	Ce n'est pas tout :	That is not all:
3.6.5	1° Il n'y a pas d'espace absolu et nous ne concevons que des mouvements relatifs ; cependant on énonce le plus souvent les faits mécaniques comme s'il y avait un espace absolu auquel on pourrait les rapporter ;	1. There is no absolute space, and we can conceive only of relative motions; yet mechanical facts are usually stated as though there were an absolute space to which they could be referred;
3.6.6	2° Il n'y a pas de temps absolu ; dire que deux durées sont égales, c'est une assertion qui n'a par elle-même aucun sens et qui n'en peut acquérir un que par convention ;	2. There is no absolute time; to say that two durations are equal is an assertion that has no meaning in itself and can acquire one only by convention;
3.6.7	3° Non seulement nous n'avons pas l'intuition directe de l'égalité de deux durées, mais nous n'avons même pas celle de la simultanéité de deux événements qui se produisent sur des théâtres différents ; c'est ce que j'ai expliqué dans un article intitulé la *Mesure du temps*[1] ;	

FRENCH	ENGLISH
	3. Not only do we have no direct intuition of the equality of two durations, but we do not even have a direct intuition of the simultaneity of two events occurring in different places; this is what I explained in an article entitled *La Mesure du temps*[1];[1]
3	
3.6.8 4° Enfin notre géométrie euclidienne n'est elle-même qu'une sorte de convention de langage ; nous pourrions énoncer les faits mécaniques en les rapportant à un espace non euclidien qui serait un repère moins commode, mais tout aussi légitime que notre espace ordinaire ; l'énoncé deviendrait ainsi beaucoup plus compliqué ; mais il resterait possible.	4. Finally, our Euclidean geometry is itself only a sort of convention of language; we could state mechanical facts by referring them to a non-Euclidean space, which would be a less convenient frame of reference but just as legitimate as our ordinary space; the statement would then become much more complicated, but it would remain possible.
3.6.9 Ainsi l'espace absolu, le temps absolu, la géométrie même ne sont pas des conditions qui s'imposent à la mécanique ; toutes ces choses ne préexistent pas plus à la mécanique que la langue française ne préexiste logiquement aux vérités que l'on exprime en français.	Thus absolute space, absolute time, even geometry itself, are not conditions imposed on mechanics; none of these things pre-exists mechanics, any more than the French language logically pre-exists the truths that are expressed in French.
3.6.10 On pourrait chercher à énoncer les lois fondamentales de la mécanique dans un langage qui serait indépendant de toutes ces conventions ; on se rendrait mieux compte ainsi sans doute de ce que ces lois sont en soi ; c'est ce que M. Andrade a tenté de faire, au moins en partie, dans ses *Leçons de Mécanique physique*.	We might try to state the fundamental laws of mechanics in a language independent of all these conventions; no doubt we would thereby get a better idea of what these laws are in themselves. That is what Andrade has attempted to do, at least in part, in his *Leçons de Mécanique physique*.[4]
3.6.11 L'énoncé de ces lois deviendrait bien entendu beaucoup plus compliqué, puisque toutes ces conventions ont été précisément imaginées pour abréger et simplifier cet énoncé.	The statement of these laws would of course become much more complicated, since all these conventions were devised precisely to shorten and simplify that statement.
3.6.12 Quant à moi, sauf en ce qui concerne l'espace absolu, je laisserai de côté toutes ces difficultés ; non que je les méconnaisse, loin de là ; mais nous en avons suffisamment examinées dans les deux premières parties.	For my part, except as regards absolute space, I shall set all these difficulties aside—not that I fail to recognize them, far from it; but we have examined enough of them in the first two parts.
3.6.13 J'admettrai donc *provisoirement* le temps absolu et la géométrie euclidienne.	I shall therefore *provisionally* accept absolute time and Euclidean geometry.

1 The title means "The Measure of Time."

3

[1] *Revue de Métaphysique et de Morale*, t. VI, p. 1-13 (janvier 1898) ; voir aussi la *Valeur de la Science*, chapitre II

[1] *Revue de Métaphysique et de Morale*, vol. VI, pp. 1–13 (January 1898); see also *La Valeur de la Science*, chapter II[2]

2 *La Valeur de la Science* (*The Value of Science*, 1905) is Poincaré's sequel to this book.

4 Jules Andrade (1857–1933), French mathematician and physicist; the title means "Lessons in Physical Mechanics" (1898).

	FRENCH	ENGLISH
3.6.14	Le Principe d'inertie. — Un corps qui n'est soumis à aucune force ne peut avoir qu'un mouvement rectiligne et uniforme.	The principle of inertia.—A body acted on by no force can have only a rectilinear and uniform motion.
3.6.15	Est-ce là une vérité qui s'impose *à priori* à l'esprit ? S'il en était ainsi, comment les Grecs l'auraient-ils méconnue ? Comment auraient-ils pu croire que le mouvement s'arrête dès que cesse la cause qui lui avait donné naissance ? ou bien encore que tout corps, si rien ne vient le contrarier, prendra un mouvement circulaire, le plus noble de tous les mouvements ?	Is this a truth that imposes itself on the mind *a priori*? If so, how could the Greeks have failed to recognize it? How could they have believed that motion stops as soon as the cause that gave rise to it ceases? Or again, that every body, if nothing interferes with it, will take on a circular motion, the noblest of all motions?
3.6.16	Si l'on dit que la vitesse d'un corps ne peut changer, s'il n'y a pas de raison pour qu'elle change, ne pourrait-on soutenir tout aussi bien que la position de ce corps ne peut changer, ou que la courbure de sa trajectoire ne peut changer, si une cause extérieure ne vient les modifier ?	If we say that the velocity of a body cannot change unless there is a reason for it to change, could we not just as well maintain that the position of this body cannot change, or that the curvature of its path cannot change, unless some external cause comes to modify them?
3.6.17	Le principe d'inertie, qui n'est pas une vérité *à priori*, est-il donc un fait expérimental ? Mais a-t-on jamais expérimenté sur des corps soustraits à l'action de toute force, et si on l'a fait, comment a-t-on su que ces corps n'étaient soumis à aucune force ? On cite ordinairement l'exemple d'une bille roulant un temps très long sur une table de marbre ; mais pourquoi disons-nous qu'elle n'est soumise à aucune force ? Est-ce parce qu'elle est trop éloignée de tous les autres corps pour pouvoir en éprouver aucune action sensible ? Elle n'est pas cependant plus loin de la terre que si on la lançait librement dans l'air ; et chacun sait que dans ce cas elle subirait l'influence de la pesanteur due à l'attraction de la terre.	Is the principle of inertia, then, which is not an *a priori* truth, an experimental fact? But has anyone ever experimented on bodies removed from the action of every force? And if so, how did they know that these bodies were subject to no force? The usual example cited is that of a ball rolling for a very long time on a marble table; but why do we say that it is subject to no force? Is it because it is too far from all other bodies to experience any appreciable action from them? Yet it is no farther from the earth than if it were thrown freely into the air; and everyone knows that in that case it would be subject to the influence of gravity, which is due to the attraction of the earth.
3.6.18	Les professeurs de mécanique ont l'usage de passer rapidement sur l'exemple de la bille ; mais ils ajoutent que le principe d'inertie est vérifié indirectement par ses conséquences. Ils s'expriment mal ; ils veulent dire évidemment que l'on peut vérifier diverses conséquences d'un principe plus général, dont celui de l'inertie n'est qu'un cas particulier.	Teachers of mechanics usually pass quickly over the example of the ball; but they add that the principle of inertia is verified indirectly by its consequences. They express themselves badly; what they obviously mean is that we can verify various consequences of a more general principle, of which the principle of inertia is only a special case.
3.6.19	Je proposerai pour ce principe général l'énoncé suivant :	For this general principle I would propose the following statement:
3.6.20	L'accélération d'un corps ne dépend que de la position de ce corps et des corps voisins et de leurs vitesses.	The acceleration of a body depends only on the position of this body and of the neighboring bodies, and on their velocities.

	FRENCH	ENGLISH
3.6.21	Les mathématiciens diraient que les mouvements de toutes les molécules matérielles de l'univers dépendent d'équations différentielles du second ordre.	Mathematicians would say that the motions of all the material molecules of the universe depend on differential equations of the second order.
3.6.22	Pour faire comprendre que c'est bien là la généralisation naturelle de la loi d'inertie, je demanderai qu'on me permette une fiction. La loi d'inertie, je l'ai dit plus haut, ne s'impose pas à nous *à priori* ; d'autres lois seraient, tout aussi bien qu'elle, compatibles avec le principe de raison suffisante. Si un corps n'est soumis à aucune force, au lieu de supposer que sa vitesse ne change pas, on pourrait supposer que c'est sa position, ou encore son accélération qui ne doit pas changer.	To show that this really is the natural generalization of the law of inertia, I shall ask leave to use a fiction. The law of inertia, as I said above, does not impose itself on us *a priori*; other laws would be just as compatible as it is with the principle of sufficient reason. If a body is subject to no force, instead of supposing that its velocity does not change, we might suppose that it is its position, or else its acceleration, that must not change.[5]
3.6.23	Eh bien, imaginons pour un instant que l'une de ces deux lois hypothétiques soit celle de la nature et remplace notre loi d'inertie. Quelle en serait la généralisation naturelle ? Une minute de réflexion nous le fera voir.	Well then, let us imagine for a moment that one of these two hypothetical laws is the law of nature and replaces our law of inertia. What would its natural generalization be? A minute's reflection will show us.
3.6.24	Dans le premier cas, on devrait supposer que la vitesse d'un corps ne dépend que de sa position et de celle des corps voisins ; dans le second cas, que la variation de l'accélération d'un corps ne dépend que de la position de ce corps et des corps voisins, de leurs vitesses et de leurs accélérations.	In the first case, we would have to suppose that the velocity of a body depends only on its position and on that of the neighboring bodies; in the second case, that the variation of the acceleration of a body depends only on the position of this body and of the neighboring bodies, on their velocities, and on their accelerations.
3.6.25	Ou bien, pour parler le langage mathématique, les équations différentielles du mouvement seraient du premier ordre dans le premier cas, et du troisième ordre dans le deuxième cas.	Or, to speak the language of mathematics, the differential equations of motion would be of the first order in the first case and of the third order in the second.
3.6.26	Modifions un peu notre fiction. Je suppose un monde analogue à notre système solaire, mais où, par un singulier hasard, les orbites de toutes les planètes soient sans excentricité et sans inclinaison. Je suppose de plus que les masses de ces planètes soient trop faibles pour que leurs perturbations mutuelles soient sensibles. Les astronomes qui habiteraient l'une de ces planètes ne manqueraient pas de conclure que l'orbite d'un astre ne peut être que circulaire et parallèle à un certain plan ; la position d'un astre à un instant donné suffirait alors pour déterminer sa vitesse et toute sa trajectoire. La loi d'inertie qu'ils adopteraient serait la première des deux lois hypothétiques dont je viens de parler.	Let us modify our fiction a little. Suppose a world similar to our solar system, but in which, by a strange chance, the orbits of all the planets have neither eccentricity nor inclination. Suppose further that the masses of these planets are too small for their mutual perturbations to be appreciable. Astronomers living on one of these planets would not fail to conclude that the orbit of a heavenly body can only be circular and parallel to a certain plane; the position of a body at a given instant would then be enough to determine its velocity and its whole path. The law of inertia they would adopt would be the first of the two hypothetical laws I have just mentioned.
3.6.27		

5 The principle of sufficient reason, classically formulated by Leibniz, holds that nothing is or happens without a reason why it is so and not otherwise.

	FRENCH	ENGLISH
	Imaginons maintenant que ce système vienne un jour à être traversé avec une grande vitesse par un corps de grande masse, venu de constellations lointaines. Toutes les orbites seront profondément troublées. Nos astronomes ne seraient pas encore trop étonnés ; ils devineraient bien que cet astre nouveau est seul coupable de tout le mal. Mais, diraient-ils, quand il se sera éloigné, l'ordre se rétablira de lui-même ; sans aucun doute les distances des planètes au soleil ne redeviendront pas ce qu'elles étaient avant le cataclysme, mais quand l'astre perturbateur ne sera plus là, les orbites redeviendront circulaires.	Now let us imagine that one day this system is crossed at great speed by a body of great mass, coming from distant constellations. All the orbits will be profoundly disturbed. Our astronomers would not yet be too astonished; they would readily guess that this new heavenly body alone was to blame for all the damage. But, they would say, once it has moved away, order will restore itself. No doubt the distances of the planets from the sun will not return to what they were before the cataclysm, but once the disturbing body is gone, the orbits will become circular again.
3.6.28	Ce serait seulement quand le corps troublant serait loin et quand cependant les orbites, au lieu de redevenir circulaires, deviendraient elliptiques, ce serait alors seulement que ces astronomes s'apercevraient de leur erreur et de la nécessité de refaire toute leur mécanique.	Only when the disturbing body was far away, and the orbits, instead of becoming circular again, became elliptical—only then would these astronomers notice their error and see that they had to rebuild their whole mechanics.
3.6.29	J'ai un peu insisté sur ces hypothèses ; car il me semble qu'on ne peut bien comprendre ce que c'est que notre loi d'inertie généralisée, qu'en l'opposant à une hypothèse contraire.	I have dwelt a little on these hypotheses, because it seems to me that one cannot properly understand what our generalized law of inertia is except by contrasting it with a contrary hypothesis.
3.6.30	Eh bien maintenant, cette loi d'inertie généralisée, a-t-elle été vérifiée par l'expérience et peut-elle l'être ? Quand Newton a écrit les *Principes*, il regardait bien cette vérité comme acquise et démontrée expérimentalement. Elle l'était à ses yeux, non seulement par l'idole anthropomorphique dont nous reparlerons, mais par les travaux de Galilée. Elle l'était aussi par les lois de Képler elles-mêmes ; d'après ces lois, en effet, la trajectoire d'une planète est entièrement déterminée par sa position et par sa vitesse initiales ; c'est bien là ce qu'exige notre principe d'inertie généralisé.	Well, now: has this generalized law of inertia been verified by experiment, and can it be? When Newton wrote the *Principia*, he certainly regarded this truth as established and experimentally demonstrated. In his eyes it was so, not only through the anthropomorphic idol of which we shall speak again, but through the work of Galileo. It was so also through Kepler's laws themselves. According to these laws, the path of a planet is entirely determined by its initial position and its initial velocity, and that is exactly what our generalized principle of inertia requires.[6]
3.6.31	Pour que ce principe ne fût vrai qu'en apparence, pour qu'on pût craindre d'avoir un jour à le remplacer par un des principes analogues que je lui opposais tout à l'heure, il faudrait que nous eussions été trompés par quelque surprenant hasard, comme celui qui, dans la fiction que je développais plus haut, avait induit en erreur nos astronomes imaginaires.	Suppose this principle were true only in appearance, so that we might fear having one day to replace it with one of the analogous principles I set against it a moment ago. For that, we would have to have been deceived by some astonishing stroke of chance, like the one that, in the fiction I developed above, misled our imaginary astronomers.
3.6.32	Une pareille hypothèse est trop invraisemblable pour que l'on s'y arrête. Personne ne croira qu'il puisse y avoir de tels hasards ; sans doute la probabilité pour que deux	Such a hypothesis is too improbable to dwell on. No one will believe that such chances can occur. No doubt the probability that two eccentricities

6 Poincaré borrows the term "idols," for habitual errors of the mind, from Francis Bacon (1561–1626), the English philosopher of experimental method. The anthropomorphic view of force is discussed later in this chapter.

	FRENCH	ENGLISH
	excentricités soient précisément toutes deux nulles, aux erreurs près d'observation, n'est pas plus petite que la probabilité pour que l'une soit précisément égale à 0,1 par exemple et l'autre à 0,2 aux erreurs près d'observation. La probabilité d'un événement simple n'est pas plus petite que celle d'un événement compliqué ; et pourtant si le premier se produit, nous ne voudrons pas croire que la nature ait fait exprès de nous tromper. L'hypothèse d'une erreur de ce genre étant écartée, on peut donc admettre qu'en ce qui concerne l'astronomie, notre loi a été vérifiée par l'expérience.	should both be exactly zero, within the errors of observation, is no smaller than the probability that one should be exactly 0.1, say, and the other 0.2, within the errors of observation. The probability of a simple event is no smaller than that of a complicated one. And yet, if the simple event occurs, we shall refuse to believe that nature has deliberately set out to deceive us. Once the hypothesis of an error of this kind is set aside, we may therefore admit that, as far as astronomy is concerned, our law has been verified by experiment.
3.6.33	Mais l'astronomie n'est pas la physique tout entière.	But astronomy is not the whole of physics.
3.6.34	Ne pourrait-on craindre que quelque expérience nouvelle ne vînt un jour mettre la loi en défaut dans quelque canton de la Physique ? Une loi expérimentale est toujours soumise à la révision ; on doit toujours s'attendre à la voir remplacée par une autre loi plus précise.	Might we not fear that some new experiment will one day show the law to fail in some corner of physics? An experimental law is always subject to revision; we must always expect to see it replaced by another, more precise law.
3.6.35	Personne cependant ne redoute sérieusement que celle dont nous parlons doive être jamais abandonnée ou amendée. Pourquoi ? Précisément parce qu'on ne pourra jamais la soumettre à une épreuve décisive.	Yet no one seriously fears that the law we are discussing will ever have to be abandoned or amended. Why? Precisely because it can never be put to a decisive test.
3.6.36	Tout d'abord, pour que cette épreuve fût complète, il faudrait qu'après un certain temps tous les corps de l'univers reviennent à leurs positions initiales avec leurs vitesses initiales. On verrait alors si, à partir de ce moment, ils reprennent les trajectoires qu'ils ont déjà suivies une fois.	To begin with, for this test to be complete, all the bodies in the universe would have to return after a certain time to their initial positions with their initial velocities. We would then see whether, from that moment on, they resumed the paths they had already followed once.
3.6.37	Mais cette épreuve est impossible, on ne peut la faire que partiellement, et, si bien qu'on la fasse, il y aura toujours quelques corps qui ne reviendront pas à leur position initiale ; ainsi toute dérogation à la loi trouvera facilement son explication.	But this test is impossible. It can be carried out only in part, and however well it is carried out, there will always be some bodies that do not return to their initial position. So any departure from the law will easily find its explanation.
3.6.38	Ce n'est pas tout : en Astronomie, nous *voyons* les corps dont nous étudions les mouvements, et nous admettons le plus souvent qu'ils ne subissent pas l'action d'autres corps invisibles. Dans ces conditions, il faut bien que notre loi se vérifie ou ne se vérifie pas.	That is not all. In astronomy we *see* the bodies whose motions we study, and we generally assume that they are not acted on by other, invisible bodies. Under these conditions our law must either be verified or not.
3.6.39	Mais en Physique, il n'en est pas de même : si les phénomènes physiques sont dus à des mouvements, c'est aux mouvements de molécules que nous ne voyons pas. Si alors l'accélération d'un des corps que nous voyons nous paraît dépendre d'*autre chose* que des positions ou des vitesses des autres corps visibles ou des molécules invisibles dont nous avons été amenés antérieurement à	But in physics it is otherwise. If physical phenomena are due to motions, they are the motions of molecules we do not see. Suppose, then, that the acceleration of one of the bodies we see appears to depend on *something else* besides the positions or velocities of the other visible bodies, or of the invisible molecules whose existence we were previ-

	FRENCH	ENGLISH
	admettre l'existence, rien ne nous empêchera de supposer que cette *autre chose* est la position ou la vitesse d'autres molécules dont nous n'avions pas jusque-là soupçonné la présence. La loi se trouvera sauvegardée.	ously led to admit. Nothing will prevent us from supposing that this *something else* is the position or velocity of other molecules whose presence we had not suspected until then. The law will be safeguarded.
3.6.40	Qu'on me permette d'employer un instant le langage mathématique pour exprimer la même pensée sous une autre forme. Je suppose que nous observions n molécules et que nous constations que leurs $3n$ coordonnées satisfont à un système de $3n$ équations différentielles du quatrième ordre (et non du deuxième ordre, comme l'exigerait la loi d'inertie). Nous savons qu'en introduisant $3n$ variables auxiliaires, un système de $3n$ équations du quatrième ordre peut être ramené à un système de $6n$ équations de deuxième ordre. Si alors nous supposons que ces $3n$ variables auxiliaires représentent les coordonnées de n molécules invisibles, le résultat est de nouveau conforme à la loi d'inertie.	Let me use mathematical language for a moment to express the same thought in another form. Suppose we observe n molecules and find that their $3n$ coordinates satisfy a system of $3n$ differential equations of the fourth order (and not of the second order, as the law of inertia would require). We know that, by introducing $3n$ auxiliary variables, a system of $3n$ equations of the fourth order can be reduced to a system of $6n$ equations of the second order. If we then suppose that these $3n$ auxiliary variables represent the coordinates of n invisible molecules, the result once again agrees with the law of inertia.
3.6.41	En résumé, cette loi, vérifiée expérimentalement dans quelques cas particuliers, peut être étendue sans crainte aux cas les plus généraux, parce que nous savons que dans ces cas généraux l'expérience ne peut plus ni la confirmer, ni la contredire.	To sum up: this law has been verified experimentally in a few particular cases. It can safely be extended to the most general cases, because we know that in these general cases experiment can no longer either confirm it or contradict it.

THE LAW OF ACCELERATION

Force and mass cannot be measured independently, so the law of acceleration turns into a definition.

	FRENCH	ENGLISH
3.6.42	La loi de l'accélération. — L'accélération d'un corps est égale à la force qui agit sur lui divisée par sa masse.	The law of acceleration.—The acceleration of a body is equal to the force acting on it divided by its mass.
3.6.43	Cette loi peut-elle être vérifiée par l'expérience ? Pour cela, il faudrait mesurer les trois grandeurs qui figurent dans l'énoncé : accélération, force et masse.	Can this law be verified by experiment? To do so, we would have to measure the three magnitudes that appear in its statement: acceleration, force and mass.
3.6.44	J'admets qu'on puisse mesurer l'accélération, parce que je passe sur la difficulté provenant de la mesure du temps. Mais comment mesurer la force, ou la masse ? Nous ne savons même pas ce que c'est.	I grant that acceleration can be measured, because I am passing over the difficulty that arises from the measurement of time. But how are we to measure force, or mass? We do not even know what they are.
3.6.45	Qu'est-ce que la *masse ?* C'est, répond Newton, le produit du volume par la densité. — Il vaudrait mieux dire, répondent Thomson et Tait, que la densité est le quotient de la masse par le volume.	What is *mass?* It is, Newton replies, the product of volume and density.—It would be better to say, reply Thomson and Tait, that density is the quotient of mass by volume.[7]

	FRENCH	ENGLISH
3.6.46	— Qu'est-ce que la *force* ? C'est, répond Lagrange, une cause qui produit le mouvement d'un corps ou qui tend à le reproduire. — C'est, dira Kirchhoff, le produit de la masse par l'*accélération*. Mais alors, pourquoi ne pas dire que la masse est le quotient de la force par l'accélération ?	—What is *force*? It is, Lagrange replies, a cause that produces the motion of a body or tends to produce it.—It is, Kirchhoff will say, the product of mass and *acceleration*. But then why not say that mass is the quotient of force by acceleration?[8]
3.6.47	Ces difficultés sont inextricables.	These difficulties are inextricable.
3.6.48	Quand on dit que la force est la cause d'un mouvement, on fait de la métaphysique, et cette définition, si on devait s'en contenter, serait absolument stérile. Pour qu'une définition puisse servir à quelque chose, il faut qu'elle nous apprenne à *mesurer* la force ; cela suffit d'ailleurs, il n'est nullement nécessaire qu'elle nous apprenne ce que c'est que la force *en soi*, ni si elle est la cause ou l'effet du mouvement.	When we say that force is the cause of a motion, we are doing metaphysics, and this definition, if we had to be content with it, would be utterly sterile. For a definition to be of any use, it must teach us to *measure* force. That is enough, moreover: it is not at all necessary for it to teach us what force is *in itself*, or whether it is the cause or the effect of motion.
3.6.49	Il faut donc définir d'abord l'égalité de deux forces. Quand dira-t-on que deux forces sont égales ? C'est, répondra-t-on, quand, appliquées à une même masse, elles lui impriment une même accélération, ou quand, opposées directement l'une à l'autre, elles se font équilibre. Cette définition n'est qu'un trompe-l'œil. On ne peut pas décrocher une force appliquée à un corps pour l'accrocher à un autre corps, comme on décroche une locomotive pour l'atteler à un autre train. Il est donc impossible de savoir quelle accélération telle force, appliquée à tel corps, imprimerait à tel autre corps, *si* elle lui était appliquée. Il est impossible de savoir comment se comporteraient deux forces qui ne sont pas directement opposées, *si* elles étaient directement opposées.	So we must first define the equality of two forces. When shall we say that two forces are equal? When, comes the answer, applied to the same mass, they give it the same acceleration, or when, directly opposed to each other, they balance. This definition is nothing but a trompe-l'œil. We cannot unhook a force applied to one body and hook it onto another, as we unhook a locomotive to couple it to another train. It is therefore impossible to know what acceleration a given force, applied to a given body, would impart to some other body *if* it were applied to that body. It is impossible to know how two forces that are not directly opposed would behave *if* they were directly opposed.
3.6.50	C'est cette définition que l'on cherche à matérialiser, pour ainsi dire, quand on mesure une force avec un dynamomètre, ou en l'équilibrant par un poids. Deux forces F et F′, que je supposerai verticales et dirigées de bas en haut pour simplifier, sont respectivement appliquées à deux corps C et C′ ; je suspends un même corps pesant P d'abord au corps C, puis au corps C′ ; si l'équilibre a lieu dans les deux cas, je conclurai que les deux forces F et F′ sont égales entre elles, puisqu'elles sont égales toutes deux au poids du corps P.	It is this definition that we try to give material form, so to speak, when we measure a force with a dynamometer, or by balancing it with a weight. Two forces F and F′, which for simplicity I shall suppose vertical and directed upward, are applied respectively to two bodies C and C′. I hang the same heavy body P first from body C, then from body C′. If there is equilibrium in both cases, I shall conclude that the two forces F and F′ are equal to each other, since both are equal to the weight of body P.
3.6.51	Mais suis-je sûr que le corps P a conservé le même poids quand je l'ai transporté du premier corps au second ?	But am I sure that body P kept the same weight when I carried it from the first body to the second?

7 William Thomson (Lord Kelvin, 1824–1907) and Peter Guthrie Tait (1831–1901), British physicists, authors of the *Treatise on Natural Philosophy* (1867).
8 Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), mathematician, author of the *Mécanique analytique*. Gustav Kirchhoff (1824–1887), German physicist, whose lectures on mechanics treat force simply as mass times acceleration.

FRENCH

Loin de là, *je suis sûr du contraire ;* je sais que l'intensité de la pesanteur varie d'un point à un autre, et qu'elle est plus forte, par exemple, au pôle qu'à l'équateur. Sans doute la différence est très faible et, dans la pratique, je n'en tiendrai pas compte, mais une définition bien faite devrait avoir une rigueur mathématique ; cette rigueur n'existe pas. Ce que je dis du poids s'appliquerait évidemment à la force du ressort d'un dynamomètre, que la température et une foule de circonstances peuvent faire varier.

3.6.52 Ce n'est pas tout : on ne peut pas dire que le poids du corps P soit appliqué au corps C et équilibre directement la force F. Ce qui est appliqué au corps C, c'est l'action A du corps P sur le corps C ; le corps P est soumis de son côté, d'une part à son poids, d'autre part à la réaction R du corps C sur P. En définitive, la force F est égale à la force A, parce qu'elle lui fait équilibre ; la force A est égale à R, en vertu du principe de l'égalité de l'action et de la réaction ; enfin, la force R est égale au poids de P, parce qu'elle lui fait équilibre.

C'est de ces trois égalités que nous déduisons comme conséquence l'égalité de F et du poids de P.

3.6.53 Nous sommes donc obligés de faire intervenir dans la définition de l'égalité de deux forces, le principe même de l'égalité de l'action et de la réaction ; *à ce compte, ce principe ne devrait plus être regardé comme une loi expérimentale, mais comme une définition.*

3.6.54 Nous voici donc, pour reconnaître l'égalité de deux forces, en possession de deux règles : égalité de deux forces qui se font équilibre ; égalité de l'action et de la réaction. Mais, nous l'avons vu plus haut, ces deux règles sont insuffisantes ; nous sommes obligés de recourir à une troisième règle et d'admettre que certaines forces comme, par exemple, le poids d'un corps, sont constantes en grandeur et en direction. Mais cette troisième règle, je l'ai dit, est une loi expérimentale ; elle n'est qu'approximativement vraie ; *elle est une mauvaise définition.*

3.6.55 Nous sommes donc ramenés à la définition de Kirchhoff : *la force est égale à la masse multipliée par l'accélération.* Cette « loi de Newton » cesse à son tour d'être regardée comme une loi expérimentale, elle n'est plus qu'une définition. Mais cette définition est encore insuffisante, puisque nous ne savons pas ce que c'est que la masse. Elle nous permet sans doute de calculer le rapport de deux forces

ENGLISH

Far from it: *I am sure of the contrary;* I know that the intensity of gravity varies from one place to another, and that it is stronger, for example, at the pole than at the equator. No doubt the difference is very small, and in practice I shall not take it into account. But a well-made definition ought to have mathematical rigor, and that rigor does not exist. What I say of weight would obviously apply to the force of the spring of a dynamometer, which temperature and a host of other circumstances can cause to vary.

That is not all: we cannot say that the weight of body P is applied to body C and directly balances force F. What is applied to body C is the action A of body P on body C. Body P, for its part, is subject on the one hand to its own weight, and on the other to the reaction R of body C on P. In the end, force F is equal to force A because it balances it; force A is equal to R by virtue of the principle of the equality of action and reaction; finally, force R is equal to the weight of P because it balances it.

It is from these three equalities that we deduce, as a consequence, the equality of F and the weight of P.

So we are obliged to bring the very principle of the equality of action and reaction into the definition of the equality of two forces; *on this reckoning, that principle should no longer be regarded as an experimental law, but as a definition.*

Here we are, then, with two rules for recognizing the equality of two forces: the equality of two forces that balance each other, and the equality of action and reaction. But, as we saw above, these two rules are insufficient. We are obliged to resort to a third rule and to assume that certain forces—the weight of a body, for example—are constant in magnitude and direction. But this third rule, as I have said, is an experimental law; it is only approximately true; *it is a bad definition.*

We are thus brought back to Kirchhoff's definition: *force is equal to mass multiplied by acceleration.* This "law of Newton" in its turn ceases to be regarded as an experimental law; it is now no more than a definition. But this definition is still insufficient, since we do not know what mass is. No doubt it allows us to calculate the ratio of two forces applied

	FRENCH	ENGLISH
	appliquées à un même corps à des instants différents ; elle ne nous apprend rien sur le rapport de deux forces appliquées à deux corps différents.	to the same body at different instants; it tells us nothing about the ratio of two forces applied to two different bodies.
3.6.56	Pour la compléter, il faut de nouveau recourir à la troisième loi de Newton (égalité de l'action et de la réaction), regardée encore, non comme une loi expérimentale, mais comme une définition. Deux corps A et B agissent l'un sur l'autre ; l'accélération de A multipliée par la masse de A est égale à l'action de B sur A ; de même, le produit de l'accélération de B par sa masse est égal à la réaction de A sur B. Comme, par définition, l'action est égale à la réaction, les masses de A et de B sont en raison inverse des accélérations de ces deux corps. Voilà le rapport de ces deux masses défini et c'est à l'expérience à vérifier que ce rapport est constant.	To complete it, we must again resort to Newton's third law (the equality of action and reaction), regarded once more not as an experimental law but as a definition. Two bodies A and B act on each other. The acceleration of A multiplied by the mass of A is equal to the action of B on A; likewise, the product of the acceleration of B by its mass is equal to the reaction of A on B. Since, by definition, action is equal to reaction, the masses of A and B are in inverse ratio to the accelerations of the two bodies. There we have the ratio of the two masses defined, and it is for experiment to verify that this ratio is constant.
3.6.57	Cela serait très bien si les deux corps A et B étaient seuls en présence et soustraits à l'action du reste du monde. Il n'en est rien ; l'accélération de A n'est pas due seulement à l'action de B, mais à celle d'une foule d'autres corps C, D... Pour appliquer la règle précédente, il faut donc décomposer l'accélération de A en plusieurs composantes, et discerner quelle est celle de ces composantes qui est due à l'action de B.	That would be all very well if the two bodies A and B were alone together and removed from the action of the rest of the world. They are nothing of the sort. The acceleration of A is due not only to the action of B but to that of a host of other bodies C, D... To apply the preceding rule, we must therefore resolve the acceleration of A into several components and discern which of these components is due to the action of B.
3.6.58	Cette décomposition serait encore possible, si nous *admettions* que l'action de C sur A s'ajoute simplement à celle de B sur A, sans que la présence du corps C modifie l'action de B sur A, ou que la présence de B modifie l'action de C sur A ; si nous admettions, par conséquent, que deux corps quelconques s'attirent, que leur action mutuelle est dirigée suivant la droite qui les joint et ne dépend que de leur distance ; si nous admettions, en un mot, l'*hypothèse des forces centrales*.	This resolution would still be possible if we *assumed* that the action of C on A simply adds to that of B on A, without the presence of body C modifying the action of B on A, or the presence of B modifying the action of C on A. We would have to assume, therefore, that any two bodies attract each other, that their mutual action is directed along the straight line joining them and depends only on their distance—in a word, we would have to assume the *hypothesis of central forces*.
3.6.59	On sait que, pour déterminer les masses des corps célestes, on se sert d'un principe tout différent. La loi de la gravitation nous apprend que l'attraction de deux corps est proportionnelle à leurs masses ; si r est leur distance, m et m' leurs masses, k une constante, leur attraction sera kmm'/r^2.	As is well known, a quite different principle is used to determine the masses of the heavenly bodies. The law of gravitation tells us that the attraction of two bodies is proportional to their masses; if r is their distance, m and m' their masses, and k a constant, their attraction will be kmm'/r^2.
3.6.60	Ce qu'on mesure alors, ce n'est pas la masse, rapport de la force à l'accélération, c'est la masse attirante ; ce n'est pas l'inertie du corps, c'est son pouvoir attirant.	What is measured in that case is not mass, the ratio of force to acceleration, but attracting mass; not the inertia of the body, but its power of attraction.
3.6.61		

	FRENCH	ENGLISH
	C'est là un procédé indirect, dont l'emploi n'est pas théoriquement indispensable. Il aurait très bien pu se faire que l'attraction fût inversement proportionnelle au carré de la distance, sans être proportionnelle au produit des masses, qu'elle fût égale à : f/r^2, mais sans que l'on eût : $f = kmm'$.	This is an indirect procedure, and its use is not theoretically indispensable. It might very well have been that attraction was inversely proportional to the square of the distance without being proportional to the product of the masses—that it was equal to f/r^2, but without our having $f = kmm'$.
3.6.62	S'il en était ainsi, on pourrait néanmoins, par l'observation des mouvements *relatifs* des corps célestes mesurer les masses de ces corps.	If that were so, we could nevertheless measure the masses of the heavenly bodies by observing their *relative* motions.
3.6.63	Mais avons-nous le droit d'admettre l'hypothèse des forces centrales ? Cette hypothèse est-elle rigoureusement exacte ? Est-il certain qu'elle ne sera jamais contredite par l'expérience ? Qui oserait l'affirmer ? Et si nous devons abandonner cette hypothèse, tout l'édifice si laborieusement élevé s'écroulera.	But have we the right to assume the hypothesis of central forces? Is this hypothesis rigorously exact? Is it certain that it will never be contradicted by experiment? Who would dare to say so? And if we must abandon this hypothesis, the whole edifice so laboriously raised will collapse.
3.6.64	Nous n'avons plus le droit de parler de la composante de l'accélération de A qui est due à l'action de B. Nous n'avons aucun moyen de la discerner de celle qui est due à l'action de C ou d'un autre corps. La règle pour la mesure des masses devient inapplicable.	We no longer have the right to speak of the component of A's acceleration that is due to the action of B. We have no means of distinguishing it from the component due to the action of C or of some other body. The rule for measuring masses becomes inapplicable.
3.6.65	Que reste-t-il alors du principe de l'égalité de l'action et de la réaction ? Si l'hypothèse des forces centrales est rejetée, ce principe doit évidemment s'énoncer ainsi : la résultante géométrique de toutes les forces appliquées aux divers corps d'un système soustrait à toute action extérieure, sera nulle. Ou, en d'autres termes, *le mouvement du centre de gravité de ce système sera rectiligne et uniforme*.	What, then, remains of the principle of the equality of action and reaction? If the hypothesis of central forces is rejected, this principle must obviously be stated as follows: the geometric resultant of all the forces applied to the various bodies of a system removed from all external action will be zero. Or, in other words, *the motion of the center of gravity of this system will be rectilinear and uniform*.
3.6.66	Voilà, semble-t-il, un moyen de définir la masse ; la position du centre de gravité dépend évidemment des valeurs attribuées aux masses ; il faudra disposer de ces valeurs de façon que le mouvement de ce centre de gravité soit rectiligne et uniforme ; cela sera toujours possible si la troisième loi de Newton est vraie, et cela ne sera possible en général que d'une seule manière.	Here, it seems, is a way of defining mass. The position of the center of gravity obviously depends on the values assigned to the masses. We shall have to choose these values so that the motion of this center of gravity is rectilinear and uniform. This will always be possible if Newton's third law is true, and in general it will be possible in only one way.
3.6.67	Mais il n'existe pas de système soustrait à toute action extérieure ; toutes les parties de l'univers subissent plus ou moins fortement l'action de toutes les autres parties. *La loi du mouvement du centre de gravité n'est rigoureusement vraie que si on l'applique à l'univers tout entier*.	But there is no system removed from all external action. Every part of the universe is acted on, more or less strongly, by all the other parts. *The law of the motion of the center of gravity is rigorously true only if it is applied to the universe as a whole*.
3.6.68	Mais alors il faudrait, pour en tirer les valeurs des masses, observer le mouvement du centre de gravité de l'Univers. L'absurdité de cette conséquence est	But then, to derive the values of the masses from it, we would have to observe the motion of the center of gravity of the universe. The absurdity of

	FRENCH	ENGLISH
	manifeste ; nous ne connaissons que des mouvements relatifs ; le mouvement du centre de gravité de l'univers restera pour nous une éternelle inconnue.	this consequence is plain. We know only relative motions; the motion of the center of gravity of the universe will remain forever unknown to us.
3.6.69	Il ne reste donc rien et nos efforts ont été infructueux ; nous sommes acculés à la définition suivante, qui n'est qu'un aveu d'impuissance : *les masses sont des coefficients qu'il est commode d'introduire dans les calculs*.	So nothing remains, and our efforts have been fruitless. We are driven to the following definition, which is merely an admission of helplessness: *masses are coefficients that it is convenient to introduce into calculations*.
3.6.70	Nous pourrions refaire toute la mécanique en attribuant à toutes les masses des valeurs différentes. Cette mécanique nouvelle ne serait en contradiction ni avec l'expérience, ni avec les principes généraux de la dynamique (principe de l'inertie, proportionnalité des forces aux masses et aux accélérations, égalité de l'action et de la réaction, mouvement rectiligne et uniforme du centre de gravité, principe des aires).	We could rebuild the whole of mechanics by giving all the masses different values. This new mechanics would contradict neither experiment nor the general principles of dynamics (the principle of inertia, the proportionality of forces to masses and accelerations, the equality of action and reaction, the rectilinear and uniform motion of the center of gravity, the principle of areas).[9]
3.6.71	Seulement les équations de cette mécanique nouvelle seraient *moins simples*. Entendons-nous bien : ce seraient seulement les premiers termes qui seraient moins simples, c'est-à-dire ceux que l'expérience nous a déjà fait connaître ; peut-être pourrait-on altérer les masses de petites quantités sans que les équations *complètes* gagnent ou perdent en simplicité.	Only, the equations of this new mechanics would be *less simple*. Let us be clear: only the first terms would be less simple, that is, the terms that experiment has already made known to us. Perhaps the masses could be altered by small amounts without the *complete* equations gaining or losing in simplicity.
3.6.72	Hertz s'est demandé si les principes de la mécanique sont rigoureusement vrais. « Dans l'opinion de beaucoup de physiciens, dit-il, il apparaîtra comme inconcevable que l'expérience la plus éloignée puisse jamais changer quelque chose aux inébranlables principes de la mécanique ; et cependant ce qui sort de l'expérience peut toujours être rectifié par l'expérience. »	Hertz has asked whether the principles of mechanics are rigorously true. "In the opinion of many physicists," he says, "it will seem inconceivable that the remotest experience could ever change anything in the unshakable principles of mechanics; and yet what comes from experience can always be corrected by experience."[10]
3.6.73	Après ce que nous venons de dire, ces craintes paraîtront superflues. Les principes de la dynamique nous apparaissaient d'abord comme des vérités expérimentales ; mais nous avons été obligés de nous en servir comme définitions. C'est *par définition* que la force est égale au produit de la masse par l'accélération ; voilà un principe qui est désormais placé hors de l'atteinte d'aucune expérience ultérieure. C'est de même par définition que l'action est égale à la réaction.	After what we have just said, these fears will seem needless. The principles of dynamics at first appeared to us as experimental truths, but we have been obliged to use them as definitions. It is *by definition* that force is equal to the product of mass and acceleration; here is a principle that is henceforth placed beyond the reach of any future experiment. In the same way, it is by definition that action is equal to reaction.
3.6.74	Mais alors, dira-t-on, ces principes invérifiables sont absolument vides de toute signification ; l'expérience ne peut les contredire ; mais ils ne peuvent rien nous	But then, it will be said, these unverifiable principles are utterly devoid of meaning. Experiment cannot contradict them, but they can teach us

9 The principle of areas generalizes Kepler's second law; in modern terms it expresses the conservation of angular momentum.
10 Heinrich Hertz (1857–1894), German physicist who first produced and detected electromagnetic waves. The quotation comes from the introduction to his *Principles of Mechanics* (1894).

	FRENCH	ENGLISH
	apprendre d'utile ; à quoi bon alors étudier la dynamique ?	nothing useful. So what is the point of studying dynamics?
3.6.75	Cette condamnation trop rapide serait injuste. Il n'y a pas, dans la nature, de système *parfaitement* isolé, parfaitement soustrait à toute action extérieure ; mais il y a des systèmes *à peu près* isolés.	This overhasty condemnation would be unjust. There is in nature no *perfectly* isolated system, perfectly removed from all external action; but there are systems that are *approximately* isolated.
3.6.76	Si l'on observe un pareil système, on peut étudier non seulement le mouvement relatif de ses diverses parties l'une par rapport à l'autre, mais le mouvement de son centre de gravité par rapport aux autres parties de l'univers. On constate alors que le mouvement de ce centre de gravité est *à peu près* rectiligne et uniforme, conformément à la troisième loi de Newton.	If we observe such a system, we can study not only the relative motion of its various parts with respect to one another, but also the motion of its center of gravity with respect to the other parts of the universe. We then find that the motion of this center of gravity is *approximately* rectilinear and uniform, in accordance with Newton's third law.
3.6.77	C'est là une vérité expérimentale, mais elle ne pourra être infirmée par l'expérience ; que nous apprendrait en effet une expérience plus précise ? Elle nous apprendrait que la loi n'était qu'à peu près vraie ; mais, cela, nous le savions déjà.	That is an experimental truth, but it cannot be overturned by experiment. For what would a more precise experiment teach us? It would teach us that the law was only approximately true; but that we knew already.
3.6.78	*On s'explique maintenant comment l'expérience a pu servir de base aux principes de la mécanique et cependant ne pourra jamais les contredire.*	*We can now see how experiment could serve as the basis for the principles of mechanics, and yet can never contradict them.*

ANTHROPOMORPHIC MECHANICS

The feeling of effort and Andrade's school of the thread fail to give force a better definition.

	FRENCH	ENGLISH
3.6.79	La Mécanique anthropomorphique. — Kirchhoff, dira-t-on, n'a fait qu'obéir à la tendance générale des mathématiciens au nominalisme ; son habileté de physicien ne l'en a pas préservé. Il a tenu à avoir une définition de la force, et il a pris pour cela la première proposition venue ; mais une définition de la force, nous n'en avons pas besoin : l'idée de force est une notion primitive, irréductible, indéfinissable ; nous savons tous ce que c'est, nous en avons l'intuition directe. Cette intuition directe provient de la notion d'effort, qui nous est familière depuis l'enfance.	Anthropomorphic mechanics.—Kirchhoff, it will be said, merely obeyed the general tendency of mathematicians toward nominalism; his skill as a physicist did not protect him from it. He insisted on having a definition of force, and for that purpose he took the first proposition that came to hand. But we have no need of a definition of force: the idea of force is a primitive notion, irreducible and indefinable. We all know what it is; we have a direct intuition of it. This direct intuition comes from the notion of effort, which has been familiar to us since childhood.
3.6.80	Mais d'abord, quand même cette intuition directe nous ferait connaître la véritable nature de la force en soi, elle serait insuffisante pour fonder la Mécanique ; elle serait d'ailleurs tout à fait inutile. Ce qui importe, ce n'est pas de savoir ce que c'est que la force, c'est de savoir la mesurer.	But, first of all, even if this direct intuition revealed to us the true nature of force in itself, it would not be enough to serve as a foundation for mechanics; and it would, moreover, be entirely useless. What matters is not knowing what force is, but knowing how to measure it.
3.6.81		

	FRENCH	ENGLISH
	Tout ce qui ne nous apprend pas à la mesurer est aussi inutile au mécanicien, que l'est, par exemple, la notion subjective de chaud et de froid au physicien qui étudie la chaleur. Cette notion subjective ne peut se traduire en nombres, donc elle ne sert à rien ; un savant dont la peau serait absolument mauvaise conductrice de la chaleur et qui, par conséquent, n'aurait jamais éprouvé, ni sensations de froid, ni sensations de chaud, pourrait regarder un thermomètre tout aussi bien qu'un autre, et cela lui suffirait pour construire toute la théorie de la chaleur.	Whatever does not teach us to measure it is as useless to the specialist in mechanics as, for example, the subjective notion of hot and cold is to the physicist who studies heat. This subjective notion cannot be translated into numbers, so it serves no purpose. A scientist whose skin was an absolutely poor conductor of heat, and who had therefore never felt either sensations of cold or sensations of heat, could read a thermometer just as well as anyone else, and that would be enough for him to construct the whole theory of heat.
3.6.82	Or cette notion immédiate d'effort ne peut nous servir à mesurer la force ; il est clair, par exemple, que j'éprouverai plus de fatigue en soulevant un poids de cinquante kilos qu'un homme habitué à porter des fardeaux.	Now this immediate notion of effort cannot help us to measure force. It is clear, for example, that I shall feel more fatigue in lifting a weight of fifty kilos than a man accustomed to carrying loads.
3.6.83	Mais il y a plus : cette notion d'effort ne nous fait pas connaître la véritable nature de la force ; elle se réduit en définitive à un souvenir de sensations musculaires, et on ne soutiendra pas que le soleil éprouve une sensation musculaire quand il attire la terre.	But there is more: this notion of effort does not reveal to us the true nature of force. In the end it comes down to a memory of muscular sensations, and no one will maintain that the sun experiences a muscular sensation when it attracts the earth.
3.6.84	Tout ce qu'on peut y chercher, c'est un symbole, moins précis et moins commode que les flèches dont se servent les géomètres, mais tout aussi éloigné de la réalité.	All we can look for in it is a symbol, less precise and less convenient than the arrows that geometers use, but just as remote from reality.
3.6.85	L'anthropomorphisme a joué un rôle historique considérable dans la genèse de la mécanique ; peut-être fournira-t-il encore quelquefois un symbole qui paraîtra commode à quelques esprits ; mais il ne peut rien fonder qui ait un caractère vraiment scientifique, ou un caractère vraiment philosophique.	Anthropomorphism has played a considerable historical role in the genesis of mechanics. Perhaps it will still sometimes supply a symbol that some minds will find convenient; but it can found nothing that has a truly scientific or a truly philosophical character.
3.6.86	« L'École du Fil. » — M. Andrade, dans ses *Leçons de Mécanique physique*, a rajeuni la mécanique anthropomorphique. À l'école de mécaniciens dont fait partie Kirchhoff, il oppose ce qu'il appelle assez bizarrement l'école du fil.	"The school of the thread."—Andrade, in his *Leçons de Mécanique physique*, has given new life to anthropomorphic mechanics. Against the school of theorists of mechanics to which Kirchhoff belongs, he sets what he rather oddly calls the school of the thread.
3.6.87	Cette école cherche à tout ramener à « la considération de certains systèmes matériels de masse négligeable, envisagés à l'état de tension et capables de transmettre des efforts considérables à des corps éloignés, système dont le type idéal est le *fil*. »	This school seeks to reduce everything to "the consideration of certain material systems of negligible mass, regarded in a state of tension and capable of transmitting considerable efforts to distant bodies, systems whose ideal type is the *thread*."
3.6.88	Un fil qui transmet une force quelconque, s'allonge légèrement sous l'action de cette force ; la direction du fil nous fait connaître la direction de la force, dont la grandeur est mesurée par l'allongement du fil.	A thread that transmits any force stretches slightly under the action of that force. The direction of the thread tells us the direction of the force, whose

FRENCH	ENGLISH
	magnitude is measured by the elongation of the thread.
3.6.89 On peut alors concevoir une expérience telle que celle-ci. Un corps A est attaché à un fil ; à l'autre extrémité du fil on fait agir une force quelconque que l'on fait varier jusqu'à ce que le fil prenne un allongement *a*, on note l'accélération du corps A ; on détache A et on attache le corps B au même fil, on fait agir de nouveau la force, ou une autre force, et on la fait varier jusqu'à ce que le fil reprenne l'allongement *a* ; on note l'accélération du corps B. On recommence l'expérience tant avec le corps A qu'avec le corps B, mais de façon que le fil prenne l'allongement β. Les quatre accélérations observées doivent être proportionnelles.	We can then conceive an experiment such as the following. A body A is attached to a thread. At the other end of the thread we apply some force, which we vary until the thread reaches an elongation *a*, and we note the acceleration of body A. We detach A and attach body B to the same thread; we apply the force again, or another force, and vary it until the thread again reaches the elongation *a*; we note the acceleration of body B. We repeat the experiment with both body A and body B, but so that the thread reaches the elongation β. The four accelerations observed must be proportional.
On a ainsi une vérification expérimentale de la loi d'accélération énoncée plus haut.	We thus have an experimental verification of the law of acceleration stated above.
3.6.90 Ou bien encore on soumet un corps à l'action simultanée de plusieurs fils identiques également tendus, et on cherche par l'expérience quelles doivent être les orientations de tous ces fils pour que le corps demeure en équilibre. On a alors une vérification expérimentale de la règle de la composition des forces.	Or again, we subject a body to the simultaneous action of several identical threads under equal tension, and we find by experiment what the orientations of all these threads must be for the body to remain in equilibrium. We then have an experimental verification of the rule for the composition of forces.
3.6.91 Mais, en somme, qu'avons-nous fait ? Nous avons défini la force à laquelle le fil est soumis par la déformation subie par ce fil, ce qui est assez raisonnable ; nous avons admis ensuite que si un corps est attaché à ce fil, l'effort qui lui est transmis par le fil est égal à l'action que ce corps exerce sur ce fil ; en définitive, nous nous sommes servis du principe de l'égalité de l'action et de la réaction, en le considérant, non comme une vérité d'expérience, mais comme la définition même de la force.	But, all things considered, what have we done? We have defined the force to which the thread is subject by the deformation the thread undergoes, which is reasonable enough. We have then assumed that, if a body is attached to this thread, the effort transmitted to it by the thread is equal to the action that this body exerts on the thread. In the end, we have used the principle of the equality of action and reaction, treating it not as a truth of experience but as the very definition of force.
3.6.92 Cette définition est tout aussi conventionnelle que celle de Kirchhoff, mais elle est beaucoup moins générale.	This definition is just as conventional as Kirchhoff's, but it is much less general.
3.6.93 Toutes les forces ne sont pas transmises par des fils (encore faudrait-il pour qu'on pût les comparer qu'elles le fussent toutes par des fils identiques). Si l'on admettait même que la terre est attachée au soleil par quelque fil invisible, du moins conviendrait-on que nous n'avons aucun moyen d'en mesurer l'allongement.	Not all forces are transmitted by threads (and, for them to be compared, they would all have to be transmitted by identical threads). Even if we granted that the earth is tied to the sun by some invisible thread, it would at least be admitted that we have no means of measuring its elongation.
3.6.94 Neuf fois sur dix, par conséquent, notre définition serait en défaut ; on ne pourrait lui attribuer aucune espèce de sens, et il faudrait en revenir à celle de Kirchhoff.	Nine times out of ten, therefore, our definition would fail. We could give it no meaning whatever, and we would have to go back to Kirchhoff's.
3.6.95	

	FRENCH	ENGLISH
	Pourquoi alors prendre ce détour ? Vous admettez une certaine définition de la force qui n'a de sens que dans certains cas particuliers. Dans ces cas vous vérifiez par l'expérience qu'elle conduit à la loi de l'accélération. Autorisés par cette expérience, vous prenez ensuite la loi de l'accélération comme définition de la force dans tous les autres cas.	Why, then, take this detour? You accept a certain definition of force that has meaning only in certain particular cases. In those cases you verify by experiment that it leads to the law of acceleration. On the strength of this experiment, you then take the law of acceleration as the definition of force in all other cases.
3.6.96	Ne serait-il pas plus simple de considérer la loi de l'accélération comme une définition dans tous les cas, et de regarder les expériences en question, non comme des vérifications de cette loi, mais comme des vérifications du principe de réaction, ou comme démontrant que les déformations d'un corps élastique ne dépendent que des forces auxquelles ce corps est soumis ?	Would it not be simpler to regard the law of acceleration as a definition in all cases? We could then regard the experiments in question not as verifications of that law, but as verifications of the principle of reaction, or as demonstrating that the deformations of an elastic body depend only on the forces to which that body is subject.
3.6.97	Sans compter que les conditions dans lesquelles votre définition pourrait être acceptée ne sont jamais remplies qu'imparfaitement, qu'un fil n'est jamais sans masse, qu'il n'est jamais soustrait à toute autre force que la réaction des corps attachés à ses extrémités.	Not to mention that the conditions under which your definition could be accepted are only ever imperfectly fulfilled: a thread is never without mass, and it is never free from every force other than the reaction of the bodies attached to its ends.
3.6.98	Les idées de M. Andrade n'en sont pas moins très intéressantes ; si elles ne satisfont pas notre besoin de logique, elles nous font mieux comprendre la genèse historique des notions mécaniques fondamentales. Les réflexions qu'elles nous suggèrent nous montrent comment l'esprit humain s'est élevé d'un anthropomorphisme naïf aux conceptions actuelles de la science.	Andrade's ideas are none the less very interesting. If they do not satisfy our need for logic, they help us to understand better the historical genesis of the fundamental notions of mechanics. The reflections they suggest show us how the human mind has risen from a naive anthropomorphism to the current conceptions of science.
3.6.99	Nous voyons au point de départ une expérience très particulière et en somme assez grossière ; au point d'arrivée, une loi tout à fait générale, tout à fait précise, et dont nous regardons la certitude comme absolue. Cette certitude, c'est nous qui la lui avons conférée pour ainsi dire librement, en la regardant comme une convention.	At the starting point we see a very particular and, all in all, rather crude experiment; at the end point, a law that is entirely general, entirely precise, and whose certainty we regard as absolute. This certainty is something we ourselves have conferred on it, freely so to speak, by regarding it as a convention.
3.6.100	La loi de l'accélération, la règle de la composition des forces ne sont-elles donc que des conventions arbitraires ? Conventions, oui ; arbitraires, non ; elles le seraient si on perdait de vue les expériences qui ont conduit les fondateurs de la science à les adopter, et qui, si imparfaites qu'elles soient, suffisent pour les justifier. Il est bon que, de temps en temps, on ramène notre attention sur l'origine expérimentale de ces conventions.	Are the law of acceleration and the rule for the composition of forces, then, nothing but arbitrary conventions? Conventions, yes; arbitrary, no. They would be arbitrary if we lost sight of the experiments that led the founders of science to adopt them, and which, imperfect as they may be, are enough to justify them. It is good that our attention should be drawn back from time to time to the experimental origin of these conventions.

CHAPTER VII: RELATIVE AND ABSOLUTE MOTION

Why the principle of relative motion holds for uniform motion but seems to fail for rotation.

	FRENCH	ENGLISH
3.7.1	Le principe du mouvement relatif. — On a quelquefois cherché à rattacher la loi de l'accélération à un principe plus général. Le mouvement d'un système quelconque doit obéir aux mêmes lois, qu'on le rapporte à des axes fixes, ou à des axes mobiles entraînés dans un mouvement rectiligne et uniforme. C'est là le principe du mouvement relatif, qui s'impose à nous pour deux raisons : d'abord, l'expérience la plus vulgaire le confirme, et ensuite l'hypothèse contraire répugnerait singulièrement à l'esprit.	The principle of relative motion.—Attempts have sometimes been made to link the law of acceleration to a more general principle. The motion of any system must obey the same laws whether we refer it to fixed axes or to moving axes carried along in a rectilinear and uniform motion. This is the principle of relative motion, which forces itself on us for two reasons: first, the most commonplace experience confirms it; and second, the contrary hypothesis would be singularly repugnant to the mind.
3.7.2	Admettons-le donc, et considérons un corps soumis à une force ; le mouvement relatif de ce corps, par rapport à un observateur animé d'une vitesse uniforme égale à la vitesse initiale du corps, devra être identique à ce que serait son mouvement absolu s'il partait du repos. On en conclut que son accélération ne doit pas dépendre de sa vitesse absolue, on a même cherché à tirer de là une démonstration de la loi d'accélération.	Let us accept it, then, and consider a body subject to a force. The relative motion of this body, with respect to an observer moving with a uniform velocity equal to the body's initial velocity, must be identical to what its absolute motion would be if it started from rest. From this we conclude that its acceleration cannot depend on its absolute velocity; attempts have even been made to derive from this a proof of the law of acceleration.
3.7.3	Il y a eu longtemps des traces de cette démonstration dans les programmes du baccalauréat ès sciences. Il est évident que cette tentative est vaine. L'obstacle qui nous empêchait de démontrer la loi d'accélération, c'est que nous n'avions pas de définition de la force ; cet obstacle subsiste tout entier, puisque le principe invoqué ne nous a pas fourni la définition qui nous manquait.	For a long time traces of this proof survived in the syllabus for the *baccalauréat ès sciences*. Clearly the attempt is futile. The obstacle that prevented us from proving the law of acceleration was that we had no definition of force. That obstacle remains entirely intact, since the principle invoked has not supplied the definition we lacked.[11]
3.7.4	Le principe du mouvement relatif n'en est pas moins fort intéressant et mérite d'être étudié pour lui-même. Cherchons d'abord à l'énoncer d'une façon précise.	The principle of relative motion is none the less very interesting and deserves to be studied for its own sake. Let us first try to state it precisely.
3.7.5	Nous avons dit plus haut que les accélérations des différents corps qui font partie d'un système isolé ne dépendent que de leurs vitesses et de leurs positions relatives, et non de leurs vitesses et de leurs positions absolues, pourvu que les axes mobiles auxquels le mouvement relatif est rapporté soient entraînés dans un mouvement rectiligne et uniforme. Ou, si l'on aime mieux, leurs accélérations ne dépendent que des différences de leurs vitesses et des différences de leurs coordonnées, et non des valeurs absolues de ces vitesses et de ces coordonnées.	We said above that the accelerations of the various bodies forming part of an isolated system depend only on their relative velocities and positions, and not on their absolute velocities and positions, provided that the moving axes to which the relative motion is referred are carried along in a rectilinear and uniform motion. Or, if you prefer, their accelerations depend only on the differences of their velocities and the differences of their coordinates, and not on the absolute values of these velocities and coordinates.

11 The French school-leaving examination in its science track.

	FRENCH	ENGLISH
3.7.6	Si ce principe est vrai pour les accélérations relatives, ou mieux pour les différences d'accélération, en le combinant avec la loi de la réaction, on en déduira qu'il est vrai encore pour les accélérations absolues.	If this principle is true for relative accelerations, or better, for differences of acceleration, then by combining it with the law of reaction we can deduce that it is also true for absolute accelerations.
3.7.7	Il reste donc à voir comment on peut démontrer que les différences des accélérations ne dépendent que des différences des vitesses et des coordonnées, ou, pour parler le langage mathématique, que ces différences de coordonnées satisfont à des équations différentielles du second ordre.	It remains, then, to see how one can prove that the differences of the accelerations depend only on the differences of the velocities and coordinates—or, in mathematical language, that these differences of coordinates satisfy differential equations of the second order.
3.7.8	Cette démonstration peut-elle être déduite d'expériences ou de considérations *à priori ?*	Can this proof be derived from experiments, or from *a priori* considerations?
3.7.9	En se rappelant ce que nous avons dit plus haut, le lecteur fera de lui-même la réponse.	Remembering what we said above, the reader will supply the answer unaided.
3.7.10	Ainsi énoncé, en effet, le principe du mouvement relatif ressemble singulièrement à ce que j'appelais plus haut le principe de l'inertie généralisé ; ce n'est pas tout à fait la même chose, puisqu'il s'agit des différences de coordonnées et non des coordonnées elles-mêmes. Le nouveau principe nous apprend donc quelque chose de plus que l'ancien, mais la même discussion s'y applique et conduirait aux mêmes conclusions ; il est inutile d'y revenir.	Stated in this way, in fact, the principle of relative motion bears a singular resemblance to what I called above the generalized principle of inertia. It is not quite the same thing, since it concerns differences of coordinates and not the coordinates themselves. The new principle therefore tells us something more than the old one, but the same discussion applies to it and would lead to the same conclusions; there is no need to go back over it.

NEWTON'S ARGUMENT

A cloud-covered planet shows that "the earth rotates" means only that this assumption is more convenient.

	FRENCH	ENGLISH
3.7.11	L'Argument de Newton. — Ici, nous rencontrons une question fort importante et même un peu troublante. J'ai dit que le principe du mouvement relatif n'était pas seulement pour nous un résultat d'expérience, et qu'*à priori* toute hypothèse contraire répugnerait à l'esprit.	Newton's argument.—Here we come upon a very important and even somewhat disturbing question. I said that the principle of relative motion was for us not merely a result of experiment, and that *a priori* any contrary hypothesis would be repugnant to the mind.
3.7.12	Mais alors, pourquoi le principe n'est-il vrai que si le mouvement des axes mobiles est rectiligne et uniforme ? Il semble qu'il devrait s'imposer à nous avec la même force, si ce mouvement est varié ou tout au moins s'il se réduit à une rotation uniforme. Or, dans ces deux cas, le principe n'est pas vrai.	But then why is the principle true only if the motion of the moving axes is rectilinear and uniform? It seems that it ought to force itself on us with the same strength if this motion is variable, or at least if it reduces to a uniform rotation. Yet in these two cases the principle is not true.
3.7.13	Je n'insisterai pas longtemps sur le cas où le mouvement des axes est rectiligne sans être uniforme ; le paradoxe ne résiste pas à un instant d'examen. Si je suis en wagon, et si le train, heurtant un obstacle quelconque, s'arrête brusquement, je serai projeté sur la banquette opposée,	I shall not dwell long on the case where the motion of the axes is rectilinear but not uniform; the paradox does not survive a moment's examination. If I am in a railway carriage and the train strikes some obstacle and stops abruptly, I shall be

	FRENCH	ENGLISH
	bien que je n'aie été soumis directement à aucune force. Il n'y a rien là de mystérieux ; si je n'ai subi l'action d'aucune force extérieure, le train, lui, a éprouvé un choc extérieur. Que le mouvement relatif de deux corps se trouve troublé, dès que le mouvement de l'un ou de l'autre est modifié par une cause extérieure, il ne peut rien y avoir là de paradoxal.	thrown onto the opposite seat, even though I have not been directly subjected to any force. There is nothing mysterious in this. If I have not been acted on by any external force, the train has received an external shock. That the relative motion of two bodies should be disturbed as soon as the motion of one or the other is altered by an external cause —there can be nothing paradoxical in that.
3.7.14	Je m'arrêterai plus longtemps sur le cas des mouvements relatifs rapportés à des axes qui tournent d'une rotation uniforme. Si le ciel était sans cesse couvert de nuages, si nous n'avions aucun moyen d'observer les astres, nous pourrions, néanmoins, conclure que la terre tourne ; nous en serions avertis par son aplatissement, ou bien encore par l'expérience du pendule de Foucault.	I shall dwell longer on the case of relative motions referred to axes rotating uniformly. If the sky were permanently covered with clouds, if we had no means of observing the stars, we could nevertheless conclude that the earth rotates. We would learn it from its flattening, or else from Foucault's pendulum experiment.
3.7.15	Et pourtant, dans ce cas, dire que la terre tourne, cela aurait-il un sens ? S'il n'y a pas d'espace absolu, peut-on tourner sans tourner par rapport à quelque chose, et d'autre part comment pourrions-nous admettre la conclusion de Newton et croire à l'espace absolu ?	And yet, in that case, would saying that the earth rotates have any meaning? If there is no absolute space, can one rotate without rotating relative to something? And on the other hand, how could we accept Newton's conclusion and believe in absolute space?[12]
3.7.16	Mais il ne suffit pas de constater que toutes les solutions possibles nous choquent également ; il faut analyser, pour chacune d'elles, les raisons de notre répugnance, afin de faire notre choix en connaissance de cause. On excusera donc la longue discussion qui va suivre.	But it is not enough to note that all the possible solutions shock us equally. We must analyze, for each of them, the reasons for our repugnance, so that we can make our choice with full knowledge of the case. The long discussion that follows will therefore be excused.
3.7.17	Reprenons notre fiction : d'épais nuages cachent les astres aux hommes, qui ne peuvent les observer et en ignorent même l'existence ; comment ces hommes sauront-ils que la terre tourne ? Plus encore que nos ancêtres sans doute, ils regarderont le sol qui les porte comme fixe et inébranlable ; ils attendront bien plus longtemps l'avènement d'un Copernic. Mais enfin ce Copernic finirait par venir ; comment viendrait-il ?	Let us return to our fiction. Thick clouds hide the stars from human beings, who cannot observe them and are even unaware that they exist. How will these people know that the earth rotates? Even more than our ancestors, no doubt, they will regard the ground beneath them as fixed and unshakable; they will wait much longer for the coming of a Copernicus. But in the end this Copernicus would come at last. How would he come?
3.7.18	Les mécaniciens de ce monde ne se heurteraient pas d'abord à une contradiction absolue. Dans la théorie du mouvement relatif, on envisage, en dehors des forces réelles, deux forces fictives que l'on appelle la force centrifuge ordinaire et la force centrifuge composée. Nos savants imaginaires pourraient donc tout expliquer en regardant ces deux forces comme réelles, et ils ne verraient pas là de contradiction avec le principe de l'inertie généralisé, car ces forces dépendraient, l'une des	The experts in mechanics of that world would not at first run into an absolute contradiction. In the theory of relative motion, one considers, besides the real forces, two fictitious forces called ordinary centrifugal force and compound centrifugal force. Our imaginary scientists could therefore explain everything by regarding these two forces as real. They would see no contradiction in this with

12 In the *Principia* Newton argued, notably with his rotating bucket of water, that rotation reveals the existence of absolute space.

	FRENCH	ENGLISH
	positions relatives des diverses parties du système, comme les attractions réelles, l'autre de leurs vitesses relatives, comme les frottements réels.	the generalized principle of inertia, for these forces would depend, the one on the relative positions of the various parts of the system, like real attractions, the other on their relative velocities, like real frictions.[13]
3.7.19	Bien des difficultés cependant ne tarderaient pas à éveiller leur attention ; s'ils réussissaient à réaliser un système isolé, le centre de gravité de ce système n'aurait pas une trajectoire à peu près rectiligne. Ils pourraient invoquer, pour expliquer ce fait, les forces centrifuges qu'ils regarderaient comme réelles et qu'ils attribueraient sans doute aux actions mutuelles des corps. Seulement ils ne verraient pas ces forces s'annuler aux grandes distances, c'est-à-dire à mesure que l'isolement serait mieux réalisé ; loin de là : la force centrifuge croît indéfiniment avec la distance.	Many difficulties, however, would soon catch their attention. If they succeeded in producing an isolated system, the center of gravity of that system would not follow an approximately straight path. To explain this fact they could invoke the centrifugal forces, which they would regard as real and would no doubt attribute to the mutual actions of bodies. Only, they would not see these forces vanish at great distances—that is, as the isolation became more complete. Far from it: centrifugal force increases without limit with distance.
3.7.20	Cette difficulté leur semblerait déjà assez grande ; et pourtant elle ne les arrêterait pas longtemps : ils imagineraient bientôt quelque milieu très subtil, analogue à notre éther, où tous les corps baigneraient et qui exercerait sur eux une action répulsive.	This difficulty would already seem considerable to them; and yet it would not hold them up for long. They would soon imagine some very subtle medium, analogous to our ether, in which all bodies would be immersed and which would exert a repulsive action on them.
3.7.21	Mais ce n'est pas tout. L'espace est symétrique, et pourtant les lois du mouvement ne présenteraient pas de symétrie ; elles devraient distinguer entre la droite et la gauche. On verrait par exemple que les cyclones tournent toujours dans le même sens, tandis que par raison de symétrie ces météores devraient tourner indifféremment dans un sens et dans l'autre. Si nos savants étaient parvenus à force de travail à rendre leur univers parfaitement symétrique, cette symétrie ne subsisterait pas, bien qu'il n'y ait aucune raison apparente pour qu'elle soit troublée dans un sens plutôt que dans l'autre.	But that is not all. Space is symmetrical, and yet the laws of motion would show no symmetry; they would have to distinguish between right and left. It would be seen, for instance, that cyclones always turn in the same direction, whereas by reason of symmetry these atmospheric phenomena ought to turn in either direction indifferently. Suppose our scientists had succeeded by dint of hard work in making their universe perfectly symmetrical: that symmetry would not last, even though there is no apparent reason why it should be disturbed in one direction rather than the other.
3.7.22	Ils s'en tireraient sans aucun doute, ils inventeraient quelque chose qui ne serait pas plus extraordinaire que les sphères de verre de Ptolémée, et on irait ainsi, accumulant les complications, jusqu'à ce que le Copernic attendu les balaye toutes d'un seul coup, en disant : Il est bien plus simple d'admettre que la terre tourne.	No doubt they would find a way out. They would invent something no more extraordinary than Ptolemy's glass spheres, and so things would go on, complications piling up, until the long-awaited Copernicus swept them all away at one stroke, saying: It is much simpler to assume that the earth rotates.
3.7.23	Et de même que notre Copernic à nous nous a dit : il est plus commode de supposer que la terre tourne, parce qu'on exprime ainsi les lois de l'astronomie dans un	And just as our own Copernicus told us: it is more convenient to suppose that the earth rotates, because the laws of astronomy are thereby ex-

13 Compound centrifugal force is what is now called the Coriolis force.

	FRENCH	ENGLISH
	langage bien plus simple ; celui-là dirait : Il est plus commode de supposer que la terre tourne, parce qu'on exprime ainsi les lois de la mécanique dans un langage bien plus simple.	pressed in a much simpler language, so theirs would say: It is more convenient to suppose that the earth rotates, because the laws of mechanics are thereby expressed in a much simpler language.
3.7.24	Cela n'empêche pas que l'espace absolu, c'est-à-dire le repère auquel il faudrait rapporter la terre pour savoir si réellement elle tourne, n'a aucune existence objective. Dès lors, cette affirmation : « la terre tourne », n'a aucun sens, puisqu'aucune expérience ne permettra de la vérifier ; puisqu'une telle expérience, non seulement ne pourrait être ni réalisée, ni rêvée par le Jules Verne le plus hardi, mais ne peut être conçue sans contradiction ; ou plutôt ces deux propositions : « la terre tourne », et : « il est plus commode de supposer que la terre tourne », ont un seul et même sens ; il n'y a rien de plus dans l'une que dans l'autre.	That does not alter the fact that absolute space—that is, the frame of reference to which the earth would have to be referred in order to know whether it really rotates—has no objective existence. Hence the assertion "the earth rotates" has no meaning, since no experiment will make it possible to verify it. Such an experiment not only could not be carried out, or even dreamed of by the boldest Jules Verne, but cannot be conceived without contradiction. Or rather, these two propositions, "the earth rotates" and "it is more convenient to suppose that the earth rotates," have one and the same meaning; there is nothing more in the one than in the other.
3.7.25	Peut-être ne se contentera-t-on pas encore de cela, et trouvera-t-on déjà choquant que, parmi toutes les hypothèses ou plutôt toutes les conventions que nous pouvons faire à ce sujet, il y en ait une qui soit plus commode que les autres.	Perhaps people will still not be content with this, and will already find it shocking that, among all the hypotheses, or rather all the conventions, that we can make on this subject, there should be one that is more convenient than the others.
3.7.26	Mais si on l'a admis sans peine quand il s'agissait des lois de l'astronomie, pourquoi s'en choquerait-on en ce qui concerne la mécanique ?	But if this was accepted without difficulty where the laws of astronomy were concerned, why should it shock us where mechanics is concerned?
3.7.27	Nous avons vu que les coordonnées des corps sont déterminées par des équations différentielles du second ordre, et qu'il en est de même des différences de ces coordonnées. C'est ce que nous avons appelé le principe d'inertie généralisé et le principe du mouvement relatif. Si les distances de ces corps étaient déterminées de même par des équations du second ordre, il semble que l'esprit devrait être entièrement satisfait. Dans quelle mesure l'esprit reçoit-il cette satisfaction, et pourquoi ne s'en contente-t-il pas ?	We have seen that the coordinates of bodies are determined by differential equations of the second order, and that the same is true of the differences of these coordinates. This is what we have called the generalized principle of inertia and the principle of relative motion. If the distances between these bodies were likewise determined by equations of the second order, it seems that the mind ought to be entirely satisfied. To what extent does the mind receive this satisfaction, and why is it not content with it?
3.7.28	Pour nous en rendre compte, il vaut mieux prendre un exemple simple. Je suppose un système analogue à notre système solaire, mais d'où l'on ne puisse apercevoir des étoiles fixes étrangères à ce système, de telle façon que les astronomes ne puissent observer que les distances mutuelles des planètes et du soleil, et non les longitudes absolues des planètes. Si nous déduisons directement de la loi de Newton les équations différentielles qui	To see this, it is best to take a simple example. Suppose a system like our solar system, but from which no fixed stars outside the system can be seen, so that astronomers can observe only the mutual distances of the planets and the sun, and not the absolute longitudes of the planets. If we deduce directly from Newton's law the differential

FRENCH

définissent la variation de ces distances, ces équations ne seront pas du second ordre.

Je veux dire que si, outre la loi de Newton, on connaissait les valeurs initiales de ces distances et de leurs dérivées par rapport au temps, cela ne suffirait pas pour déterminer les valeurs de ces mêmes distances à un instant ultérieur. Il manquerait encore une donnée, et cette donnée, ce pourrait être par exemple ce que les astronomes appellent la constante des aires.

3.7.29 Mais ici, on peut se placer à deux points de vue différents ; nous pouvons distinguer deux sortes de constantes. Aux yeux du physicien, le monde se réduit à une série de phénomènes, dépendant uniquement, d'une part, des phénomènes initiaux, d'autre part, des lois qui lient les conséquents aux antécédents. Si alors l'observation nous apprend qu'une certaine quantité est une constante, nous aurons le choix entre deux manières de voir.

3.7.30 Ou bien nous admettrons qu'il y a une loi qui veut que cette quantité ne puisse varier, mais que c'est par hasard qu'elle s'est trouvée avoir, à l'origine des siècles, telle valeur plutôt que telle autre, valeur qu'elle a dû conserver depuis. Cette quantité pourrait alors s'appeler une constante *accidentelle*.

3.7.31 Ou bien nous admettrons au contraire qu'il y a une loi de la nature qui impose à cette quantité telle valeur et non pas telle autre. Nous aurons alors ce qu'on peut appeler une constante *essentielle*.

3.7.32 Par exemple, en vertu des lois de Newton, la durée de la révolution de la terre doit être constante. Mais si elle est égale à 366 jours sidéraux et quelque chose et non à 300 ou à 400, c'est par suite de je ne sais quel hasard initial. C'est une constante accidentelle. Si au contraire l'exposant de la distance qui figure dans l'expression de la force attractive, est égal à -2 et non pas -3, ce n'est pas par hasard, c'est parce que la loi de Newton l'exige. C'est une constante essentielle.

3.7.33 Je ne sais si cette manière de faire au hasard sa part est légitime en soi, et si cette distinction n'a pas quelque chose d'artificiel ; il est certain du moins que, tant que la nature aura des secrets, elle sera dans l'application fortement arbitraire et toujours précaire.

ENGLISH

equations that define how these distances vary, these equations will not be of the second order.

I mean that if, besides Newton's law, we knew the initial values of these distances and of their derivatives with respect to time, that would not be enough to determine the values of the same distances at a later instant. One more datum would still be missing, and this datum might be, for example, what astronomers call the constant of areas.[14]

But here we can take two different points of view; we can distinguish two kinds of constants. In the eyes of the physicist, the world reduces to a series of phenomena that depend solely, on the one hand, on the initial phenomena and, on the other, on the laws that link consequents to antecedents. If, then, observation teaches us that a certain quantity is a constant, we shall have a choice between two ways of looking at it.

Either we shall admit that there is a law requiring that this quantity cannot vary, but that it was by chance that it happened, at the beginning of the ages, to have this value rather than that, a value it has had to keep ever since. This quantity might then be called an *accidental* constant.

Or else we shall admit, on the contrary, that there is a law of nature that imposes on this quantity this value and no other. We shall then have what may be called an *essential* constant.

For example, by virtue of Newton's laws, the length of the earth's revolution must be constant. But if it is equal to 366 sidereal days and something over, and not to 300 or 400, that is the result of some initial chance or other. It is an accidental constant. If, on the other hand, the exponent of the distance that appears in the expression of the attractive force is equal to −2 and not −3, that is not by chance; it is because Newton's law requires it. It is an essential constant.

I do not know whether this way of giving chance its share is legitimate in itself, or whether this distinction is not somewhat artificial; what is certain, at least, is that as long as nature has secrets, the

14 The constant in Kepler's law of areas, proportional to the total angular momentum of the system.

FRENCH

ENGLISH

distinction will be highly arbitrary in its application and always precarious.

3.7.34 En ce qui concerne la constante des aires, nous avons coutume de la regarder comme accidentelle. Est-il certain que nos astronomes imaginaires en feraient autant ? S'ils avaient pu comparer deux systèmes solaires différents, ils auraient l'idée que cette constante peut avoir plusieurs valeurs différentes ; mais j'ai justement supposé au début que leur système apparaissait comme isolé, et qu'ils n'observaient aucun astre qui y fût étranger. Dans ces conditions, ils ne pourraient voir qu'une constante unique qui aurait une valeur unique absolument invariable ; ils seraient portés sans aucun doute à la regarder comme une constante essentielle.

As for the constant of areas, we are accustomed to regard it as accidental. Is it certain that our imaginary astronomers would do the same? If they had been able to compare two different solar systems, they would have the idea that this constant can have several different values; but I supposed at the outset precisely that their system appeared isolated, and that they observed no heavenly body outside it. Under these conditions they could see only a single constant with a single, absolutely invariable value; they would doubtless be inclined to regard it as an essential constant.

3.7.35 Un mot en passant pour prévenir une objection : les habitants de ce monde fictif ne pourraient ni observer ni définir la constante des aires comme nous le faisons, puisque les longitudes absolues leur échappent ; cela n'empêcherait pas qu'ils seraient rapidement amenés à remarquer une certaine constante qui s'introduirait naturellement dans leurs équations et qui ne serait autre chose que ce que nous appelons la constante des aires.

A word in passing, to forestall an objection: the inhabitants of this imaginary world could neither observe nor define the constant of areas as we do, since absolute longitudes are beyond their reach; that would not prevent them from being quickly led to notice a certain constant that would enter naturally into their equations and that would be nothing other than what we call the constant of areas.

3.7.36 Mais alors voici ce qui va se passer. Si la constante des aires est regardée comme essentielle, comme dépendant d'une loi de la nature, il suffira, pour calculer les distances des planètes à un instant quelconque, de connaître les valeurs initiales de ces distances et celles de leurs dérivées premières. À ce point de vue nouveau, les distances seront régies par des équations différentielles du deuxième ordre.

But then here is what will happen. If the constant of areas is regarded as essential, as depending on a law of nature, then to calculate the distances of the planets at any instant it will be enough to know the initial values of these distances and those of their first derivatives. From this new point of view, the distances will be governed by differential equations of the second order.

3.7.37 L'esprit de ces astronomes serait-il cependant satisfait complètement ? Je ne le crois pas ; d'abord, ils s'apercevraient bientôt qu'en différenciant leurs équations, de façon à en élever l'ordre, ces équations deviennent bien plus simples. Et surtout ils seraient frappés de la difficulté qui provient de la symétrie. Il faudrait admettre des lois différentes, selon que l'ensemble des planètes présenterait la figure d'un certain polyèdre ou bien du polyèdre symétrique, et on n'échapperait à cette conséquence qu'en regardant la constante des aires comme accidentelle.

Would these astronomers' minds, however, be completely satisfied? I do not think so. First, they would soon notice that if they differentiated their equations, so as to raise their order, the equations would become much simpler. And above all they would be struck by the difficulty that arises from symmetry. They would have to admit different laws according as the planets as a whole formed the figure of a certain polyhedron or of the symmetric polyhedron, and they could escape this consequence only by regarding the constant of areas as accidental.

3.7.38 J'ai pris un exemple bien particulier, puisque j'ai supposé des astronomes qui ne s'occuperaient pas du tout de mécanique terrestre et dont la vue serait bornée au

I have taken a very special example, since I have supposed astronomers who would not concern themselves at all with terrestrial mechanics and

	FRENCH	ENGLISH
	système solaire. Mais nos conclusions s'appliquent à tous les cas. Notre univers est plus étendu que le leur, puisque nous avons des étoiles fixes, mais il est cependant limité, lui aussi, et alors nous pourrions raisonner sur l'ensemble de notre univers, comme ces astronomes sur leur système solaire.	whose view would be limited to the solar system. But our conclusions apply to every case. Our universe is more extensive than theirs, since we have the fixed stars; yet it too is limited, and so we could reason about our universe as a whole as these astronomers do about their solar system.
3.7.39	On voit ainsi qu'en définitive on serait conduit à conclure que les équations qui définissent les distances sont d'ordre supérieur au second. Pourquoi en serions-nous choqués, pourquoi trouvons-nous tout naturel que la suite des phénomènes dépende des valeurs initiales des dérivées premières de ces distances, tandis que nous hésitons à admettre qu'elles puissent dépendre des valeurs initiales des dérivées secondes ? Ce ne peut être qu'à cause des habitudes d'esprit créées en nous par l'étude constante du principe d'inertie généralisé et de ses conséquences.	We see, then, that in the end we should be led to conclude that the equations defining the distances are of an order higher than the second. Why should that shock us? Why do we find it quite natural that the sequence of phenomena should depend on the initial values of the first derivatives of these distances, while we hesitate to admit that it might depend on the initial values of the second derivatives? It can only be because of the habits of mind created in us by our constant study of the generalized principle of inertia and its consequences.
3.7.40	Les valeurs des distances à un instant quelconque dépendent de leurs valeurs initiales, de celles de leurs dérivées premières et encore d'autre chose. Qu'est-ce que cette *autre chose ?*	The values of the distances at any instant depend on their initial values, on those of their first derivatives, and on something else besides. What is this *something else?*
3.7.41	Si l'on ne veut pas que ce soit tout simplement l'une des dérivées secondes, on n'a que le choix des hypothèses. Supposer, comme on le fait d'ordinaire, que cette autre chose c'est l'orientation absolue de l'univers dans l'espace, ou la rapidité avec laquelle cette orientation varie, cela peut être, cela est certainement la solution la plus commode pour le géomètre ; ce n'est pas la plus satisfaisante pour le philosophe, puisque cette orientation n'existe pas.	If we do not want it simply to be one of the second derivatives, we have only a choice of hypotheses. To suppose, as is usually done, that this something else is the absolute orientation of the universe in space, or the rate at which this orientation varies, may be—certainly is—the most convenient solution for the mathematician; it is not the most satisfying one for the philosopher, since this orientation does not exist.
3.7.42	On peut supposer que cette autre chose est la position ou la vitesse de quelque corps invisible ; c'est ce qu'ont fait certaines personnes qui l'ont même appelé le corps alpha, bien que nous soyons destinés à ne jamais rien savoir de ce corps que son nom. C'est là un artifice tout à fait analogue à celui dont je parlais à la fin du paragraphe consacré à mes réflexions sur le principe d'inertie.	We may suppose that this something else is the position or velocity of some invisible body; that is what certain people have done, and they have even called it body alpha, though we are destined never to know anything about this body but its name. This is an artifice entirely analogous to the one I spoke of at the end of the section devoted to my reflections on the principle of inertia.[15]
3.7.43	Mais en somme la difficulté est artificielle. Pourvu que les indications futures de nos instruments ne puissent dépendre que des indications qu'ils nous ont données ou qu'ils auraient pu donner autrefois, c'est tout ce qu'il faut. Or, sous ce rapport nous pouvons être tranquilles.	But in sum the difficulty is artificial. Provided the future readings of our instruments can depend only on the readings they have given us, or might have given us, in the past, that is all we need. And on that score we may rest easy.

15 The "body alpha" was proposed by the German mathematician Carl Neumann in 1870 as a reference body for absolute motion.

CHAPTER VIII: ENERGY AND THERMODYNAMICS

The energetic system avoids some difficulties of classical mechanics but cannot define energy in general.

	FRENCH	ENGLISH
3.8.1	Le système énergétique. — Les difficultés soulevées par la mécanique classique ont conduit certains esprits à lui préférer un système nouveau qu'ils appellent *énergétique*.	The energetic system.—The difficulties raised by classical mechanics have led certain minds to prefer to it a new system, which they call *energetics*.
3.8.2	Le système énergétique a pris naissance à la suite de la découverte du principe de la conservation de l'énergie. C'est Helmholtz qui lui a donné sa forme définitive.	The energetic system arose following the discovery of the principle of the conservation of energy. It was Helmholtz who gave it its definitive form.
3.8.3	On commence par définir deux quantités qui jouent le rôle fondamental dans cette théorie. Ces deux quantités sont : d'une part, l'*énergie cinétique* ou force vive ; d'autre part, l'*énergie potentielle*.	We begin by defining two quantities that play the fundamental role in this theory. These two quantities are, on the one hand, *kinetic energy* or vis viva; on the other, *potential energy*.[16]
3.8.4	Tous les changements que peuvent subir les corps de la nature sont régis par deux lois expérimentales :	All the changes that bodies in nature can undergo are governed by two experimental laws:
3.8.5	1° La somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle est une constante. C'est le principe de la conservation de l'énergie.	1. The sum of the kinetic energy and the potential energy is a constant. This is the principle of the conservation of energy.
3.8.6	2° Si un système de corps est dans la situation A à l'époque t_0 et dans la situation B à l'époque t_1, il va toujours de la première situation à la seconde par un chemin tel que la valeur *moyenne* de la différence entre les deux sortes d'énergie, dans l'intervalle de temps qui sépare les deux époques t_0 et t_1, soit aussi petite que possible.	2. If a system of bodies is in situation A at time t_0 and in situation B at time t_1, it always goes from the first situation to the second by a path such that the *mean* value of the difference between the two kinds of energy, over the interval of time separating the two times t_0 and t_1, is as small as possible.
3.8.7	C'est là le principe de Hamilton, qui est une des formes du principe de moindre action.	This is Hamilton's principle, which is one of the forms of the principle of least action.[17]
3.8.8	La théorie énergétique présente sur la théorie classique les avantages suivants :	The energetic theory has the following advantages over the classical theory:
3.8.9	1° Elle est moins incomplète ; c'est-à-dire que les principes de la conservation de l'énergie et de Hamilton nous apprennent plus que les principes fondamentaux de la théorie classique et excluent certains mouvements que la nature ne réalise pas et qui seraient compatibles avec la théorie classique ;	1. It is less incomplete; that is, the principles of the conservation of energy and of Hamilton tell us more than the fundamental principles of the classical theory, and they exclude certain motions that nature does not produce but that would be compatible with the classical theory;
3.8.10	2° Elle nous dispense de l'hypothèse des atomes, qu'il était presque impossible d'éviter avec la théorie classique.	2. It spares us the hypothesis of atoms, which was almost impossible to avoid with the classical theory.
3.8.11		

16 Vis viva ("living force") is the older name for what is now called kinetic energy.
17 William Rowan Hamilton (1805–1865), Irish mathematician who reformulated mechanics in terms of a variational principle.

	FRENCH	ENGLISH
	Mais elle soulève à son tour de nouvelles difficultés :	But it raises new difficulties in its turn:
3.8.12	Les définitions des deux sortes d'énergie sont à peine plus aisées que celles de la force et de la masse dans le premier système. Cependant on s'en tirerait plus facilement, au moins dans les cas les plus simples.	The definitions of the two kinds of energy are hardly easier than those of force and mass in the first system. Still, one would manage more easily, at least in the simplest cases.
3.8.13	Supposons un système isolé formé d'un certain nombre de points matériels ; supposons que ces points soient soumis à des forces ne dépendant que de leur position relative et de leurs distances mutuelles et indépendantes de leurs vitesses. En vertu du principe de la conservation de l'énergie, il devra y avoir une fonction des forces.	Suppose an isolated system made up of a certain number of material points; suppose these points are subject to forces that depend only on their relative position and their mutual distances, and are independent of their velocities. By virtue of the principle of the conservation of energy, there must be a force function.
3.8.14	Dans ce cas simple, l'énoncé du principe de la conservation de l'énergie est d'une extrême simplicité. Une certaine quantité, accessible à l'expérience, doit demeurer constante. Cette quantité est la somme de deux termes ; le premier dépend seulement de la position des points matériels et est indépendant de leurs vitesses ; le second est proportionnel au carré de ces vitesses. Cette décomposition ne peut se faire que d'une seule manière.	In this simple case, the statement of the principle of the conservation of energy is extremely simple. A certain quantity, accessible to experiment, must remain constant. This quantity is the sum of two terms; the first depends only on the position of the material points and is independent of their velocities; the second is proportional to the square of these velocities. This decomposition can be made in only one way.
3.8.15	Le premier de ces termes, que j'appellerai U, sera l'énergie potentielle ; le second, que j'appellerai T, sera l'énergie cinétique.	The first of these terms, which I shall call U, will be the potential energy; the second, which I shall call T, will be the kinetic energy.
3.8.16	Il est vrai que si T + U est une constante, il en est de même d'une fonction quelconque de T + U, φ(T + U).	It is true that if T + U is a constant, so is any function whatever of T + U, ϕ(T + U).
3.8.17	Mais cette fonction φ(T + U) ne sera pas la somme de deux termes l'un indépendant des vitesses, l'autre proportionnel au carré de ces vitesses. Parmi les fonctions qui demeurent constantes, il n'y en a qu'une qui jouisse de cette propriété, c'est T + U (ou une fonction linéaire de T + U, ce qui ne fait rien, puisque cette fonction linéaire peut toujours être ramenée à T + U par un changement d'unité et d'origine). C'est alors ce que nous appellerons l'énergie ; c'est le premier terme que nous appellerons l'énergie potentielle et le second qui sera l'énergie cinétique. La définition des deux sortes d'énergie peut donc être poussée jusqu'au bout sans aucune ambiguïté.	But this function ϕ(T + U) will not be the sum of two terms, one independent of the velocities, the other proportional to the square of these velocities. Among the functions that remain constant, only one has this property, namely T + U (or a linear function of T + U, which makes no difference, since such a linear function can always be brought back to T + U by a change of unit and of origin). This, then, is what we shall call the energy; the first term is what we shall call the potential energy, and the second will be the kinetic energy. The definition of the two kinds of energy can therefore be carried through to the end without any ambiguity.
3.8.18	Il en est de même de la définition des masses. L'énergie cinétique ou force vive s'exprime très simplement à l'aide des masses et des vitesses relatives de tous les points matériels, par rapport à l'un d'entre eux. Ces vitesses relatives sont accessibles à l'observation, et, quand nous	The same is true of the definition of masses. Kinetic energy, or vis viva, is expressed very simply in terms of the masses and of the velocities of all the material points relative to one of them. These relative velocities are accessible to observation, and

	FRENCH	ENGLISH
	aurons l'expression de l'énergie cinétique en fonction de ces vitesses relatives, les coefficients de cette expression nous donneront les masses.	when we have the expression of the kinetic energy as a function of these relative velocities, the coefficients of this expression will give us the masses.
3.8.19	Ainsi, dans ce cas simple, on peut définir les notions fondamentales sans difficulté. Mais les difficultés reparaissent dans les cas plus compliqués et, par exemple, si les forces, au lieu de dépendre seulement des distances, dépendent aussi des vitesses. Par exemple, Weber suppose que l'action mutuelle de deux molécules électriques dépend non seulement de leur distance, mais de leur vitesse et de leur accélération. Si les points matériels s'attiraient d'après une loi analogue, U dépendrait de la vitesse, et il pourrait contenir un terme proportionnel au carré de la vitesse.	Thus, in this simple case, the fundamental notions can be defined without difficulty. But the difficulties reappear in more complicated cases—for example, if the forces, instead of depending only on the distances, depend on the velocities as well. Weber, for example, supposes that the mutual action of two electrical molecules depends not only on their distance but on their velocity and their acceleration. If material points attracted one another according to a similar law, U would depend on the velocity, and it might contain a term proportional to the square of the velocity.[18]
3.8.20	Parmi les termes proportionnels aux carrés des vitesses, comment discerner ceux qui proviennent de T ou de U ? Comment, par conséquent, distinguer les deux parties de l'énergie ?	Among the terms proportional to the squares of the velocities, how are we to tell which come from T and which from U? How, consequently, are we to distinguish the two parts of the energy?
3.8.21	Mais il y a plus. Comment définir l'énergie elle-même ? Nous n'avons plus aucune raison de prendre comme définition T + U plutôt que toute autre fonction de T + U, quand a disparu la propriété qui caractérisait T + U, celle d'être la somme de deux termes d'une forme particulière.	But there is more. How are we to define energy itself? We no longer have any reason to take T + U as the definition rather than any other function of T + U, once the property that characterized T + U—that of being the sum of two terms of a particular form—has disappeared.
3.8.22	Mais ce n'est pas tout, il faut tenir compte, non seulement de l'énergie mécanique proprement dite, mais des autres formes de l'énergie, chaleur, énergie chimique, énergie électrique, etc. Le principe de la conservation de l'énergie doit s'écrire : T + U + Q = const. où T représenterait l'énergie cinétique sensible, U l'énergie potentielle de position, dépendant seulement de la position des corps, Q l'énergie interne moléculaire, sous la forme thermique, chimique ou électrique.	But that is not all: we must take account not only of mechanical energy properly so called but of the other forms of energy—heat, chemical energy, electrical energy, and so on. The principle of the conservation of energy must be written: T + U + Q = const., where T would represent the sensible kinetic energy, U the potential energy of position, depending only on the position of the bodies, and Q the internal molecular energy, in thermal, chemical or electrical form.
3.8.23	Tout irait bien si ces trois termes étaient absolument distincts, si T était proportionnel au carré des vitesses, U indépendant de ces vitesses et de l'état des corps, Q indépendant des vitesses et des positions des corps et dépendant seulement de leur état interne.	All would be well if these three terms were absolutely distinct: if T were proportional to the square of the velocities, U independent of these velocities and of the state of the bodies, and Q independent of the velocities and positions of the bodies and dependent only on their internal state.
3.8.24	L'expression de l'énergie ne pourrait se décomposer que d'une seule manière en trois termes de cette forme.	

18 Wilhelm Weber (1804–1891), German physicist whose law of electrical force (1846) depends on the relative velocity and acceleration of the charges.

	FRENCH	ENGLISH
		The expression of the energy could then be decomposed in only one way into three terms of this form.
3.8.25	Mais il n'en est pas ainsi ; considérons des corps électrisés : l'énergie électrostatique due à leur action mutuelle dépendra évidemment de leur charge, c'est-à-dire de leur état ; mais elle dépendra également de leur position. Si ces corps sont en mouvement, ils agiront l'un sur l'autre électrodynamiquement et l'énergie électrodynamique dépendra non seulement de leur état et de leur position, mais de leurs vitesses.	But this is not so. Consider electrified bodies: the electrostatic energy due to their mutual action will obviously depend on their charge, that is, on their state; but it will also depend on their position. If these bodies are in motion, they will act on each other electrodynamically, and the electrodynamic energy will depend not only on their state and position but on their velocities.
3.8.26	Nous n'avons donc plus aucun moyen de faire le triage des termes qui doivent faire partie de T, de U et de Q et de séparer les trois parties de l'énergie.	We therefore no longer have any means of sorting out the terms that must belong to T, to U and to Q, and of separating the three parts of the energy.
3.8.27	Si (T + U + Q) est constant, il en est de même d'une fonction quelconque $\varphi(T + U + Q)$.	If (T + U + Q) is constant, so is any function whatever of it, $\phi(T + U + Q)$.
3.8.28	Si T + U + Q était de la forme particulière que j'ai envisagée plus haut, il n'en résulterait pas d'ambiguïté ; parmi les fonctions $\varphi(T + U + Q)$ qui demeurent constantes, il n'y en aurait qu'une qui serait de cette forme particulière, et ce serait celle-là que je conviendrais d'appeler énergie.	If T + U + Q were of the particular form I considered above, no ambiguity would result; among the functions $\phi(T + U + Q)$ that remain constant there would be only one of this particular form, and that is the one I should agree to call energy.
3.8.29	Mais je l'ai dit, il n'en est pas rigoureusement ainsi ; parmi les fonctions qui demeurent constantes, il n'y en a pas qui puissent rigoureusement se mettre sous cette forme particulière ; dès lors, comment choisir parmi elles celle qui doit s'appeler l'énergie ? Nous n'avons plus rien qui puisse nous guider dans notre choix.	But, as I have said, this is not strictly so; among the functions that remain constant, there are none that can strictly be put into this particular form. How, then, are we to choose among them the one that should be called the energy? We no longer have anything that can guide us in our choice.
3.8.30	Il ne nous reste plus qu'un énoncé pour le principe de la conservation de l'énergie ; *il y a quelque chose qui demeure constant*. Sous cette forme, il se trouve à son tour hors des atteintes de l'expérience et se réduit à une sorte de tautologie. Il est clair que si le monde est gouverné par des lois, il y aura des quantités qui demeureront constantes. Comme les principes de Newton, et pour une raison analogue, le principe de la conservation de l'énergie, fondé sur l'expérience, ne pourrait plus être infirmé par elle.	There remains for us only one statement of the principle of the conservation of energy: *there is something that remains constant*. In this form it is in its turn beyond the reach of experiment and reduces to a sort of tautology. It is clear that if the world is governed by laws, there will be quantities that remain constant. Like Newton's principles, and for a similar reason, the principle of the conservation of energy, founded on experiment, could no longer be invalidated by it.
3.8.31	Cette discussion montre qu'en passant du système classique au système énergétique, on a réalisé un progrès ; mais elle montre, en même temps, que ce progrès est insuffisant.	This discussion shows that in passing from the classical system to the energetic system an advance has been made; but it shows at the same time that this advance is insufficient.
3.8.32	Une autre objection me semble encore plus grave : le principe de moindre action est applicable aux phénomènes réversibles ; mais il n'est nullement	Another objection seems to me still more serious: the principle of least action applies to reversible phenomena, but it is by no means satisfactory as

FRENCH	ENGLISH
satisfaisant en ce qui concerne les phénomènes irréversibles ; la tentative de Helmholtz pour l'étendre à ce genre de phénomènes n'a pas réussi et ne pouvait réussir : sous ce rapport tout reste à faire.	regards irreversible phenomena. Helmholtz's attempt to extend it to phenomena of this kind did not succeed and could not succeed: in this respect everything remains to be done.
3.8.33 L'énoncé même du principe de moindre action a quelque chose de choquant pour l'esprit. Pour se rendre d'un point à un autre, une molécule matérielle, soustraite à l'action de toute force, mais assujettie à se mouvoir sur une surface, prendra la ligne géodésique, c'est-à-dire le chemin le plus court.	The very statement of the principle of least action has something shocking to the mind. To get from one point to another, a material molecule, free from the action of any force but constrained to move on a surface, will take the geodesic line, that is, the shortest path.
3.8.34 Cette molécule semble connaître le point où on veut la mener, prévoir le temps qu'elle mettra à l'atteindre en suivant tel et tel chemin, et choisir ensuite le chemin le plus convenable. L'énoncé nous la présente pour ainsi dire comme un être animé et libre. Il est clair qu'il vaudrait mieux le remplacer par un énoncé moins choquant, et où, comme diraient les philosophes, les causes finales ne sembleraient pas se substituer aux causes efficientes.	This molecule seems to know the point to which we want to bring it, to foresee the time it will take to reach it by following this path or that, and then to choose the most suitable path. The statement presents it to us, so to speak, as a living and free being. It is clear that it would be better to replace it with a less shocking statement, one in which, as the philosophers would say, final causes would not seem to take the place of efficient causes.

THERMODYNAMICS

The conservation of energy reduces at last to the statement that something remains constant.

FRENCH	ENGLISH
3.8.35 Thermodynamique[1]. — Le rôle des deux principes fondamentaux de la thermodynamique dans toutes les branches de la philosophie naturelle devient de jour en jour plus important. Abandonnant les théories ambitieuses d'il y a quarante ans, encombrées d'hypothèses moléculaires, nous cherchons aujourd'hui à élever sur la Thermodynamique seule l'édifice tout entier de la physique mathématique. Les deux principes de Meyer et de Clausius lui assureront-ils des fondations assez solides pour qu'il dure quelque temps ? Personne n'en doute ; mais d'où nous vient cette confiance ?	Thermodynamics[1].—The role of the two fundamental principles of thermodynamics in every branch of natural philosophy is becoming more important day by day. Abandoning the ambitious theories of forty years ago, cluttered with molecular hypotheses, we are now trying to raise the whole edifice of mathematical physics on thermodynamics alone. Will the two principles of Mayer and Clausius provide it with foundations solid enough for it to last for some time? Nobody doubts it; but where does this confidence come from?[19]
20	
3.8.36 Un physicien éminent me disait un jour à propos de la loi des erreurs : Tout le monde y croit fermement parce que les mathématiciens s'imaginent que c'est un fait d'observation, et les observateurs que c'est un théorème de mathématiques. Il en a été longtemps ainsi pour le principe de la conservation de l'énergie. Il n'en est plus	An eminent physicist once said to me, apropos of the law of errors: "Everybody believes in it firmly, because the mathematicians imagine that it is a fact of observation, and the observers that it is a theorem of mathematics." For a long time it was like that with the principle of the conservation of

19 Julius Robert Mayer (1814–1878) stated the conservation of energy in 1842 (Poincaré spells the name "Meyer"); Rudolf Clausius (1822–1888) formulated the second law of thermodynamics, here called Clausius's principle.
20

[1] Les lignes qui vont suivre sont la reproduction partielle de la préface de mon ouvrage *Thermodynamique*.

[1] The lines that follow partly reproduce the preface of my book *Thermodynamique*.

FRENCH	ENGLISH
de même aujourd'hui ; personne n'ignore que c'est un fait expérimental.	energy. It is no longer so today; everyone knows that it is an experimental fact.
3.8.37 Mais alors qui nous donne le droit d'attribuer au principe lui-même plus de généralité et plus de précision qu'aux expériences qui ont servi à le démontrer ? C'est là demander s'il est légitime, comme on le fait tous les jours, de généraliser les données empiriques, et je n'aurai pas l'outrecuidance de discuter cette question, après que tant de philosophes se sont vainement efforcés de la trancher. Une seule chose est certaine : si cette faculté nous était refusée, la science ne pourrait exister ou, du moins, réduite à une sorte d'inventaire, à la constatation des faits isolés, elle n'aurait pour nous aucun prix, puisqu'elle ne pourrait donner satisfaction à notre besoin d'ordre et d'harmonie et qu'elle serait en même temps incapable de prévoir.	But then what gives us the right to attribute to the principle itself more generality and more precision than to the experiments that served to demonstrate it? That is to ask whether it is legitimate, as is done every day, to generalize empirical data, and I shall not be so presumptuous as to discuss this question after so many philosophers have vainly striven to settle it. One thing alone is certain: if this faculty were denied us, science could not exist; or at least, reduced to a sort of inventory, to the recording of isolated facts, it would have no value for us, since it could not satisfy our need for order and harmony, and it would at the same time be incapable of prediction.
Comme les circonstances qui ont précédé un fait quelconque ne se reproduiront vraisemblablement jamais toutes à la fois, il faut déjà une première généralisation pour prévoir si ce fait se renouvellera encore dès que la moindre de ces circonstances sera changée.	Since the circumstances that preceded any given fact will in all likelihood never all recur at once, a first generalization is already needed to predict whether this fact will happen again as soon as the slightest of those circumstances is changed.
3.8.38 Mais toute proposition peut être généralisée d'une infinité de manières. Parmi toutes les généralisations possibles, il faut bien que nous choisissions et nous ne pouvons choisir que la plus simple. Nous sommes donc conduits à agir comme si une loi simple était, toutes choses égales d'ailleurs, plus probable qu'une loi compliquée.	But every proposition can be generalized in an infinity of ways. Among all the possible generalizations we must choose, and we can choose only the simplest. We are thus led to act as if a simple law were, other things being equal, more probable than a complicated one.
3.8.39 Il y a un demi-siècle on le confessait franchement et on proclamait que la nature aime la simplicité ; elle nous a donné depuis trop de démentis. Aujourd'hui on n'avoue plus cette tendance et on n'en conserve que ce qui est indispensable pour que la science ne devienne pas impossible.	Half a century ago this was frankly confessed, and it was proclaimed that nature loves simplicity; since then nature has given us the lie too often. Today this tendency is no longer admitted, and only so much of it is kept as is indispensable to keep science from becoming impossible.
3.8.40 En formulant une loi générale, simple et précise après des expériences relativement peu nombreuses et qui présentent certaines divergences, nous n'avons donc fait qu'obéir à une nécessité à laquelle l'esprit humain ne peut se soustraire.	In formulating a general, simple and precise law after experiments that are relatively few in number and show certain discrepancies, we have therefore merely obeyed a necessity from which the human mind cannot escape.
3.8.41 Mais il y a quelque chose de plus et c'est pourquoi j'insiste.	But there is something more, and that is why I dwell on the point.
3.8.42 Personne ne doute que le principe de Meyer ne soit appelé à survivre à toutes les lois particulières d'où on l'a tiré de même que la loi de Newton a survécu aux lois de Képler, d'où elle était sortie, et qui ne sont plus	Nobody doubts that Mayer's principle is destined to outlive all the particular laws from which it was derived, just as Newton's law outlived Kepler's laws, from which it had emerged and which are

	FRENCH	ENGLISH
	qu'approximatives, si l'on tient compte des perturbations.	now only approximate if perturbations are taken into account.
3.8.43	Pourquoi ce principe occupe-t-il ainsi une sorte de place privilégiée parmi toutes les lois physiques ? Il y a à cela beaucoup de petites raisons.	Why does this principle thus hold a sort of privileged place among all physical laws? There are many small reasons for it.
3.8.44	Tout d'abord on croit que nous ne pourrions le rejeter ou même douter de sa rigueur absolue sans admettre la possibilité du mouvement perpétuel ; nous nous défions bien entendu d'une telle perspective et nous nous croyons moins téméraires en affirmant qu'en niant.	First of all, it is believed that we could not reject it, or even doubt its absolute rigor, without admitting the possibility of perpetual motion; we are of course wary of such a prospect, and we think ourselves less rash in affirming than in denying.
3.8.45	Cela n'est peut-être pas tout à fait exact ; l'impossibilité du mouvement perpétuel n'entraîne la conservation de l'énergie que pour les phénomènes réversibles.	This is perhaps not quite accurate; the impossibility of perpetual motion entails the conservation of energy only for reversible phenomena.
3.8.46	L'imposante simplicité du principe de Meyer contribue également à affermir notre foi. Dans une loi déduite immédiatement de l'expérience, comme celle de Mariotte, cette simplicité nous paraîtrait plutôt une raison de méfiance : mais ici il n'en est plus de même ; nous voyons des éléments disparates au premier coup d'œil, se ranger dans un ordre inattendu et former un tout harmonieux ; et nous nous refusons à croire qu'une harmonie imprévue soit un simple effet du hasard. Il semble que notre conquête nous soit d'autant plus chère qu'elle nous a coûté plus d'efforts ou que nous soyons d'autant plus sûrs d'avoir arraché à la nature son vrai secret qu'elle a paru plus jalouse de nous le dérober.	The imposing simplicity of Mayer's principle also helps to strengthen our faith. In a law deduced directly from experiment, such as Mariotte's, this simplicity would rather seem to us a reason for distrust; but here it is otherwise. We see elements that at first glance seem disparate fall into an unexpected order and form a harmonious whole, and we refuse to believe that an unforeseen harmony is a mere effect of chance. It seems that our conquest is the dearer to us the more effort it has cost us, or that we are the surer of having wrested its true secret from nature the more jealously nature seemed to hide it from us.[21]
3.8.47	Mais ce ne sont là que de petites raisons ; pour ériger la loi de Meyer en principe absolu, il faudrait une discussion plus approfondie. Mais si on essaye de la faire, on voit que ce principe absolu n'est même pas facile à énoncer.	But these are only small reasons; to raise Mayer's law to the rank of an absolute principle, a more thorough discussion would be needed. But if we try to carry it out, we see that this absolute principle is not even easy to state.
3.8.48	Dans chaque cas particulier on voit bien ce que c'est que l'énergie et on en peut donner une définition au moins provisoire ; mais il est impossible d'en trouver une définition générale.	In each particular case we see clearly what energy is, and we can give at least a provisional definition of it; but it is impossible to find a general definition of it.
3.8.49	Si l'on veut énoncer le principe dans toute sa généralité et en l'appliquant à l'univers, on le voit pour ainsi dire s'évanouir et il ne reste plus que ceci : *Il y a quelque chose qui demeure constant*.	If we wish to state the principle in all its generality and apply it to the universe, we see it, so to speak, vanish, and nothing is left but this: *There is something that remains constant*.
3.8.50	Mais cela même a-t-il un sens ? Dans l'hypothèse déterministe, l'état de l'univers est déterminé par un nombre excessivement grand n de paramètres que j'appellerai x_1, x_2, ..., x_n. Dès que l'on connaît à un instant	But does even this have a meaning? On the determinist hypothesis, the state of the universe is determined by an extremely large number n of

21 Mariotte's law is known in English as Boyle's law: at constant temperature, the pressure of a gas varies inversely with its volume.

FRENCH

quelconque les valeurs de ces n paramètres, on connaît également leurs dérivées par rapport au temps et on peut calculer par conséquent les valeurs de ces mêmes paramètres à un instant antérieur ou ultérieur. En d'autres termes, ces n paramètres satisfont à n équations différentielles du premier ordre.

3.8.51 Ces équations admettent $n - 1$ intégrales et il y a par conséquent $n - 1$ fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui demeurent constantes. Si nous disons alors qu'*il y a quelque chose qui demeure constant*, nous ne faisons qu'énoncer une tautologie. On serait même embarrassé de dire quelle est parmi toutes nos intégrales celle qui doit conserver le nom d'énergie.

3.8.52 Ce n'est pas d'ailleurs en ce sens que l'on entend le principe de Meyer quand on l'applique à un système limité.

3.8.53 On admet alors que p de nos n paramètres varie d'une manière indépendante, de sorte que nous avons seulement $n - p$ relations, généralement linéaires, entre nos n paramètres et leurs dérivées.

3.8.54 Supposons pour simplifier l'énoncé que la somme des travaux des forces extérieures soit nulle ainsi que celle des quantités de chaleur cédées au dehors. Voici alors quelle sera la signification de notre principe :

3.8.55 *Il y a une combinaison de ces* n - p *relations dont le premier membre est une différentielle exacte ;* et alors cette différentielle étant nulle en vertu de nos $n - p$ relations, son intégrale est une constante et c'est cette intégrale qu'on appelle l'énergie.

3.8.56 Mais comment peut-il se faire qu'il y ait plusieurs paramètres dont les variations soient indépendantes ? Cela ne peut avoir lieu que sous l'influence des forces extérieures (bien que nous ayons supposé, pour simplifier, que la somme algébrique des travaux de ces forces soit nulle). Si en effet le système était complètement soustrait à toute action extérieure, les valeurs de nos n paramètres à un instant donné suffiraient pour déterminer l'état du système à un instant ultérieur quelconque, pourvu toutefois que nous restions dans l'hypothèse déterministe ; nous retomberions donc sur la même difficulté que plus haut.

3.8.57 Si l'état futur du système n'est pas entièrement déterminé par son état actuel, c'est qu'il dépend en outre

ENGLISH

parameters, which I shall call $x_1, x_2, \ldots, x_n$. As soon as we know the values of these n parameters at any instant, we also know their derivatives with respect to time, and we can therefore calculate the values of the same parameters at any earlier or later instant. In other words, these n parameters satisfy n differential equations of the first order.

These equations admit $n - 1$ integrals, and there are therefore $n - 1$ functions of $x_1, x_2, \ldots, x_n$ that remain constant. If, then, we say that *there is something that remains constant*, we are merely stating a tautology. We should even be at a loss to say which among all our integrals ought to keep the name of energy.

Besides, it is not in this sense that Mayer's principle is understood when it is applied to a limited system.

It is then assumed that p of our n parameters vary independently, so that we have only $n - p$ relations, generally linear, among our n parameters and their derivatives.

To simplify the statement, let us suppose that the sum of the work done by the external forces is zero, as is the sum of the quantities of heat given off to the outside. Then this is what our principle will mean:

There is a combination of these n - p *relations whose left-hand side is an exact differential;* and then, since this differential is zero by virtue of our $n - p$ relations, its integral is a constant, and it is this integral that is called the energy.

But how can it happen that there are several parameters whose variations are independent? That can occur only under the influence of external forces (even though we have supposed, for simplicity, that the algebraic sum of the work done by these forces is zero). For if the system were completely removed from all external action, the values of our n parameters at a given instant would suffice to determine the state of the system at any later instant, provided, at least, that we keep to the determinist hypothesis; we should therefore fall back into the same difficulty as before.

If the future state of the system is not entirely determined by its present state, it is because it de-

	FRENCH	ENGLISH
	de l'état des corps extérieurs au système. Mais alors est-il vraisemblable qu'il existe entre les paramètres *x* qui définissent l'état du système des équations indépendantes de cet état des corps extérieurs ; et si dans certains cas nous croyons pouvoir en trouver, n'est-ce pas uniquement par suite de notre ignorance et parce que l'influence de ces corps est trop faible pour que notre expérience puisse la déceler ?	pends in addition on the state of bodies outside the system. But then is it likely that there exist, among the parameters *x* that define the state of the system, equations independent of this state of the external bodies? And if in certain cases we think we can find some, is it not solely because of our ignorance, and because the influence of these bodies is too weak for our experiments to detect it?
3.8.58	Si le système n'est pas regardé comme complètement isolé, il est probable que l'expression rigoureusement exacte de son énergie interne devra dépendre de l'état des corps extérieurs. Encore ai-je supposé plus haut que la somme des travaux extérieurs était nulle, et si l'on veut s'affranchir de cette restriction un peu artificielle l'énoncé devient encore plus difficile.	If the system is not regarded as completely isolated, it is likely that the strictly exact expression of its internal energy will have to depend on the state of the external bodies. Moreover, I supposed above that the sum of the external work was zero, and if we wish to free ourselves from this somewhat artificial restriction, the statement becomes more difficult still.
3.8.59	Pour formuler le principe de Meyer en lui donnant un sens absolu, il faut donc l'étendre à tout l'univers et alors on se retrouve en face de cette même difficulté que l'on cherchait à éviter.	To formulate Mayer's principle so as to give it an absolute meaning, we must therefore extend it to the whole universe, and then we find ourselves facing the very difficulty we were trying to avoid.
3.8.60	En résumé, et pour employer le langage ordinaire, la loi de la conservation de l'énergie ne peut avoir qu'une signification, c'est qu'il y a une propriété commune à tous les possibles ; mais dans l'hypothèse déterministe il n'y a qu'un seul possible et alors la loi n'a plus de sens.	In short, and to use ordinary language, the law of the conservation of energy can have only one meaning: that there is a property common to all possibilities; but on the determinist hypothesis there is only one possibility, and then the law no longer has any meaning.
3.8.61	Dans l'hypothèse indéterministe, au contraire, elle en prendrait un, même si on voulait l'entendre dans un sens absolu ; elle apparaîtrait comme une limite imposée à la liberté.	On the indeterminist hypothesis, by contrast, it would take on a meaning, even if we wished to understand it in an absolute sense; it would appear as a limit imposed on freedom.
3.8.62	Mais ce mot m'avertit que je m'égare et que je vais sortir du domaine des mathématiques et de la physique. Je m'arrête donc et je ne veux retenir de toute cette discussion qu'une impression, c'est que la loi de Meyer est une forme assez souple pour qu'on y puisse faire rentrer presque tout ce que l'on veut. Je ne veux pas dire par là qu'elle ne correspond à aucune réalité objective ni qu'elle se réduise à une simple tautologie, puisque, dans chaque cas particulier, et pourvu qu'on ne veuille pas pousser jusqu'à l'absolu, elle a un sens parfaitement clair.	But this word warns me that I am straying and am about to leave the domain of mathematics and physics. I therefore stop, and from this whole discussion I wish to retain only one impression: that Mayer's law is a form flexible enough for almost anything we like to be fitted into it. I do not mean by this that it corresponds to no objective reality, or that it reduces to a mere tautology, since in each particular case, provided we do not try to push it to the absolute, it has a perfectly clear meaning.
3.8.63	Cette souplesse est une raison de croire à sa longue durée, et comme, d'autre part, elle ne disparaîtra que pour se fondre dans une harmonie supérieure, nous pouvons travailler avec confiance en nous appuyant sur	This flexibility is a reason to believe it will last a long time; and since, on the other hand, it will disappear only to be merged in a higher harmony, we

FRENCH	ENGLISH
elle, certains d'avance que notre travail ne sera pas perdu.	can work with confidence, relying on it, certain in advance that our work will not be lost.
3.8.64 Presque tout ce que je viens de dire s'applique au principe de Clausius. Ce qui le distingue, c'est qu'il s'exprime par une inégalité. On dira peut-être qu'il en est de même de toutes les lois physiques, puisque leur précision est toujours limitée par des erreurs d'observation. Mais elles affichent du moins la prétention d'être de premières approximations et on a l'espoir de les remplacer peu à peu par des lois de plus en plus précises. Si, au contraire, le principe de Clausius se réduit à une inégalité, ce n'est pas l'imperfection de nos moyens d'observation qui en est la cause, mais la nature même de la question.	Almost everything I have just said applies to Clausius's principle. What distinguishes it is that it is expressed by an inequality. It may be said that the same is true of all physical laws, since their precision is always limited by errors of observation. But they at least lay claim to being first approximations, and we hope to replace them little by little with more and more precise laws. If, on the contrary, Clausius's principle reduces to an inequality, the cause is not the imperfection of our means of observation but the very nature of the question.

GENERAL CONCLUSIONS OF PART THREE

The principles of mechanics are conventions suggested by experiment, unlike geometry's conventions.

FRENCH	ENGLISH
3.8.65 Les principes de la mécanique se présentent donc à nous sous deux aspects différents. D'une part, ce sont des vérités fondées sur l'expérience et vérifiées d'une façon très approchée en ce qui concerne des systèmes presque isolés. D'autre part, ce sont des postulats applicables à l'ensemble de l'univers et regardés comme rigoureusement vrais.	The principles of mechanics, then, present themselves to us under two different aspects. On the one hand, they are truths founded on experiment and verified very closely as regards nearly isolated systems. On the other hand, they are postulates applicable to the whole of the universe and regarded as rigorously true.
3.8.66 Si ces postulats possèdent une généralité et une certitude qui faisaient défaut aux vérités expérimentales d'où ils sont tirés, c'est qu'ils se réduisent en dernière analyse à une simple convention que nous avons le droit de faire, parce que nous sommes certains d'avance qu'aucune expérience ne viendra la contredire.	If these postulates possess a generality and a certainty that were lacking in the experimental truths from which they are drawn, it is because in the last analysis they reduce to a mere convention that we have the right to make, because we are certain in advance that no experiment will ever contradict it.
3.8.67 Cette convention n'est pourtant pas absolument arbitraire ; elle ne sort pas de notre caprice ; nous l'adoptons parce que certaines expériences nous ont montré qu'elle serait commode.	This convention, however, is not absolutely arbitrary; it does not spring from our whim; we adopt it because certain experiments have shown us that it would be convenient.
3.8.68 On s'explique ainsi comment l'expérience a pu édifier les principes de la mécanique, et pourquoi cependant elle ne pourra les renverser.	We can thus understand how experiment was able to build up the principles of mechanics, and yet why it will never be able to overthrow them.
3.8.69 Comparons avec la géométrie. Les propositions fondamentales de la géométrie, comme par exemple le postulatum d'Euclide, ne sont non plus que des conventions, et il est tout aussi déraisonnable de chercher si elles sont vraies ou fausses que de demander si le système métrique est vrai ou faux.	Let us compare this with geometry. The fundamental propositions of geometry, such as Euclid's postulate, are likewise nothing but conventions, and it is just as unreasonable to ask whether they are true or false as to ask whether the metric system is true or false.

	FRENCH	ENGLISH
3.8.70	Seulement ces conventions sont commodes, et cela, ce sont certaines expériences qui nous l'apprennent.	Only, these conventions are convenient, and it is certain experiments that teach us so.
3.8.71	Au premier abord, l'analogie est complète ; le rôle de l'expérience semble le même. On sera donc tenté de dire : Ou bien la mécanique doit être regardée comme une science expérimentale, et alors il doit en être de même de la géométrie ; ou bien au contraire la géométrie est une science déductive, et alors on peut en dire autant de la mécanique.	At first sight the analogy is complete; the role of experiment seems the same. We shall therefore be tempted to say: either mechanics must be regarded as an experimental science, and then the same must hold for geometry; or else, on the contrary, geometry is a deductive science, and then the same can be said of mechanics.
3.8.72	Une pareille conclusion serait illégitime. Les expériences qui nous ont conduits à adopter comme plus commodes les conventions fondamentales de la géométrie portent sur des objets qui n'ont rien de commun avec ceux qu'étudie la géométrie ; elles portent sur les propriétés des corps solides, sur la propagation rectiligne de la lumière. Ce sont des expériences de mécanique, des expériences d'optique ; on ne peut à aucun titre les regarder comme des expériences de géométrie. Et même la principale raison pour laquelle notre géométrie nous semble commode, c'est que les différentes parties de notre corps, notre œil, nos membres, jouissent précisément des propriétés des corps solides. À ce compte, nos expériences fondamentales sont avant tout des expériences de physiologie, qui portent, non sur l'espace qui est l'objet que doit étudier le géomètre, mais sur son corps, c'est-à-dire sur l'instrument dont il doit se servir pour cette étude.	Such a conclusion would be illegitimate. The experiments that led us to adopt the fundamental conventions of geometry as more convenient bear on objects that have nothing in common with those that geometry studies; they bear on the properties of solid bodies, on the propagation of light in straight lines. They are experiments in mechanics, experiments in optics; they cannot in any sense be regarded as experiments in geometry. And indeed the main reason why our geometry seems convenient to us is that the various parts of our body, our eye, our limbs, possess precisely the properties of solid bodies. On this reckoning, our fundamental experiments are above all experiments in physiology, which bear not on space, the object the geometer has to study, but on his body, that is, on the instrument he must use for this study.
3.8.73	Au contraire, les conventions fondamentales de la mécanique et les expériences qui nous démontrent qu'elles sont commodes portent bien sur les mêmes objets ou sur des objets analogues. Les principes conventionnels et généraux sont la généralisation naturelle et directe des principes expérimentaux et particuliers.	The fundamental conventions of mechanics, on the contrary, and the experiments that show us they are convenient, do bear on the same objects or on similar ones. The conventional and general principles are the natural and direct generalization of the experimental and particular principles.
3.8.74	Qu'on ne dise pas que je trace ainsi des frontières artificielles entre les sciences ; que si je sépare par une barrière la géométrie proprement dite de l'étude des corps solides, je pourrais tout aussi bien en élever une entre la mécanique expérimentale et la mécanique conventionnelle des principes généraux. Qui ne voit en effet qu'en séparant ces deux sciences je les mutile l'une et l'autre, et que ce qui restera de la mécanique conventionnelle quand elle sera isolée ne sera que bien peu de chose, et ne pourra nullement être comparé à ce superbe corps de doctrine que l'on appelle géométrie ?	Let no one say that I am thus drawing artificial boundaries between the sciences; that if I put up a barrier between geometry proper and the study of solid bodies, I could just as well raise one between experimental mechanics and the conventional mechanics of the general principles. For who does not see that by separating these two sciences I should mutilate them both, and that what would remain of conventional mechanics once isolated would amount to very little, and could in no way be compared with that superb body of doctrine called geometry?

	FRENCH	ENGLISH
3.8.75	On comprend maintenant pourquoi l'enseignement de la mécanique doit rester expérimental.	We can now understand why the teaching of mechanics should remain experimental.
3.8.76	C'est ainsi seulement qu'il pourra nous faire comprendre la genèse de la science, et cela est indispensable pour l'intelligence complète de la science elle-même.	Only in this way can it make us understand how science came into being, and that is indispensable for a full understanding of science itself.
3.8.77	D'ailleurs, si on étudie la mécanique, c'est pour l'appliquer ; et on ne peut l'appliquer que si elle reste objective. Or, ainsi que nous l'avons vu, ce que les principes gagnent en généralité et en certitude, ils le perdent en objectivité. C'est donc surtout avec le côté objectif des principes qu'il convient de se familiariser de bonne heure, et on ne peut le faire qu'en allant du particulier au général, au lieu de suivre la marche inverse.	Besides, if we study mechanics, it is in order to apply it; and we can apply it only if it remains objective. Now, as we have seen, what the principles gain in generality and certainty they lose in objectivity. It is therefore above all with the objective side of the principles that we should become familiar early on, and this can be done only by going from the particular to the general, instead of following the reverse course.
3.8.78	Les principes sont des conventions et des définitions déguisées. Ils sont cependant tirés de lois expérimentales, ces lois ont été pour ainsi dire érigées en principes auxquels notre esprit attribue une valeur absolue.	The principles are conventions and disguised definitions. Yet they are drawn from experimental laws; these laws have been, so to speak, raised to the rank of principles, to which our mind attributes an absolute value.
3.8.79	Quelques philosophes ont trop généralisé ; ils ont cru que les principes étaient toute la science et par conséquent que toute la science était conventionnelle.	Some philosophers have generalized too far; they have believed that the principles were the whole of science, and consequently that the whole of science was conventional.
3.8.80	Cette doctrine paradoxale, qu'on a appelée le nominalisme, ne soutient pas l'examen.	This paradoxical doctrine, which has been called nominalism, does not stand up to examination.
3.8.81	Comment une loi peut-elle devenir un principe ? Elle exprimait un rapport entre deux termes réels A et B. Mais elle n'était pas rigoureusement vraie, elle n'était qu'approchée. Nous introduisons arbitrairement un terme intermédiaire C plus ou moins fictif et C est *par définition* ce qui a avec A *exactement* la relation exprimée par la loi.	How can a law become a principle? It expressed a relation between two real terms A and B. But it was not rigorously true; it was only approximate. We arbitrarily introduce an intermediate term C, more or less fictitious, and C is *by definition* that which has *exactly* the relation to A expressed by the law.
3.8.82	Alors notre loi s'est décomposée en un principe absolu et rigoureux qui exprime le rapport de A à C et une loi expérimentale approchée et revisable qui exprime le rapport de C à B. Il est clair que si loin que l'on pousse cette décomposition, il restera toujours des lois.	Then our law has been broken up into an absolute and rigorous principle, which expresses the relation of A to C, and an approximate and revisable experimental law, which expresses the relation of C to B. It is clear that however far this decomposition is pushed, there will always remain laws.
3.8.83	Nous allons entrer maintenant dans le domaine des lois proprement dites.	We shall now enter the domain of laws properly so called.

Part Four: Nature

La nature
Hypotheses in physics, the meaning of physical theories, the calculus of probabilities, optics and electrodynamics from Fresnel and Maxwell to Lorentz, and the end of matter (Chapters IX–XIV).

CHAPITRE IX. LES HYPOTHÈSES EN PHYSIQUE.

	FRENCH	ENGLISH
4.9.1	Rôle de l'expérience et de la généralisation. — L'expérience est la source unique de la vérité : elle seule peut nous apprendre quelque chose de nouveau ; elle seule peut nous donner la certitude. Voilà deux points que nul ne peut contester.	The role of experiment and generalization.—Experiment is the sole source of truth: it alone can teach us anything new; it alone can give us certainty. These are two points that no one can dispute.
4.9.2	Mais alors si l'expérience est tout, quelle place restera-t-il pour la physique mathématique ? Qu'est-ce que la physique expérimentale a à faire d'un tel auxiliaire qui semble inutile et peut-être même dangereux ?	But then, if experiment is everything, what place will be left for mathematical physics? What has experimental physics to do with such an auxiliary, which seems useless and perhaps even dangerous?
4.9.3	Et pourtant la physique mathématique existe ; elle a rendu des services indéniables ; il y a là un fait qu'il est nécessaire d'expliquer.	And yet mathematical physics exists; it has rendered undeniable services; this is a fact that needs to be explained.
4.9.4	C'est qu'il ne suffit pas d'observer, il faut se servir de ses observations, et pour cela il faut généraliser. C'est ce que l'on a fait de tout temps ; seulement, comme le souvenir des erreurs passées a rendu l'homme de plus en plus circonspect, on a observé de plus en plus et généralisé de moins en moins.	The explanation is that it is not enough to observe; we must make use of our observations, and for that we must generalize. This has been done in every age; only, as the memory of past errors has made man more and more cautious, people have observed more and more and generalized less and less.
4.9.5	Chaque siècle se moquait du précédent, l'accusant d'avoir généralisé trop vite et trop naïvement. Descartes avait pitié des Ioniens ; Descartes à son tour nous fait sourire ; sans aucun doute nos fils riront de nous quelque jour.	Each century mocked the one before, accusing it of having generalized too quickly and too naively. Descartes pitied the Ionians; Descartes in his turn makes us smile; no doubt our children will laugh at us some day.[1]
4.9.6	Mais alors ne pouvons-nous aller tout de suite jusqu'au bout ? N'est-ce pas le moyen d'échapper à ces railleries que nous prévoyons ? Ne pouvons-nous nous contenter de l'expérience toute nue ?	But then can we not go straight to the end? Is that not the way to escape the ridicule we foresee? Can we not be content with bare experiment?
4.9.7	Non, cela est impossible ; ce serait méconnaître complètement le véritable caractère de la science. Le savant doit ordonner ; on fait la science avec des faits	No, that is impossible; it would be to misunderstand completely the true character of science. The scientist must set things in order. Science is

1 The Ionians: the earliest Greek natural philosophers (6th century BC), such as Thales and Anaximenes, who sought a single principle behind all things.

	FRENCH	ENGLISH
	comme une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierres n'est une maison.	built of facts, as a house is built of stones; but a pile of facts is no more a science than a heap of stones is a house.
4.9.8	Et avant tout le savant doit prévoir. Carlyle a écrit quelque part quelque chose comme ceci : « Le fait seul importe ; Jean sans Terre a passé par ici, voilà ce qui est admirable, voilà une réalité pour laquelle je donnerais toutes les théories du monde ». Carlyle était un compatriote de Bacon ; mais Bacon n'aurait pas dit cela. C'est là le langage de l'historien. Le physicien dirait plutôt : « Jean sans Terre a passé par ici ; cela m'est bien égal, puisqu'il n'y repassera plus ».	And above all the scientist must predict. Carlyle wrote somewhere something like this: "Fact alone matters; John Lackland passed by here—that is what is admirable, that is a reality for which I would give all the theories in the world." Carlyle was a fellow countryman of Bacon; but Bacon would not have said that. That is the language of the historian. The physicist would rather say: "John Lackland passed by here; that is all the same to me, since he will never pass this way again."[2]
4.9.9	Nous savons tous qu'il y a de bonnes expériences et qu'il y en a de mauvaises. Celles-ci s'accumuleront en vain ; qu'on en ait fait cent, qu'on en ait fait mille, un seul travail d'un vrai maître, d'un Pasteur par exemple, suffira pour les faire tomber dans l'oubli. Bacon aurait bien compris cela, c'est lui qui a inventé le mot *experimentum crucis*. Mais Carlyle ne devait pas le comprendre. Un fait est un fait ; un écolier a lu tel nombre sur son thermomètre, il n'avait pris aucune précaution ; n'importe, il l'a lu, et s'il n'y a que le fait qui compte, c'est là une réalité au même titre que les pérégrinations du roi Jean sans Terre.	We all know that there are good experiments and bad ones. The bad ones will pile up in vain; whether a hundred have been made or a thousand, a single piece of work by a true master, by a Pasteur for example, will be enough to consign them to oblivion. Bacon would have understood this well; it was he who invented the term *experimentum crucis*. But Carlyle could hardly be expected to understand it. A fact is a fact: a schoolboy read such and such a number on his thermometer; he had taken no precautions; no matter, he read it, and if only the fact counts, it is a reality just as much as the wanderings of King John Lackland.[3]
	Pourquoi le fait que cet écolier a fait cette lecture est-il sans intérêt, tandis que le fait qu'un physicien habile aurait fait une autre lecture serait au contraire très important ? C'est que de la première lecture nous ne pouvons rien conclure. Qu'est-ce donc qu'une bonne expérience ? C'est celle qui nous fait connaître autre chose qu'un fait isolé ; c'est celle qui nous permet de prévoir, c'est-à-dire celle qui nous permet de généraliser.	Why is the fact that this schoolboy took this reading of no interest, while the fact that a skilled physicist had taken another reading would, on the contrary, be very important? Because from the first reading we can conclude nothing. What, then, is a good experiment? It is one that teaches us something other than an isolated fact; it is one that enables us to predict, that is, one that enables us to generalize.
4.9.10	Car sans généralisation, la prévision est impossible. Les circonstances où l'on a opéré ne se reproduiront jamais toutes à la fois. Le fait observé ne recommencera donc jamais ; la seule chose que l'on puisse affirmer, c'est que dans des circonstances analogues, un fait analogue se produira. Pour prévoir il faut donc au moins invoquer l'analogie, c'est-à-dire déjà généraliser.	For without generalization prediction is impossible. The circumstances in which one has worked will never all recur at once. The observed fact will therefore never happen again; the only thing that can be asserted is that in similar circumstances a similar fact will occur. To predict, then, we must at least invoke analogy—that is, we must already generalize.
4.9.11	Si timide que l'on soit, il faut bien que l'on interpole ; l'expérience ne nous donne qu'un certain nombre de	However timid one may be, one has to interpolate. Experiment gives us only a certain number of isol-

2 Thomas Carlyle (1795–1881), Scottish historian and essayist; John Lackland is King John of England (reigned 1199–1216).

	FRENCH	ENGLISH
	points isolés, il faut les réunir par un trait continu ; c'est là une véritable généralisation. Mais on fait plus, la courbe que l'on tracera passera entre les points observés et près de ces points ; elle ne passera pas par ces points eux-mêmes. Ainsi on ne se borne pas à généraliser l'expérience, on la corrige ; et le physicien qui voudrait s'abstenir de ces corrections et se contenter vraiment de l'expérience toute nue serait forcé d'énoncer des lois bien extraordinaires.	ated points; we must join them by a continuous line, and that is a genuine generalization. But we do more: the curve we draw will pass between the observed points and close to them; it will not pass through the points themselves. Thus we do not merely generalize experiment, we correct it; and the physicist who tried to abstain from these corrections and truly content himself with bare experiment would be forced to state very extraordinary laws.
4.9.12	Les faits tout nus ne sauraient donc nous suffire ; c'est pourquoi il nous faut la science ordonnée ou plutôt organisée.	Bare facts, then, cannot suffice for us; that is why we need science that is ordered, or rather organized.
4.9.13	On dit souvent qu'il faut expérimenter sans idée préconçue. Cela n'est pas possible ; non seulement ce serait rendre toute expérience stérile, mais on le voudrait qu'on ne le pourrait pas. Chacun porte en soi sa conception du monde dont il ne peut se défaire si aisément. Il faut bien, par exemple, que nous nous servions du langage, et notre langage n'est pétri que d'idées préconçues et ne peut l'être d'autre chose. Seulement ce sont des idées préconçues inconscientes, mille fois plus dangereuses que les autres.	It is often said that one should experiment without preconceived ideas. That is not possible. Not only would it make every experiment sterile, but even if we wanted to, we could not. Everyone carries within himself his own conception of the world, and he cannot shake it off so easily. We must, for example, use language, and our language is kneaded through and through with preconceived ideas and can be made of nothing else. Only, these are unconscious preconceived ideas, a thousand times more dangerous than the others.
4.9.14	Dirons-nous que si nous en faisons intervenir d'autres, dont nous aurons pleine conscience, nous ne ferons qu'aggraver le mal ! je ne le crois pas ; j'estime plutôt qu'elles se serviront mutuellement de contrepoids, j'allais dire d'antidote ; elles s'accorderont généralement mal entre elles ; elles entreront en conflit les unes avec les autres et par là elles nous forceront à envisager les choses sous différents aspects. C'est assez pour nous affranchir : on n'est plus esclave quand on peut choisir son maître.	Shall we say that if we bring in others, of which we are fully conscious, we shall only make matters worse? I do not think so. I rather believe that they will serve as counterweights to one another—I was going to say as antidotes. They will generally agree poorly with one another; they will come into conflict, and in doing so they will force us to look at things from different sides. That is enough to set us free: one is no longer a slave when one can choose one's master.
4.9.15	Ainsi, grâce à la généralisation, chaque fait observé nous en fait prévoir un grand nombre ; seulement nous ne devons pas oublier que le premier seul est certain, que tous les autres ne sont que probables. Si solidement assise que puisse nous paraître une prévision, nous ne sommes jamais sûrs *absolument* que l'expérience ne la démentira pas, si nous entreprenons de la vérifier. Mais la probabilité est souvent assez grande pour que pratiquement nous puissions nous en contenter. Mieux vaut prévoir sans certitude que de ne pas prévoir du tout.	Thus, thanks to generalization, each observed fact lets us foresee a great many others. Only, we must not forget that the first alone is certain and that all the others are merely probable. However firmly grounded a prediction may seem to us, we are never *absolutely* sure that experiment will not refute it if we set about verifying it. But the probability is often great enough for us to be content with it in practice. Better to foresee without certainty than not to foresee at all.
4.9.16		

3 Latin, "crucial experiment"; Bacon himself spoke of an *instantia crucis*, a "crucial instance."

	FRENCH	ENGLISH
	On ne doit donc jamais dédaigner de faire une vérification, quand l'occasion s'en présente. Mais toute expérience est longue et difficile, les travailleurs sont peu nombreux ; et le nombre des faits que nous avons besoin de prévoir est immense ; auprès de cette masse, le nombre des vérifications directes que nous pourrons faire ne sera jamais qu'une quantité négligeable.	So we must never disdain to make a verification when the opportunity arises. But every experiment is long and difficult, and workers are few, while the number of facts we need to foresee is immense. Beside this mass, the number of direct verifications we can make will never be more than a negligible quantity.
4.9.17	De ce peu que nous pouvons directement atteindre, il faut tirer le meilleur parti ; il faut que chaque expérience nous permette le plus grand nombre possible de prévisions et avec le plus haut degré de probabilité qu'il se pourra. Le problème est pour ainsi dire d'augmenter le rendement de la machine scientifique.	Of the little we can reach directly, we must make the best use. Each experiment must allow us the greatest possible number of predictions, with the highest degree of probability that can be had. The problem is, so to speak, to increase the yield of the scientific machine.
4.9.18	Qu'on me permette de comparer la Science à une bibliothèque qui doit s'accroître sans cesse ; le bibliothécaire ne dispose pour ses achats que de crédits insuffisants ; il doit s'efforcer de ne pas les gaspiller.	Let me compare science to a library that must keep on growing. The librarian has only insufficient funds for his purchases, and he must try not to waste them.
4.9.19	C'est la physique expérimentale qui est chargée des achats ; elle seule peut donc enrichir la bibliothèque.	It is experimental physics that is in charge of purchases; it alone, then, can enrich the library.
4.9.20	Quant à la physique mathématique, elle aura pour mission de dresser le catalogue. Si ce catalogue est bien fait, la bibliothèque n'en sera pas plus riche. Mais il pourra aider le lecteur à se servir de ces richesses.	As for mathematical physics, its task will be to draw up the catalogue. If this catalogue is well made, the library will be none the richer for it. But it may help the reader to make use of its riches.
4.9.21	Et même en montrant au bibliothécaire les lacunes de ses collections, il lui permettra de faire de ses crédits un emploi judicieux ; ce qui est d'autant plus important que ces crédits sont tout à fait insuffisants.	And further, by showing the librarian the gaps in his collections, it will allow him to spend his funds wisely. This is all the more important because those funds are quite inadequate.
4.9.22	Tel est donc le rôle de la physique mathématique ; elle doit guider la généralisation de façon à augmenter ce que j'appelais tout à l'heure le rendement de la science. Par quels moyens y parvient-elle, et comment peut-elle le faire sans danger, c'est ce qu'il nous reste à examiner.	Such, then, is the role of mathematical physics: it must guide generalization so as to increase what I called a moment ago the yield of science. By what means it achieves this, and how it can do so without danger, is what remains for us to examine.
4.9.23	L'unité de la nature. — Observons d'abord que toute généralisation suppose dans une certaine mesure la croyance à l'unité et à la simplicité de la nature. Pour l'unité il ne peut pas y avoir de difficulté. Si les diverses parties de l'univers n'étaient pas comme les organes d'un même corps, elles n'agiraient pas les unes sur les autres, elles s'ignoreraient mutuellement ; et nous, en particulier, nous n'en connaîtrions qu'une seule. Nous n'avons donc pas à nous demander si la nature est une, mais comment elle est une.	The unity of nature.—Let us first observe that every generalization presupposes, to some extent, a belief in the unity and simplicity of nature. As for unity, there can be no difficulty. If the various parts of the universe were not like the organs of a single body, they would not act on one another; they would know nothing of each other; and we in particular would know only one of them. So we need not ask whether nature is one, but how it is one.
4.9.24		

	FRENCH	ENGLISH
	Pour le second point, cela ne va pas si aisément. Il n'est pas sûr que la nature soit simple. Pouvons-nous sans danger faire comme si elle l'était ?	On the second point, things are not so easy. It is not certain that nature is simple. Can we, without danger, act as if it were?
4.9.25	Il fut un temps où la simplicité de la loi de Mariotte était un argument invoqué en faveur de son exactitude ; où Fresnel lui-même, après avoir dit, dans une conversation avec Laplace, que la nature ne se soucie pas des difficultés analytiques, se croyait obligé de donner des explications pour ne pas trop heurter l'opinion régnante.	There was a time when the simplicity of Mariotte's law was put forward as an argument for its accuracy. In those days Fresnel himself, having said in a conversation with Laplace that nature is not concerned with analytical difficulties, felt obliged to offer explanations so as not to clash too sharply with prevailing opinion.[4]
4.9.26	Aujourd'hui les idées ont bien changé ; et cependant ceux qui ne croient pas que les lois naturelles doivent être simples, sont encore obligés souvent de faire comme s'ils le croyaient. Ils ne pourraient se soustraire entièrement à cette nécessité sans rendre impossible toute généralisation et par conséquent toute science.	Today ideas have changed greatly. And yet those who do not believe that natural laws must be simple are still often obliged to act as if they believed it. They could not escape this necessity entirely without making all generalization impossible, and consequently all science.
4.9.27	Il est clair qu'un fait quelconque peut se généraliser d'une infinité de manières, et il s'agit de choisir ; le choix ne peut être guidé que par des considérations de simplicité. Prenons le cas le plus banal, celui de l'interpolation. Nous faisons passer un trait continu, aussi régulier que possible, entre les points donnés par l'observation. Pourquoi évitons-nous les points anguleux, les inflexions trop brusques ? Pourquoi ne faisons-nous pas décrire à notre courbe les zigzags les plus capricieux ? C'est parce que nous savons d'avance, ou que nous croyons savoir que la loi à exprimer ne peut pas être si compliquée que cela.	It is clear that any fact can be generalized in an infinity of ways, and we must choose; the choice can be guided only by considerations of simplicity. Take the most commonplace case, that of interpolation. We draw a continuous line, as regular as possible, between the points given by observation. Why do we avoid sharp corners and overly abrupt inflections? Why do we not make our curve trace the most capricious zigzags? Because we know in advance, or think we know, that the law to be expressed cannot be as complicated as that.
4.9.28	On peut déduire la masse de Jupiter soit des mouvements de ses satellites, soit des perturbations des grosses planètes, soit de celles des petites planètes. Si l'on prend la moyenne des déterminations obtenues par ces trois méthodes, on trouve trois nombres très voisins mais différents. On pourrait interpréter ce résultat en supposant que le coefficient de la gravitation n'est pas le même dans les trois cas ; les observations seraient certainement beaucoup mieux représentées. Pourquoi rejetons-nous cette interprétation ? Ce n'est pas qu'elle soit absurde, c'est qu'elle est inutilement compliquée. On ne l'acceptera que le jour où elle s'imposera, et elle ne s'impose pas encore.	The mass of Jupiter can be deduced from the motions of its satellites, from the perturbations of the major planets, or from those of the minor planets. If we take the mean of the determinations obtained by each of these three methods, we find three numbers very close together but different. One could interpret this result by supposing that the coefficient of gravitation is not the same in the three cases; the observations would certainly be represented much better. Why do we reject this interpretation? Not because it is absurd, but because it is needlessly complicated. We shall accept it only on the day it forces itself upon us, and it does not do so yet.
4.9.29	En résumé, le plus souvent, toute loi est réputée simple jusqu'à preuve du contraire.	In short, most often every law is held to be simple until the contrary is proved.

4 Pierre-Simon Laplace (1749–1827), French mathematician and astronomer.

	FRENCH	ENGLISH
4.9.30	Cette habitude est imposée aux physiciens par les raisons que je viens d'expliquer ; mais comment la justifier en présence des découvertes qui nous montrent chaque jour de nouveaux détails plus riches et plus complexes ? Comment même la concilier avec le sentiment de l'unité de la nature ? car si tout dépend de tout, des rapports où interviennent tant d'objets divers ne peuvent plus être simples.	This habit is imposed on physicists for the reasons I have just explained. But how can it be justified in the face of discoveries that show us every day new details, richer and more complex? How can it even be reconciled with the sense of the unity of nature? For if everything depends on everything, relations involving so many different objects can no longer be simple.
4.9.31	Si nous étudions l'histoire de la science, nous voyons se produire deux phénomènes pour ainsi dire inverses : tantôt c'est la simplicité qui se cache sous des apparences complexes, tantôt c'est au contraire la simplicité qui est apparente et qui dissimule des réalités extrêmement compliquées.	If we study the history of science, we see two phenomena occur that are, so to speak, the reverse of each other. Sometimes simplicity lies hidden beneath complex appearances. Sometimes, on the contrary, it is the simplicity that is apparent, and it conceals extremely complicated realities.
4.9.32	Quoi de plus compliqué que les mouvements troublés des planètes, quoi de plus simple que la loi de Newton ? Là, la nature, se jouant, comme disait Fresnel, des difficultés analytiques, n'emploie que des moyens simples et engendre, par leur combinaison, je ne sais quel écheveau inextricable. C'est là la simplicité cachée, celle qu'il faut découvrir.	What could be more complicated than the perturbed motions of the planets, and what simpler than Newton's law? There nature, making light, as Fresnel said, of analytical difficulties, uses only simple means, and by combining them produces a hopelessly tangled skein. That is hidden simplicity, the kind that must be discovered.
4.9.33	Les exemples du contraire abondent. Dans la théorie cinétique des gaz, on envisage des molécules animées de grandes vitesses, dont les trajectoires, déformées par des chocs incessants, ont les formes les plus capricieuses, et sillonnent l'espace dans tous les sens. Le résultat observable est la loi simple de Mariotte ; chaque fait individuel était compliqué ; la loi des grands nombres a rétabli la simplicité dans la moyenne. Ici la simplicité n'est qu'apparente, et la grossièreté de nos sens nous empêche seule d'apercevoir la complexité.	Examples of the opposite abound. In the kinetic theory of gases, we consider molecules moving at great speeds, whose paths, distorted by incessant collisions, take the most capricious shapes and crisscross space in every direction. The observable result is Mariotte's simple law. Each individual fact was complicated; the law of large numbers has restored simplicity in the average. Here the simplicity is only apparent, and only the coarseness of our senses prevents us from perceiving the complexity.
4.9.34	Bien des phénomènes obéissent à une loi de proportionnalité ; mais pourquoi ? Parce que dans ces phénomènes il y a quelque chose qui est très petit. La loi simple observée n'est alors qu'une traduction de cette règle analytique générale, d'après laquelle l'accroissement infiniment petit d'une fonction est proportionnel à l'accroissement de la variable. Comme en réalité nos accroissements ne sont pas infiniment petits, mais très petits, la loi de proportionnalité n'est qu'approchée et la simplicité n'est qu'apparente. Ce que je viens de dire s'applique à la règle de la superposition des petits mouvements, dont l'emploi est si fécond et qui est le fondement de l'optique.	Many phenomena obey a law of proportionality; but why? Because in these phenomena there is something that is very small. The simple law observed is then merely a translation of the general analytical rule according to which the infinitely small increment of a function is proportional to the increment of the variable. Since in reality our increments are not infinitely small but only very small, the law of proportionality is only approximate and the simplicity only apparent. What I have just said applies to the rule of the superposition of small motions, which is so fruitful in use and which is the foundation of optics.
4.9.35		

	FRENCH	ENGLISH
	Et la loi de Newton elle-même ? Sa simplicité, si longtemps cachée, n'est peut-être qu'apparente. Qui sait si elle n'est pas due à quelque mécanisme compliqué, au choc de quelque matière subtile animée de mouvements irréguliers, et si elle n'est devenue simple que par le jeu des moyennes et des grands nombres ? En tout cas il est difficile de ne pas supposer que la loi véritable contient des termes complémentaires, qui deviendraient sensibles aux petites distances. Si en astronomie, ils sont négligeables devant celui de Newton et si la loi retrouve ainsi sa simplicité, ce serait uniquement à cause de l'énormité des distances célestes.	And Newton's law itself? Its simplicity, so long hidden, is perhaps only apparent. Who knows whether it is not due to some complicated mechanism, to the impacts of some subtle matter in irregular motion? And who knows whether it has become simple only through the play of averages and large numbers? In any case it is hard not to suppose that the true law contains additional terms which would become appreciable at small distances. If in astronomy they are negligible compared with Newton's term, and the law thereby regains its simplicity, this would be solely because of the enormity of celestial distances.
4.9.36	Sans doute, si nos moyens d'investigation devenaient de plus en plus pénétrants, nous découvririons le simple sous le complexe, puis le complexe sous le simple, puis de nouveau le simple sous le complexe, et ainsi de suite, sans que nous puissions prévoir quel sera le dernier terme.	No doubt, if our means of investigation became more and more penetrating, we should discover the simple beneath the complex, then the complex beneath the simple, then again the simple beneath the complex, and so on, without our being able to foresee what the last term will be.
4.9.37	Il faut bien s'arrêter quelque part, et pour que la science soit possible, il faut s'arrêter quand on a trouvé la simplicité. C'est là le seul terrain sur lequel nous pourrons élever l'édifice de nos généralisations. Mais, cette simplicité n'étant qu'apparente, ce terrain sera-t-il assez solide ? C'est ce qu'il convient de rechercher.	We must stop somewhere, and for science to be possible we must stop when we have found simplicity. That is the only ground on which we can raise the edifice of our generalizations. But since this simplicity is only apparent, will the ground be solid enough? That is what we must look into.
4.9.38	Pour cela, voyons quel rôle joue dans nos généralisations la croyance à la simplicité. Nous avons vérifié une loi simple dans un assez grand nombre de cas particuliers ; nous nous refusons à admettre que cette rencontre, si souvent répétée, soit un simple effet du hasard et nous en concluons que la loi doit être vraie dans le cas général.	To do so, let us see what role belief in simplicity plays in our generalizations. We have verified a simple law in a fairly large number of particular cases. We refuse to admit that this agreement, so often repeated, is a mere effect of chance, and we conclude that the law must be true in the general case.
4.9.39	Képler remarque que les positions d'une planète observées par Tycho sont toutes sur une même ellipse. Il n'a pas un seul instant la pensée que, par un jeu singulier du hasard, Tycho n'a jamais regardé le ciel qu'au moment où la trajectoire véritable de la planète venait couper cette ellipse.	Kepler notices that the positions of a planet observed by Tycho all lie on one and the same ellipse. Not for a single moment does he imagine that, by a strange freak of chance, Tycho only ever looked at the sky at the moments when the planet's true path happened to cross that ellipse.[5]
4.9.40	Qu'importe alors que la simplicité soit réelle, ou qu'elle recouvre une vérité complexe ? Qu'elle soit due à l'influence des grands nombres, qui nivelle les différences individuelles, qu'elle soit due à la grandeur ou à la petitesse de certaines quantités qui permet de négliger certains termes, dans tous les cas, elle n'est pas	What does it matter, then, whether the simplicity is real or whether it covers a complex truth? It may be due to the influence of large numbers, which levels out individual differences, or to the largeness or smallness of certain quantities, which allows certain terms to be neglected; in every case

5 Johannes Kepler (1571–1630) derived his laws of planetary motion from the observations of the Danish astronomer Tycho Brahe (1546–1601).

	FRENCH	ENGLISH
	due au hasard. Cette simplicité, réelle ou apparente, a toujours une cause. Nous pourrons donc toujours faire le même raisonnement, et si une loi simple a été observée dans plusieurs cas particuliers, nous pourrons légitimement supposer qu'elle sera encore vraie dans les cas analogues. Nous y refuser serait attribuer au hasard un rôle inadmissible.	it is not due to chance. This simplicity, real or apparent, always has a cause. We can therefore always reason in the same way: if a simple law has been observed in several particular cases, we may legitimately suppose that it will still be true in analogous cases. To refuse to do so would be to give chance an inadmissible role.
4.9.41	Cependant il y a une différence. Si la simplicité était réelle et profonde, elle résisterait à la précision croissante de nos moyens de mesure ; si donc nous croyons la nature profondément simple, nous devrions conclure d'une simplicité approchée à une simplicité rigoureuse. C'est ce qu'on faisait autrefois ; c'est ce que nous n'avons plus le droit de faire.	There is, however, a difference. If the simplicity were real and deep, it would withstand the increasing precision of our means of measurement. So if we believed nature to be deeply simple, we ought to conclude from an approximate simplicity to a rigorous one. That is what used to be done; it is what we no longer have the right to do.
4.9.42	La simplicité des lois de Képler, par exemple, n'est qu'apparente. Cela n'empêche pas qu'elles s'appliqueront, à fort peu près, à tous les systèmes analogues au système solaire, mais cela empêche qu'elles soient rigoureusement exactes.	The simplicity of Kepler's laws, for example, is only apparent. That does not prevent them from applying, very nearly, to all systems analogous to the solar system, but it does prevent them from being rigorously exact.

THE ROLE OF HYPOTHESIS

Poincaré sorts hypotheses into natural, indifferent and genuine generalizations, and warns against unconscious ones.

	FRENCH	ENGLISH
4.9.43	Rôle de l'hypothèse. — Toute généralisation est une hypothèse ; l'hypothèse a donc un rôle nécessaire que personne n'a jamais contesté. Seulement elle doit toujours être, le plus tôt possible et le plus souvent possible, soumise à la vérification. Il va sans dire que, si elle ne supporte pas cette épreuve, on doit l'abandonner sans arrière-pensée. C'est bien ce qu'on fait en général, mais quelquefois avec une certaine mauvaise humeur.	The role of hypothesis.—Every generalization is a hypothesis; hypothesis therefore has a necessary role, which no one has ever disputed. Only, it must always be submitted to verification, as soon as possible and as often as possible. It goes without saying that if it does not stand this test, it must be abandoned without a second thought. That is indeed what is generally done, but sometimes with a certain irritation.
4.9.44	Eh bien, cette mauvaise humeur même n'est pas justifiée ; le physicien qui vient de renoncer à une de ses hypothèses devrait être, au contraire, plein de joie, car il vient de trouver une occasion inespérée de découverte. Son hypothèse, j'imagine, n'avait pas été adoptée à la légère ; elle tenait compte de tous les facteurs connus qui semblaient pouvoir intervenir dans le phénomène. Si la vérification ne se fait pas, c'est qu'il y a quelque chose d'inattendu, d'extraordinaire ; c'est qu'on va trouver de l'inconnu et du nouveau.	Well, even this irritation is unjustified. The physicist who has just given up one of his hypotheses ought, on the contrary, to be full of joy, for he has just found an unexpected opportunity for discovery. His hypothesis, I imagine, had not been adopted lightly; it took account of all the known factors that seemed capable of playing a part in the phenomenon. If the verification fails, it is because there is something unexpected, something extraordinary; it is because we are about to find something unknown and new.
4.9.45	L'hypothèse ainsi renversée a-t-elle donc été stérile ? Loin de là, on peut dire qu'elle a rendu plus de services qu'une hypothèse vraie ; non seulement elle a été	Has the hypothesis thus overturned been sterile, then? Far from it; one may say it has rendered more service than a true hypothesis. Not only was

	FRENCH	ENGLISH
	l'occasion de l'expérience décisive, mais on aurait fait cette expérience par hasard, sans avoir fait l'hypothèse, qu'on n'en aurait rien tiré ; on n'y aurait rien vu d'extraordinaire ; on n'aurait catalogué qu'un fait de plus sans en déduire la moindre conséquence.	it the occasion of the decisive experiment; had that experiment been made by chance, without the hypothesis, nothing would have come of it. No one would have seen anything extraordinary in it; one more fact would simply have been catalogued, without the slightest consequence being drawn from it.
4.9.46	Maintenant à quelle condition l'usage de l'hypothèse est-il sans danger ?	Now, under what condition is the use of hypothesis free of danger?
4.9.47	Le ferme propos de se soumettre à l'expérience ne suffit pas ; il y a encore des hypothèses dangereuses ; ce sont d'abord, ce sont surtout celles qui sont tacites et inconscientes. Puisque nous les faisons sans le savoir, nous sommes impuissants à les abandonner. C'est donc là encore un service que peut nous rendre la physique mathématique. Par la précision qui lui est propre, elle nous oblige à formuler toutes les hypothèses que nous ferions sans elle, mais sans nous en douter.	A firm resolve to submit to experiment is not enough; there are still dangerous hypotheses—first and above all, those that are tacit and unconscious. Since we make them without knowing it, we are powerless to abandon them. Here again, then, is a service that mathematical physics can render us. By the precision that is proper to it, it compels us to state all the hypotheses that we should make without it, but without suspecting them.
4.9.48	Remarquons, d'autre part, qu'il importe de ne pas multiplier les hypothèses outre mesure et de ne les faire que l'une après l'autre. Si nous construisons une théorie fondée sur des hypothèses multiples, et, si l'expérience la condamne, quelle est parmi nos prémisses celle qu'il est nécessaire de changer ? Il sera impossible de le savoir. Et inversement, si l'expérience réussit, croira-t-on avoir vérifié toutes ces hypothèses à la fois ? Croira-t-on avec une seule équation avoir déterminé plusieurs inconnues ?	Let us note, on the other hand, that it is important not to multiply hypotheses beyond measure, and to make them only one at a time. If we build a theory on multiple hypotheses and experiment condemns it, which of our premises must be changed? It will be impossible to know. And conversely, if the experiment succeeds, shall we think we have verified all these hypotheses at once? Shall we think we have determined several unknowns with a single equation?
4.9.49	Il faut également avoir soin de distinguer entre les différentes sortes d'hypothèses. Il y a d'abord celles qui sont toutes naturelles et auxquelles on ne peut guère se soustraire. Il est difficile de ne pas supposer que l'influence des corps très éloignés est tout à fait négligeable, que les petits mouvements obéissent à une loi linéaire, que l'effet est une fonction continue de sa cause. J'en dirai autant des conditions imposées par la symétrie. Toutes ces hypothèses forment pour ainsi dire le fonds commun de toutes les théories de la physique mathématique. Ce sont les dernières que l'on doit abandonner.	We must also take care to distinguish between the different kinds of hypotheses. First there are those that are quite natural and that one can scarcely avoid. It is hard not to suppose that the influence of very distant bodies is quite negligible, that small motions obey a linear law, that the effect is a continuous function of its cause. I would say as much of the conditions imposed by symmetry. All these hypotheses form, so to speak, the common stock of all the theories of mathematical physics. They are the last that should be abandoned.
4.9.50	Il y a une seconde catégorie d'hypothèses que je qualifierai d'indifférentes. Dans la plupart des questions, l'analyste suppose, au début de son calcul, soit que la matière est continue, soit, inversement, qu'elle est formée d'atomes. Il aurait fait le contraire que ses résultats n'en auraient pas été changés ; il aurait eu plus	There is a second category of hypotheses, which I shall call indifferent. In most questions the analyst supposes, at the outset of his calculation, either that matter is continuous or, conversely, that it is made up of atoms. Had he done the opposite, his results would have been no different; he would

	FRENCH	ENGLISH
	de peine à les obtenir, voilà tout. Si alors l'expérience confirme ses conclusions, pensera-t-il avoir démontré, par exemple, l'existence réelle des atomes ?	only have had more trouble obtaining them, that is all. If experiment then confirms his conclusions, will he think he has demonstrated, for example, the real existence of atoms?
4.9.51	Dans les théories optiques s'introduisent deux vecteurs que l'on regarde, l'un comme une vitesse, l'autre comme un tourbillon. C'est là encore une hypothèse indifférente, puisqu'on serait arrivé aux mêmes conclusions en faisant précisément le contraire ; le succès de l'expérience ne peut donc prouver que le premier vecteur est bien une vitesse ; il ne prouve qu'une chose, c'est que c'est un vecteur ; c'est là la seule hypothèse qu'on ait réellement introduite dans les prémisses.	Optical theories bring in two vectors, one of which is regarded as a velocity and the other as a vortex. This again is an indifferent hypothesis, since we should have reached the same conclusions by doing exactly the opposite. The success of the experiment cannot therefore prove that the first vector really is a velocity. It proves only one thing, namely that it is a vector; that is the only hypothesis that has really been introduced into the premises.
	Pour lui donner cette apparence concrète qu'exige la faiblesse de notre esprit, il a bien fallu le considérer, soit comme une vitesse, soit comme un tourbillon ; de même qu'il a fallu le représenter par une lettre, soit par x, soit par y ; mais le résultat, quel qu'il soit, ne prouvera pas que l'on a eu raison ou tort de le regarder comme une vitesse ; pas plus qu'il ne prouvera que l'on a eu raison ou tort de l'appeler x et non pas y.	To give it the concrete appearance that the weakness of our minds demands, we had to regard it either as a velocity or as a vortex, just as we had to represent it by a letter, either x or y. But the result, whatever it may be, will not prove that we were right or wrong to regard it as a velocity, any more than it will prove that we were right or wrong to call it x rather than y.
4.9.52	Ces hypothèses indifférentes ne sont jamais dangereuses, pourvu qu'on n'en méconnaisse pas le caractère. Elles peuvent être utiles, soit comme artifices de calcul, soit pour soutenir notre entendement par des images concrètes, pour fixer les idées, comme on dit. Il n'y a donc pas lieu de les proscrire.	These indifferent hypotheses are never dangerous, provided their character is not misunderstood. They can be useful, either as devices of calculation or to support our understanding with concrete images—to fix our ideas, as the saying goes. There is therefore no reason to ban them.
4.9.53	Les hypothèses de la troisième catégorie sont les véritables généralisations. Ce sont elles que l'expérience doit confirmer ou infirmer. Vérifiées ou condamnées, elles pourront être fécondes. Mais, pour les raisons que j'ai exposées, elles ne le seront que si on ne les multiplie pas.	Hypotheses of the third category are the true generalizations. It is these that experiment must confirm or refute. Verified or condemned, they may be fruitful. But for the reasons I have set out, they will be so only if they are not multiplied.
4.9.54	Origine de la physique mathématique. — Pénétrons plus avant et étudions de plus près les conditions qui ont permis le développement de la physique mathématique. Nous reconnaissons du premier coup que les efforts des savants ont toujours tendu à résoudre le phénomène complexe donné directement par l'expérience en un nombre très grand de phénomènes élémentaires.	The origin of mathematical physics.—Let us go further and examine more closely the conditions that allowed mathematical physics to develop. We see at once that the efforts of scientists have always aimed at resolving the complex phenomenon given directly by experiment into a very large number of elementary phenomena.
4.9.55	Et cela de trois manières différentes : d'abord dans le temps. Au lieu d'embrasser dans son ensemble le développement progressif d'un phénomène, on cherche simplement à relier chaque instant à l'instant immédiatement antérieur ; on admet que l'état actuel du	And this in three different ways. First, in time. Instead of grasping the gradual development of a phenomenon as a whole, we seek simply to link each instant to the instant immediately before it. We assume that the present state of the world de-

FRENCH

monde ne dépend que du passé le plus proche, sans être directement influencé pour ainsi dire par le souvenir d'un passé lointain. Grâce à ce postulat, au lieu d'étudier directement toute la succession des phénomènes, on peut se borner à en écrire « l'équation différentielle » ; aux lois de Képler, on substitue celle de Newton.

4.9.56 Ensuite, on cherche à décomposer le phénomène dans l'espace. Ce que l'expérience nous donne, c'est un ensemble confus de faits se produisant sur un théâtre d'une certaine étendue ; il faut tâcher de discerner le phénomène élémentaire qui sera, au contraire, localisé dans une région très petite de l'espace.

4.9.57 Quelques exemples feront peut-être mieux comprendre ma pensée. Si l'on voulait étudier dans toute sa complexité la distribution de la température dans un solide qui se refroidit, on n'y pourrait jamais parvenir. Tout devient simple si l'on réfléchit qu'un point du solide ne peut directement céder de chaleur à un point éloigné ; il n'en cédera immédiatement qu'aux points les plus voisins, et c'est de proche en proche que le flux de chaleur pourra atteindre d'autres portions du solide. Le phénomène élémentaire, c'est l'échange de chaleur entre deux points contigus ; il est strictement localisé, et il est relativement simple, si l'on admet, comme il est naturel, qu'il n'est pas influencé par la température des molécules dont la distance est sensible.

4.9.58 Je ploie une verge ; elle va prendre une forme très compliquée dont l'étude directe serait impossible ; mais je pourrai l'aborder cependant, si j'observe que sa flexion n'est que la résultante de la déformation des éléments très petits de la verge, et que la déformation de chacun de ces éléments ne dépend que des forces qui lui sont directement appliquées et nullement de celles qui peuvent agir sur les autres éléments.

4.9.59 Dans tous ces exemples, que je pourrais multiplier sans peine, on admet qu'il n'y a pas d'action à distance ou du moins à grande distance. C'est là une hypothèse ; elle n'est pas toujours vraie, la loi de la gravitation nous le prouve ; il faut donc la soumettre à la vérification ; si elle est confirmée, même approximativement, elle est précieuse, car elle va nous permettre de faire de la physique mathématique au moins par approximations successives.

4.9.60 Si elle ne résiste pas à l'épreuve, il faut chercher autre chose d'analogue, car il y a encore d'autres moyens

ENGLISH

pends only on the most recent past, without being directly influenced, so to speak, by the memory of a distant past. Thanks to this postulate, instead of studying directly the whole succession of phenomena, we can confine ourselves to writing down its "differential equation"; for Kepler's laws we substitute Newton's.

Next, we seek to break the phenomenon down in space. What experiment gives us is a confused mass of facts occurring on a stage of some extent. We must try to discern the elementary phenomenon, which will, on the contrary, be localized in a very small region of space.

A few examples may make my meaning clearer. If we wanted to study, in all its complexity, the distribution of temperature in a cooling solid, we could never succeed. Everything becomes simple if we reflect that a point of the solid cannot give up heat directly to a distant point. It will give up heat directly only to the nearest points, and it is step by step that the flow of heat can reach other parts of the solid. The elementary phenomenon is the exchange of heat between two adjacent points. It is strictly localized, and it is relatively simple if we assume, as is natural, that it is not influenced by the temperature of molecules at an appreciable distance.

I bend a rod. It will take on a very complicated shape whose direct study would be impossible. But I can tackle it nonetheless if I observe that its bending is simply the resultant of the deformation of very small elements of the rod, and that the deformation of each of these elements depends only on the forces applied directly to it, and not at all on those that may act on the other elements.

In all these examples, which I could easily multiply, it is assumed that there is no action at a distance, or at least none at a great distance. This is a hypothesis. It is not always true, as the law of gravitation proves; it must therefore be submitted to verification. If it is confirmed, even approximately, it is precious, for it will allow us to do mathematical physics, at least by successive approximations.

If it does not stand the test, we must look for something else of the same kind, for there are still other

	FRENCH	ENGLISH
	d'arriver au phénomène élémentaire. Si plusieurs corps agissent simultanément, il peut arriver que leurs actions soient indépendantes et s'ajoutent simplement les unes aux autres, soit à la façon des vecteurs, soit à la façon des quantités scalaires. Le phénomène élémentaire est alors l'action d'un corps isolé. Ou bien encore on a affaire à de petits mouvements, ou plus généralement à de petites variations, qui obéissent à la loi bien connue de la superposition. Le mouvement observé sera alors décomposé en mouvements simples, par exemple le son en ses harmoniques, la lumière blanche en ses composantes monochromatiques.	ways of arriving at the elementary phenomenon. If several bodies act simultaneously, it may happen that their actions are independent and simply add up, either in the manner of vectors or in the manner of scalar quantities. The elementary phenomenon is then the action of a single body. Or again, we may be dealing with small motions, or more generally with small variations, which obey the well-known law of superposition. The observed motion will then be broken down into simple motions—sound, for example, into its harmonics, and white light into its monochromatic components.
4.9.61	Quand on a discerné de quel côté il convient de chercher le phénomène élémentaire, par quels moyens peut-on l'atteindre ?	Once we have made out in which direction we should seek the elementary phenomenon, by what means can we reach it?
4.9.62	D'abord, il arrivera souvent que, pour le deviner, ou plutôt pour en deviner ce qui nous est utile, il ne sera pas nécessaire d'en pénétrer le mécanisme ; la loi des grands nombres suffira. Reprenons l'exemple de la propagation de la chaleur ; chaque molécule rayonne vers chaque molécule voisine ; suivant quelle loi, nous n'avons pas besoin de le savoir ; si nous supposions quelque chose à cet égard, ce serait une hypothèse indifférente et par conséquent inutile et invérifiable. Et, en effet, par l'action des moyennes et grâce à la symétrie du milieu, toutes les différences se nivellent et, quelle que soit l'hypothèse faite, le résultat est toujours le même.	First, it will often happen that, in order to guess it, or rather to guess what of it is useful to us, we shall not need to penetrate its mechanism; the law of large numbers will suffice. Let us return to the example of the propagation of heat. Each molecule radiates toward each neighboring molecule; according to what law, we need not know. If we supposed anything on that score, it would be an indifferent hypothesis, and therefore useless and unverifiable. And indeed, through the action of averages and thanks to the symmetry of the medium, all differences are leveled out, and whatever hypothesis is made, the result is always the same.
4.9.63	La même circonstance se présente dans la théorie de l'élasticité, dans celle de la capillarité ; les molécules voisines s'attirent et se repoussent ; nous n'avons pas besoin de savoir d'après quelle loi ; il nous suffit que cette attraction ne soit sensible qu'aux petites distances, que les molécules soient très nombreuses, que le milieu soit symétrique et nous n'aurons plus qu'à laisser agir la loi des grands nombres.	The same circumstance arises in the theory of elasticity and in that of capillarity. Neighboring molecules attract and repel one another; we need not know according to what law. It is enough for us that this attraction be appreciable only at small distances, that the molecules be very numerous, and that the medium be symmetrical; then we have only to let the law of large numbers do its work.
4.9.64	Ici encore la simplicité du phénomène élémentaire se cachait sous la complication du phénomène résultant observable ; mais, à son tour, cette simplicité n'était qu'apparente et dissimulait un mécanisme très complexe.	Here again the simplicity of the elementary phenomenon lay hidden beneath the complication of the resulting observable phenomenon; but this simplicity, in its turn, was only apparent and concealed a very complex mechanism.
4.9.65	Le meilleur moyen d'arriver au phénomène élémentaire serait évidemment l'expérience. Il faudrait, par des artifices expérimentaux, dissocier le faisceau complexe	The best way to arrive at the elementary phenomenon would obviously be experiment. We should, by experimental devices, take apart the

FRENCH

que la nature offre à nos recherches et en étudier avec soin les éléments aussi purifiés que possible ; par exemple, on décomposera la lumière blanche naturelle en lumières monochromatiques à l'aide du prisme et en lumières polarisées à l'aide du polariseur.

4.9.66 Malheureusement, cela n'est ni toujours possible, ni toujours suffisant et il faut quelquefois que l'esprit devance l'expérience. Je n'en citerai qu'un exemple qui m'a toujours vivement frappé :

4.9.67 Si je décompose la lumière blanche, je pourrai isoler une petite portion du spectre, mais, si petite qu'elle soit, elle conservera une certaine largeur. De même, les lumières naturelles dites *monochromatiques* nous donnent une raie très fine, mais qui n'est pas cependant infiniment fine. On pourrait supposer qu'en étudiant expérimentalement les propriétés de ces lumières naturelles, en opérant avec des raies spectrales de plus en plus fines, et en passant enfin à la limite, pour ainsi dire, on arrivera à connaître les propriétés d'une lumière rigoureusement monochromatique.

4.9.68 Cela ne serait pas exact. Je suppose que deux rayons émanent d'une même source, qu'on les polarise d'abord dans deux plans rectangulaires, qu'on les ramène ensuite au même plan de polarisation et qu'on cherche à les faire interférer. Si la lumière était *rigoureusement* monochromatique, ils interféreraient ; mais, avec nos lumières à peu près monochromatiques, il n'y aura pas d'interférence, et cela si étroite que soit la raie ; il faudrait, pour qu'il en fût autrement, qu'elle fût plusieurs millions de fois plus étroite que les plus fines raies connues.

4.9.69 Ici donc, le passage à la limite nous aurait trompés ; il a fallu que l'esprit devançât l'expérience et, s'il l'a fait avec succès, c'est qu'il s'est laissé guider par l'instinct de la simplicité.

4.9.70 La connaissance du fait élémentaire nous permet de mettre le problème en équation ; il ne reste plus qu'à en déduire par combinaison le fait complexe observable et vérifiable. C'est ce qu'on appelle l'*intégration* ; c'est là l'affaire du mathématicien.

4.9.71 On peut se demander pourquoi, dans les sciences physiques, la généralisation prend volontiers la forme mathématique. La raison est maintenant facile à voir ; ce n'est pas seulement parce que l'on a à exprimer des lois numériques ; c'est parce que le phénomène observable

ENGLISH

complex bundle that nature offers to our inquiries and carefully study its elements, as purified as possible. For example, we shall break natural white light down into monochromatic lights with a prism, and into polarized lights with a polarizer.

Unfortunately, this is neither always possible nor always sufficient, and sometimes the mind must run ahead of experiment. I shall cite only one example, which has always struck me forcibly:

If I break down white light, I can isolate a small portion of the spectrum, but however small it is, it will keep a certain width. Likewise, the natural lights called *monochromatic* give us a very fine line, but one that is still not infinitely fine. One might suppose that by studying experimentally the properties of these natural lights, working with finer and finer spectral lines, and finally passing to the limit, so to speak, we should come to know the properties of a strictly monochromatic light.

That would not be correct. Suppose that two rays come from the same source, that they are first polarized in two perpendicular planes, then brought back to the same plane of polarization, and that we try to make them interfere. If the light were *strictly* monochromatic, they would interfere. But with our nearly monochromatic lights there will be no interference, however narrow the line. For it to be otherwise, the line would have to be several million times narrower than the finest lines known.

Here, then, passing to the limit would have misled us. The mind had to run ahead of experiment, and if it did so successfully, it is because it let itself be guided by the instinct for simplicity.

Knowledge of the elementary fact allows us to put the problem into an equation; it then remains only to deduce from it, by combination, the complex fact that can be observed and verified. This is what is called *integration*; it is the mathematician's business.

One may ask why, in the physical sciences, generalization so readily takes mathematical form. The reason is now easy to see. It is not only because we have numerical laws to express; it is because the observable phenomenon is due to the superposi-

	FRENCH	ENGLISH
	est dû à la superposition d'un grand nombre de phénomènes élémentaires *tous semblables entre eux* ; ainsi s'introduisent tout naturellement les équations différentielles.	tion of a great number of elementary phenomena *all similar to one another*. That is how differential equations come in quite naturally.
4.9.72	Il ne suffit pas que chaque phénomène élémentaire obéisse à des lois simples, il faut que tous ceux que l'on a à combiner obéissent à la même loi. C'est alors seulement que l'intervention des mathématiques peut être utile ; les mathématiques nous apprennent, en effet, à combiner le semblable au semblable. Leur but est de deviner le résultat d'une combinaison, sans avoir besoin de refaire cette combinaison pièce à pièce. Si l'on a à répéter plusieurs fois une même opération, elles nous permettent d'éviter cette répétition en nous en faisant connaître d'avance le résultat par une sorte d'induction. Je l'ai expliqué plus haut, dans le chapitre sur le raisonnement mathématique.	It is not enough for each elementary phenomenon to obey simple laws; all those we have to combine must obey the same law. Only then can mathematics be of use, for mathematics teaches us to combine like with like. Its aim is to guess the result of a combination without having to go through that combination piece by piece. If we have to repeat the same operation several times, mathematics allows us to avoid the repetition by telling us the result in advance through a kind of induction. I explained this above, in the chapter on mathematical reasoning.
4.9.73	Mais, pour cela, il faut que toutes ces opérations soient semblables entre elles ; dans le cas contraire, il faudrait évidemment se résigner à les faire effectivement l'une après l'autre et les mathématiques deviendraient inutiles.	But for this, all these operations must be alike. Otherwise we should obviously have to resign ourselves to actually performing them one after another, and mathematics would become useless.
4.9.74	C'est donc grâce à l'homogénéité approchée de la matière étudiée par les physiciens que la physique mathématique a pu naître.	It is thus thanks to the approximate homogeneity of the matter studied by physicists that mathematical physics was able to come into being.
4.9.75	Dans les sciences naturelles, on ne retrouve plus ces conditions : homogénéité, indépendance relative des parties éloignées, simplicité du fait élémentaire, et c'est pour cela que les naturalistes sont obligés de recourir à d'autres modes de généralisation.	In the natural sciences these conditions are no longer found—homogeneity, the relative independence of distant parts, the simplicity of the elementary fact—and that is why naturalists are obliged to resort to other modes of generalization.

CHAPTER X: THE THEORIES OF MODERN PHYSICS

Physical theories pass away, but the true relations they express survive in their successors.

	FRENCH	ENGLISH
4.10.1	Signification des théories physiques. — Les gens du monde sont frappés de voir combien les théories scientifiques sont éphémères. Après quelques années de prospérité, ils les voient successivement abandonnées ; ils voient les ruines s'accumuler sur les ruines ; ils prévoient que les théories aujourd'hui à la mode devront succomber à leur tour à bref délai et ils en concluent qu'elles sont absolument vaines. C'est ce qu'ils appellent la *faillite de la science*.	The meaning of physical theories.—Laypeople are struck by how short-lived scientific theories are. After a few years of prosperity, they see them abandoned one after another; they see ruins piled upon ruins. They foresee that the theories now in fashion must in turn soon succumb, and they conclude that these are utterly futile. This is what they call the *bankruptcy of science*.[6]

6 The phrase echoes the critic Ferdinand Brunetière, whose 1895 article "Après une visite au Vatican" proclaimed the "bankruptcy" of science.

FRENCH

ENGLISH

4.10.2 Leur scepticisme est superficiel ; ils ne se rendent nul compte du but et du rôle des théories scientifiques, sans cela ils comprendraient que les ruines peuvent être encore bonnes à quelque chose.

Their skepticism is superficial. They have no idea of the aim and role of scientific theories; otherwise they would understand that ruins may still be good for something.

4.10.3 Nulle théorie ne semblait plus solide que celle de Fresnel qui attribuait la lumière aux mouvements de l'éther. Cependant, on lui préfère maintenant celle de Maxwell. Cela veut-il dire que l'œuvre de Fresnel a été vaine ? Non, car le but de Fresnel n'était pas de savoir s'il y a réellement un éther, s'il est ou non formé d'atomes, si ces atomes se meuvent réellement dans tel ou tel sens ; c'était de prévoir les phénomènes optiques.

No theory seemed more solid than Fresnel's, which attributed light to motions of the ether. Yet Maxwell's is now preferred to it. Does that mean Fresnel's work was in vain? No. Fresnel's aim was not to find out whether there really is an ether, whether or not it is made of atoms, whether these atoms really move in this or that direction; it was to predict optical phenomena.

4.10.4 Or, cela, la théorie de Fresnel le permet toujours, aujourd'hui aussi bien qu'avant Maxwell. Les équations différentielles sont toujours vraies ; on peut toujours les intégrer par les mêmes procédés et les résultats de cette intégration conservent toujours toute leur valeur.

Now Fresnel's theory still allows us to do that, today as well as before Maxwell. The differential equations are still true; they can still be integrated by the same methods, and the results of this integration still keep their full value.

4.10.5 Et qu'on ne dise pas que nous réduisons ainsi les théories physiques au rôle de simples recettes pratiques ; ces équations expriment des rapports et, si les équations restent vraies, c'est que ces rapports conservent leur réalité. Elles nous apprennent, après comme avant, qu'il y a tel rapports entre quelque chose et quelque autre chose ; seulement, ce quelque chose nous l'appelions autrefois *mouvement*, nous l'appelons maintenant *courant électrique*. Mais ces appellations n'étaient que des images substituées aux objets réels que la nature nous cachera éternellement.

Les rapports véritables entre ces objets réels sont la seule réalité que nous puissions atteindre, et la seule condition, c'est qu'il y ait les mêmes rapports entre ces objets qu'entre les images que nous sommes forcés de mettre à leur place. Si ces rapports nous sont connus, qu'importe si nous jugeons commode de remplacer une image par une autre.

And let no one say that we thereby reduce physical theories to the role of mere practical recipes. These equations express relations, and if the equations remain true, it is because these relations retain their reality. They teach us, now as before, that there is such and such a relation between something and something else. Only, that something we used to call *motion*, and now we call it *electric current*. But these names were merely images substituted for the real objects that nature will hide from us forever.

The true relations between these real objects are the only reality we can attain. The only condition is that there be the same relations between these objects as between the images we are forced to put in their place. If these relations are known to us, what does it matter if we find it convenient to replace one image by another?

4.10.6 Que tel phénomène périodique (une oscillation électrique, par exemple) soit réellement dû à la vibration de tel atome qui, se comportant comme un pendule, se déplace véritablement dans tel ou tel sens, voilà ce qui n'est ni certain ni intéressant. Mais qu'il y ait entre l'oscillation électrique, le mouvement du pendule et tous les phénomènes périodiques une parenté intime qui correspond à une réalité profonde ; que cette parenté, cette similitude, ou plutôt ce parallélisme se poursuive dans le détail ; qu'elle soit une conséquence de principes plus généraux, celui de l'énergie et celui de la moindre

Whether some periodic phenomenon (an electrical oscillation, for example) is really due to the vibration of some atom that, behaving like a pendulum, truly moves in this or that direction—that is neither certain nor interesting. But that there is, between the electrical oscillation, the motion of the pendulum and all periodic phenomena, a close kinship that corresponds to a deep reality; that this kinship, this similarity, or rather this parallelism, extends into detail; that it is a consequence of more general principles, that of en-

FRENCH

action ; voilà ce que nous pouvons affirmer ; voilà la vérité qui restera toujours la même sous tous les costumes dont nous pourrons juger utile de l'affubler.

4.10.7 On a proposé de nombreuses théories de la dispersion ; les premières étaient imparfaites et ne contenaient qu'une faible part de vérité. Ensuite est venue celle de Helmholtz ; puis on l'a modifiée de diverses manières et son auteur lui-même en a imaginé une autre fondée sur les principes de Maxwell. Mais, chose remarquable, tous les savants qui sont venus après Helmholtz sont arrivés aux mêmes équations, en partant de points de départ en apparence très éloignés. J'oserai dire que ces théories sont toutes vraies à la fois, non seulement parce qu'elles nous font prévoir les mêmes phénomènes, mais parce qu'elles mettent en évidence un rapport vrai, celui de l'absorption et de la dispersion anormale.

Dans les prémisses de ces théories, ce qu'il y a de vrai, c'est ce qui est commun à tous les auteurs ; c'est l'affirmation de tel ou tel rapport entre certaines choses que les uns appellent d'un nom et les autres d'un autre.

4.10.8 La théorie cinétique des gaz a donné lieu à bien des objections, auxquelles on pourrait difficilement répondre si l'on avait la prétention d'y voir la vérité absolue. Mais toutes ces objections n'empêcheront pas qu'elle a été utile et qu'elle l'a été en particulier en nous révélant un rapport vrai et sans elle profondément caché, celui de la pression gazeuse et de la pression osmotique. En ce sens, on peut donc dire qu'elle est vraie.

4.10.9 Quand un physicien constate une contradiction entre deux théories qui lui sont également chères, il dit quelquefois : Ne nous inquiétons pas de cela mais tenons fermement les deux bouts de la chaîne bien que les anneaux intermédiaires nous soient cachés. Cet argument de théologien embarrassé serait ridicule si l'on devait attribuer aux théories physiques le sens que leur donnent les gens du monde. En cas de contradiction, l'une d'elles au moins devrait alors être regardée comme fausse. Il n'en est plus de même si l'on y cherche seulement ce qu'on y doit chercher. Il peut se faire qu'elles expriment l'une et l'autre des rapports vrais et qu'il n'y ait de contradiction que dans les images dont nous avons habillé la réalité.

ENGLISH

ergy and that of least action—that is what we can affirm. That is the truth that will always remain the same under all the costumes in which we may see fit to dress it up.

Many theories of dispersion have been proposed. The first were imperfect and contained only a small share of truth. Then came Helmholtz's; it was then modified in various ways, and its author himself devised another, based on Maxwell's principles. But—a remarkable thing—all the scientists who came after Helmholtz arrived at the same equations, from points of departure that were apparently very far apart. I will venture to say that these theories are all true at once, not only because they make us foresee the same phenomena, but because they bring to light a true relation, that between absorption and anomalous dispersion.[7]

In the premises of these theories, what is true is what is common to all the authors: the assertion of such and such a relation between certain things that some call by one name and others by another.

The kinetic theory of gases has given rise to many objections, which would be hard to answer if one claimed to see in it the absolute truth. But all these objections do not alter the fact that it has been useful. In particular, it has revealed to us a true relation that without it would have stayed deeply hidden: that between gas pressure and osmotic pressure. In this sense, then, we may say that it is true.

When a physicist finds a contradiction between two theories that are equally dear to him, he sometimes says: Let us not worry about that, but hold fast to both ends of the chain, even though the intermediate links are hidden from us. This argument of an embarrassed theologian would be ridiculous if physical theories had to be given the meaning that laypeople give them. In case of contradiction, at least one of them would then have to be regarded as false. It is no longer so if we look in them only for what we ought to look for. It may be that both express true relations, and that the contradiction lies only in the images in which we have dressed reality.[8]

7 Dispersion is the variation of a medium's refractive index with the wavelength of light, which makes a prism spread white light into colors.

FRENCH	ENGLISH
4.10.10 À ceux qui trouvent que nous restreignons trop le domaine accessible au savant, je répondrai : Ces questions, que nous vous interdisons et que vous regrettez, ne sont pas seulement insolubles, elles sont illusoires et dépourvues de sens.	To those who find that we restrict too narrowly the domain accessible to the scientist, I shall reply: These questions, which we forbid you and whose loss you regret, are not only insoluble; they are illusory and devoid of meaning.
4.10.11 Tel philosophe prétend que toute la physique s'explique par les chocs mutuels des atomes. S'il veut dire simplement qu'il y a entre les phénomènes physiques les mêmes rapports qu'entre les chocs mutuels d'un grand nombre de billes, rien de mieux, cela est vérifiable, cela est peut-être vrai. Mais il veut dire quelque chose de plus ; et nous croyons le comprendre parce que nous croyons savoir ce que c'est que le choc en soi ; pourquoi ? Tout simplement parce que nous avons vu souvent des parties de billard. Entendrons-nous que Dieu, en contemplant son œuvre, éprouve les mêmes sensations que nous en présence d'un match de billard ?	Some philosopher claims that all of physics can be explained by the mutual collisions of atoms. If he simply means that there are the same relations between physical phenomena as between the mutual collisions of a large number of billiard balls, well and good; that is verifiable, and perhaps it is true. But he means something more. And we think we understand him because we think we know what collision in itself is. Why? Simply because we have often watched games of billiards. Are we to understand that God, contemplating his work, has the same sensations that we have when watching a billiards match?
Si nous ne voulons pas donner à son assertion ce sens bizarre, si nous ne voulons pas non plus du sens restreint que j'expliquais tout à l'heure et qui est le bon, elle n'en a plus aucun.	If we do not wish to give his assertion this bizarre meaning, and if we also reject the restricted meaning I explained a moment ago, which is the right one, then it has no meaning at all.
4.10.12 Les hypothèses de ce genre n'ont donc qu'un sens métaphorique. Le savant ne doit pas plus se les interdire, que le poète ne s'interdit les métaphores ; mais il doit savoir ce qu'elles valent. Elles peuvent être utiles pour donner une satisfaction à l'esprit, et elles ne seront pas nuisibles pourvu qu'elles ne soient que des hypothèses indifférentes.	Hypotheses of this kind therefore have only a metaphorical meaning. The scientist should no more forbid himself them than the poet forbids himself metaphors; but he must know what they are worth. They can be useful in giving satisfaction to the mind, and they will do no harm provided they are only indifferent hypotheses.
4.10.13 Ces considérations nous expliquent pourquoi certaines théories, que l'on croyait abandonnées et définitivement condamnées par l'expérience, renaissent tout à coup de leurs cendres et recommencent une vie nouvelle. C'est qu'elles exprimaient des rapports vrais ; et qu'elles n'avaient pas cessé de le faire quand, pour une raison ou pour une autre, nous avions cru devoir énoncer les mêmes rapports dans un autre langage. Elles avaient ainsi conservé une sorte de vie latente.	These considerations explain why certain theories, which were thought abandoned and definitively condemned by experiment, suddenly rise from their ashes and begin a new life. It is because they expressed true relations, and had not ceased to do so when, for one reason or another, we thought we had to state the same relations in another language. They had thus kept a sort of latent life.
4.10.14 Il y a quinze ans à peine, y avait-il rien de plus ridicule, de plus naïvement vieux jeu que les fluides de Coulomb ? Et pourtant les voilà qui reparaissent sous le nom d'*électrons.* En quoi ces molécules électrisées d'une façon permanente diffèrent-elles des molécules électriques de Coulomb ? Il est vrai que, dans les électrons, l'électricité	Barely fifteen years ago, was there anything more ridiculous, more naively old-fashioned, than Coulomb's fluids? And yet here they are, reappearing under the name of *electrons*. In what way do these permanently electrified molecules differ from

8 The image of holding "both ends of the chain" comes from the theologian Bossuet (1627–1704), writing on how to reconcile free will with divine providence.

	FRENCH	ENGLISH
	est supportée par un peu de matière, mais si peu ; en d'autres termes, elles ont une masse (et encore voilà qu'aujourd'hui on la leur conteste) ; mais Coulomb ne refusait pas la masse à ses fluides, ou, s'il le faisait, ce n'était qu'à regret.	Coulomb's electric molecules? It is true that in electrons the electricity is carried by a little matter—but so little! In other words, they have mass (and now even that is being disputed). But Coulomb did not deny mass to his fluids, or if he did, it was only reluctantly.[9]
	Il serait téméraire d'affirmer que la croyance aux électrons ne subira plus d'éclipse ; il n'en était pas moins curieux de constater cette renaissance inattendue.	It would be rash to assert that belief in electrons will never again suffer an eclipse; it was nonetheless curious to note this unexpected revival.
4.10.15	Mais l'exemple le plus frappant est le principe de Carnot. Carnot l'a établi en partant d'hypothèses fausses ; quand on s'aperçut que la chaleur n'est pas indestructible, mais peut être transformée en travail, on abandonna complètement ses idées ; puis Clausius y revint et les fit définitivement triompher. La théorie de Carnot, sous sa forme primitive, exprimait, à côté de rapports véritables, d'autres rapports inexacts, débris des vieilles idées ; mais la présence de ces derniers n'altérait pas la réalité des autres. Clausius n'a eu qu'à les écarter comme on émonde des branches mortes.	But the most striking example is Carnot's principle. Carnot established it starting from false hypotheses. When it was realized that heat is not indestructible but can be transformed into work, his ideas were completely abandoned; then Clausius returned to them and made them triumph once and for all. Carnot's theory, in its original form, expressed true relations alongside other, inexact ones, remnants of old ideas; but the presence of the latter did not affect the reality of the former. Clausius had only to set them aside, as one prunes dead branches.[10]
4.10.16	Le résultat a été la seconde loi fondamentale de la thermodynamique. C'étaient toujours les mêmes rapports ; quoique ces rapports n'eussent plus lieu, au moins en apparence, entre les mêmes objets. C'en était assez pour que le principe conservât sa valeur. Et même les raisonnements de Carnot n'ont pas péri pour cela ; ils s'appliquaient à une matière entachée d'erreur ; mais leur forme (c'est-à-dire l'essentiel) demeurait correcte.	The result was the second fundamental law of thermodynamics. It still expressed the same relations, although these relations no longer held, at least in appearance, between the same objects. That was enough for the principle to keep its value. And even Carnot's reasoning did not perish on that account. It was applied to subject matter tainted with error, but its form (that is, the essential thing) remained correct.
4.10.17	Ce que je viens de dire éclaire en même temps le rôle des principes généraux tels que le principe de moindre action, ou celui de la conservation de l'énergie.	What I have just said throws light at the same time on the role of general principles such as the principle of least action or that of the conservation of energy.
4.10.18	Ces principes ont une très haute valeur ; on les a obtenus en cherchant ce qu'il y avait de commun dans l'énoncé de nombreuses lois physiques ; ils représentent donc comme la quintessence d'innombrables observations.	These principles have a very high value. They were obtained by looking for what was common to the statements of numerous physical laws; they therefore represent something like the quintessence of countless observations.
4.10.19	Toutefois, de leur généralité même résulte une conséquence sur laquelle j'ai appelé l'attention dans le chapitre VIII, c'est qu'ils ne peuvent plus ne pas être	However, from their very generality there follows a consequence to which I drew attention in Chapter VIII: they can no longer fail to be verified.

9 Charles-Augustin de Coulomb (1736–1806), French physicist who treated electricity as consisting of two fluids made up of particles.
10 Sadi Carnot (1796–1832) reasoned in 1824 from the caloric theory, which held heat to be an indestructible fluid. Carnot's principle is the second law of thermodynamics.

FRENCH

vérifiés. Comme nous ne pouvons pas donner de l'énergie une définition générale, le principe de la conservation de l'énergie signifie simplement qu'il y a *quelque chose* qui demeure constant. Eh bien, quelles que soient les notions nouvelles que les expériences futures nous donneront sur le monde, nous sommes sûrs d'avance qu'il y aura quelque chose qui demeurera constant et que nous pourrons appeler *énergie*.

4.10.20 Est-ce à dire que le principe n'a aucun sens et s'évanouit en une tautologie ? Nullement, il signifie que les différentes choses auxquelles nous donnons le nom d'*énergie* sont liées par une parenté véritable ; il affirme entre elles un rapport réel. Mais alors si ce principe a un sens, il peut être faux ; il peut se faire qu'on n'ait pas le droit d'en étendre indéfiniment les applications et cependant il est assuré d'avance d'être vérifié dans l'acception stricte du mot ; comment donc serons-nous avertis quand il aura atteint toute l'extension qu'on peut légitimement lui donner ? C'est tout simplement quand il cessera de nous être utile, c'est-à-dire de nous faire prévoir sans nous tromper des phénomènes nouveaux.

Nous serons sûrs en pareil cas que le rapport affirmé n'est plus réel ; car sans cela il serait fécond ; l'expérience, sans contredire directement une nouvelle extension du principe, l'aura cependant condamnée.

4.10.21 La physique et le mécanisme. — La plupart des théoriciens ont une prédilection constante pour les explications empruntées à la mécanique ou à la dynamique. Les uns seraient satisfaits s'ils pouvaient rendre compte de tous les phénomènes par les mouvements de molécules s'attirant mutuellement suivant certaines lois. Les autres sont plus exigeants, ils voudraient supprimer les attractions à distance ; leurs molécules suivraient des trajectoires rectilignes dont elles ne pourraient être déviées que par des chocs. D'autres encore, comme Hertz, suppriment aussi les forces, mais supposent leurs molécules soumises à des liaisons géométriques analogues, par exemple, à celles de nos systèmes articulés ; ils veulent ainsi réduire la dynamique à une sorte de cinématique.

4.10.22 Tous, en un mot, veulent plier la nature à une certaine forme en dehors de laquelle leur esprit ne saurait être satisfait. La nature sera-t-elle assez flexible pour cela ?

4.10.23

ENGLISH

Since we cannot give a general definition of energy, the principle of the conservation of energy simply means that there is *something* that remains constant. Well then, whatever new notions future experiments may give us about the world, we are sure in advance that there will be something that remains constant and that we can call *energy*.

Does this mean that the principle has no meaning and vanishes into a tautology? Not at all. It means that the different things to which we give the name of *energy* are linked by a genuine kinship; it affirms a real relation between them. But then, if this principle has a meaning, it may be false. It may be that we have no right to extend its applications indefinitely, and yet it is certain in advance to be verified in the strict sense of the word. How, then, shall we be warned when it has reached the full extension that can legitimately be given to it? Quite simply, when it ceases to be useful to us—that is, to make us foresee new phenomena without misleading us.

In such a case we shall be sure that the relation affirmed is no longer real, for otherwise it would be fruitful. Experiment, without directly contradicting a new extension of the principle, will nevertheless have condemned it.

Physics and mechanism.—Most theorists have a constant predilection for explanations borrowed from mechanics or dynamics. Some would be satisfied if they could account for all phenomena by the motions of molecules attracting one another according to certain laws. Others are more demanding: they would like to do away with attractions at a distance. Their molecules would follow straight-line paths, from which they could be deflected only by collisions. Others again, like Hertz, do away with forces as well, but suppose their molecules subject to geometric constraints analogous, for example, to those of our linkages; they thus want to reduce dynamics to a kind of kinematics.

In a word, all of them want to bend nature into a certain form, and outside that form their minds could not be satisfied. Will nature be flexible enough for that?

	FRENCH	ENGLISH
	Nous examinerons la question au chapitre XII à propos de la théorie de Maxwell. Toutes les fois que les principes de l'énergie et de la moindre action sont satisfaits, nous verrons non seulement qu'il y a toujours une explication mécanique possible, mais qu'il y en a toujours une infinité. Grâce à un théorème bien connu de M. Königs sur les systèmes articulés, on pourrait montrer qu'on peut d'une infinité de manières, tout expliquer par des liaisons à la manière de Hertz, ou encore par des forces centrales. On démontrerait sans doute aussi facilement que tout peut toujours s'expliquer avec de simples chocs.	We shall examine the question in Chapter XII, in connection with Maxwell's theory. Whenever the principles of energy and of least action are satisfied, we shall see that a mechanical explanation is always possible, and also that there are always infinitely many. Thanks to a well-known theorem of Königs on linkages, one could show that everything can be explained, in infinitely many ways, by constraints in the manner of Hertz, or else by central forces. No doubt one could just as easily prove that everything can always be explained by simple impacts.[11]
4.10.24	Pour cela, il faut, bien entendu, ne pas se contenter de la matière vulgaire, de celle qui tombe sous nos sens et dont nous observons directement les mouvements. Ou bien on supposera que cette matière vulgaire est formée d'atomes dont les mouvements intestins nous échappent, le déplacement d'ensemble restant seul accessible à nos sens. Ou bien on imaginera quelqu'un de ces fluides subtils qui, sous le nom d'*éther* ou sous d'autres noms, ont joué de tout temps un si grand rôle dans les théories physiques.	To do this, of course, we must not be satisfied with ordinary matter, the matter that falls within the reach of our senses and whose motions we observe directly. Either we shall suppose that this ordinary matter is made of atoms whose internal motions escape us, so that only the displacement of the whole remains accessible to our senses. Or else we shall imagine one of those subtle fluids which, under the name of *ether* or under other names, have always played so great a part in physical theories.
4.10.25	Souvent on va plus loin et l'on regarde l'éther comme la seule matière primitive ou même comme la seule matière véritable. Les plus modérés considèrent la matière vulgaire comme de l'éther condensé, ce qui n'a rien de choquant ; mais d'autres en réduisent plus encore l'importance et n'y voient plus que le lieu géométrique des singularités de l'éther. Par exemple, pour Lord Kelvin, ce que nous appelons *matière* n'est que le lieu des points où l'éther est animé de mouvements tourbillonnaires ; pour Riemann, c'était le lieu des points où l'éther est constamment détruit ; pour d'autres auteurs plus récents, Wiechert ou Larmor, c'est le lieu des points où l'éther subit une sorte de torsion d'une nature toute particulière.	Often people go further and regard the ether as the only primitive matter, or even as the only true matter. The more moderate regard ordinary matter as condensed ether, which is not at all shocking. Others, however, reduce its importance still further and see in it no more than the geometric locus of the ether's singularities. For Lord Kelvin, for example, what we call *matter* is only the locus of the points where the ether is in vortex motion. For Riemann, it was the locus of the points where ether is constantly being destroyed. For other, more recent writers, Wiechert or Larmor, it is the locus of the points where the ether undergoes a kind of torsion of a quite special nature.[12]
	Si l'on veut se placer à un de ces points de vue, je me demande de quel droit on étendra à l'éther, sous prétexte que c'est de la vraie matière, les propriétés mécaniques observées sur la matière vulgaire, qui n'est que de la fausse matière.	If we take one of these points of view, I wonder by what right we shall extend to the ether, on the pretext that it is true matter, the mechanical properties observed in ordinary matter, which is only false matter.
4.10.26	Les anciens fluides, calorique, électricité, etc., ont été abandonnés quand on s'est aperçu que la chaleur n'est	The old fluids—caloric, electricity, and so on—were abandoned when it was realized that heat is

11 Gabriel Koenigs (Königs) (1858–1931), French mathematician who worked on the kinematics of linkages.
12 Kelvin proposed his theory of vortex atoms in 1867. Emil Wiechert (1861–1928) was a German physicist; Joseph Larmor (1857–1942), an Irish physicist, wrote *Aether and Matter* (1900).

FRENCH

pas indestructible. Mais ils l'ont été aussi pour une autre raison. En les matérialisant, on accentuait pour ainsi dire leur individualité, on creusait entre eux une sorte d'abîme. Il a bien fallu le combler quand on a eu un sentiment plus vif de l'unité de la nature, et qu'on a aperçu les relations intimes qui en relient toutes les parties. Non seulement les anciens physiciens, en multipliant les fluides, créaient des êtres sans nécessité, mais ils rompaient des liens véritables.

4.10.27 Il ne suffit pas qu'une théorie n'affirme pas des rapports faux, il faut qu'elle ne dissimule pas des rapports vrais.

4.10.28 Et notre éther, existe-t-il réellement ?

4.10.29 On sait d'où nous vient la croyance à l'éther. Si la lumière nous arrive d'une étoile éloignée, pendant plusieurs années, elle n'est plus sur l'étoile et elle n'est pas encore sur la terre, il faut bien qu'alors elle soit quelque part et soutenue, pour ainsi dire, par quelque support matériel.

4.10.30 On peut exprimer la même idée sous une forme plus mathématique et plus abstraite. Ce que nous constatons ce sont les changements subis par les molécules matérielles ; nous voyons, par exemple, que notre plaque photographique éprouve les conséquences des phénomènes dont la masse incandescente de l'étoile a été le théâtre plusieurs années auparavant. Or, dans la mécanique ordinaire, l'état du système étudié ne dépend que de son état à un instant immédiatement antérieur ; le système satisfait donc à des équations différentielles. Au contraire, si nous ne croyions pas à l'éther, l'état de l'univers matériel dépendrait non seulement de l'état immédiatement antérieur, mais d'états beaucoup plus anciens ; le système satisferait à des équations aux différences finies.

C'est pour échapper à cette dérogation aux lois générales de la mécanique que nous avons inventé l'éther.

4.10.31 Cela ne nous obligerait encore qu'à remplir, avec l'éther, le vide interplanétaire, mais non de le faire pénétrer au sein des milieux matériels eux-mêmes. L'expérience de Fizeau va plus loin. Par l'interférence des rayons qui ont traversé de l'air ou de l'eau en mouvement, elle semble nous montrer deux milieux différents se pénétrant et pourtant se déplaçant l'un par rapport à l'autre. On croit toucher l'éther du doigt.

ENGLISH

not indestructible. But they were abandoned for another reason too. By materializing them, we emphasized, so to speak, their individuality; we dug a kind of gulf between them. That gulf had to be filled when we gained a keener sense of the unity of nature and perceived the intimate relations that bind all its parts together. By multiplying fluids, the old physicists created entities without necessity, and they also broke real ties.

It is not enough for a theory not to assert false relations; it must not conceal true ones.

And our ether—does it really exist?

We know where our belief in the ether comes from. When light reaches us from a distant star, for several years it is no longer on the star and not yet on the earth. It must surely be somewhere in the meantime, held up, so to speak, by some material support.

The same idea can be expressed in a more mathematical and more abstract form. What we observe are the changes undergone by material molecules. We see, for example, that our photographic plate feels the consequences of phenomena that took place in the incandescent mass of the star several years earlier. Now, in ordinary mechanics, the state of the system under study depends only on its state at the immediately preceding instant; the system therefore satisfies differential equations. If, on the other hand, we did not believe in the ether, the state of the material universe would depend on the immediately preceding state and also on much earlier states; the system would satisfy finite-difference equations.

It is to escape this departure from the general laws of mechanics that we invented the ether.

That would still oblige us only to fill interplanetary space with ether, not to make it penetrate into material media themselves. Fizeau's experiment goes further. Through the interference of rays that have passed through moving air or water, it seems to show us two different media interpenetrating and yet moving relative to each other. We seem to be touching the ether with our finger.[13]

13 In 1851 Hippolyte Fizeau measured the speed of light in flowing water and found that the moving water only partly drags the light along.

	FRENCH	ENGLISH
4.10.32	On peut concevoir cependant des expériences qui nous le feraient toucher de plus près encore. Supposons que le principe de Newton, de l'égalité de l'action et de la réaction, ne soit plus vrai si on l'applique à la matière *seule* et qu'on vienne à le constater. La somme géométrique de toutes les forces appliquées à toutes les molécules matérielles ne serait plus nulle. Il faudrait bien, si on ne voulait changer toute la mécanique, introduire l'éther, pour que cette action que la matière paraîtrait subir fût contrebalancée par la réaction de la matière sur quelque chose.	Yet one can conceive of experiments that would let us touch it more closely still. Suppose that Newton's principle, the equality of action and reaction, were no longer true when applied to matter *alone*, and that this came to be established. The geometric sum of all the forces applied to all the material molecules would no longer be zero. If we did not want to change the whole of mechanics, we should then have to introduce the ether, so that the action that matter appeared to undergo would be balanced by the reaction of matter on something.
4.10.33	Ou bien encore je suppose que l'on reconnaisse que les phénomènes optiques et électriques sont influencés par le mouvement de la terre. On serait conduit à conclure que ces phénomènes pourraient nous révéler non seulement les mouvements relatifs des corps matériels, mais ce qui semblerait être leurs mouvements absolus. Il faudrait bien encore qu'il y eût un éther, pour que ces soi-disant mouvements absolus ne fussent pas leurs déplacements par rapport à un espace vide, mais leurs déplacements par rapport à quelque chose de concret.	Or again, suppose it were found that optical and electrical phenomena are influenced by the motion of the earth. We should be led to conclude that these phenomena could reveal to us the relative motions of material bodies, and also what would seem to be their absolute motions. Here too there would have to be an ether, so that these so-called absolute motions would be displacements relative to something concrete rather than displacements relative to empty space.
4.10.34	En arrivera-t-on jamais là ? Je n'ai pas cette espérance, je dirai tout à l'heure pourquoi, et cependant elle n'est pas si absurde, puisque d'autres l'ont eue.	Will we ever get that far? I have no such hope—I shall say why in a moment—and yet the hope is not so absurd, since others have had it.
4.10.35	Par exemple, si la théorie de Lorentz, dont je parlerai plus loin en détail au chapitre XIII, était vraie, le principe de Newton ne s'appliquerait pas à la matière *seule* et la différence ne serait pas très loin d'être accessible à l'expérience.	For example, if Lorentz's theory, which I shall discuss in detail later, in Chapter XIII, were true, Newton's principle would not apply to matter *alone*, and the difference would not be very far from being accessible to experiment.[14]
4.10.36	D'un autre côté, on a fait bien des recherches sur l'influence du mouvement de la terre. Les résultats ont toujours été négatifs. Mais si l'on a entrepris ces expériences, c'est qu'on n'en était pas sûr d'avance, et même, d'après les théories régnantes, la compensation ne serait qu'approchée, et l'on devrait s'attendre à voir des méthodes précises donner des résultats positifs.	On the other hand, much research has been done on the influence of the earth's motion. The results have always been negative. But if these experiments were undertaken, it was because no one was sure of the outcome in advance. Indeed, according to the prevailing theories, the compensation would be only approximate, and one ought to expect precise methods to give positive results.
4.10.37	Je crois qu'une telle espérance est illusoire ; il n'en était pas moins curieux de montrer qu'un succès de ce genre nous ouvrirait, en quelque sorte, un monde nouveau.	I believe such a hope is illusory. It was nonetheless interesting to show that a success of this kind would open up, as it were, a new world for us.
4.10.38	Et maintenant il faut qu'on me permette une digression ; je dois expliquer, en effet, pourquoi je ne crois pas,	And now I must be allowed a digression. I must explain why I do not believe, Lorentz notwithstanding, that more precise observations will ever

	FRENCH	ENGLISH
	malgré Lorentz, que des observations plus précises puissent jamais mettre en évidence autre chose que les déplacements relatifs des corps matériels. On a fait des expériences qui auraient dû déceler les termes du premier ordre ; les résultats ont été négatifs ; cela pouvait-il être par hasard ? Personne ne l'a admis ; on a cherché une explication générale, et Lorentz l'a trouvée ; il a montré que les termes du premier ordre devaient se détruire, mais il n'en était pas de même de ceux du second.	be able to reveal anything but the relative displacements of material bodies. Experiments were made that should have detected the first-order terms, and the results were negative. Could that have been by chance? No one accepted that. A general explanation was sought, and Lorentz found it: he showed that the first-order terms must cancel, but that the same was not true of the second-order ones.
	Alors on a fait des expériences plus précises ; elles ont aussi été négatives ; ce ne pouvait non plus être l'effet du hasard ; il fallait une explication ; on l'a trouvée ; on en trouve toujours ; les hypothèses, c'est le fonds qui manque le moins.	Then more precise experiments were made, and they too were negative. This could not be the effect of chance either, so an explanation was needed. One was found—one always is; hypotheses are the one resource we never run short of.[15]
4.10.39	Mais ce n'est pas assez ; qui ne sent que c'est encore là laisser au hasard un trop grand rôle ? Ne serait-ce pas aussi un hasard que ce singulier concours qui ferait qu'une certaine circonstance viendrait juste à point pour détruire les termes du premier ordre, et qu'une autre circonstance, tout à fait différente, mais tout aussi opportune, se chargerait de détruire ceux du second ordre ? Non, il faut trouver une même explication pour les uns et pour les autres, et alors tout nous porte à penser que cette explication vaudra également pour les termes d'ordre supérieur, et que la destruction mutuelle de ces termes sera rigoureuse et absolue.	But that is not enough. Who does not feel that this still leaves too great a part to chance? Would it not also be chance, that strange coincidence by which one circumstance would arrive just in time to cancel the first-order terms, and another, quite different but just as opportune, would take care of canceling the second-order ones? No: we must find one and the same explanation for both. Everything then leads us to think that this explanation will hold equally for higher-order terms, and that the mutual cancellation of these terms will be rigorous and absolute.

THE PRESENT STATE OF SCIENCE

Physics moves both toward unity and toward complication; on balance it has drawn closer to unity.

	FRENCH	ENGLISH
4.10.40	État actuel de la science. — Dans l'histoire du développement de la physique, on distingue deux tendances inverses. D'une part, on découvre à chaque instant des liens nouveaux entre des objets qui semblaient devoir rester à jamais séparés ; les faits épars cessent d'être étrangers les uns aux autres ; ils tendent à s'ordonner en une imposante synthèse. La science marche vers l'unité et la simplicité.	The present state of science.—In the history of the development of physics two opposite tendencies can be distinguished. On the one hand, new links are constantly being discovered between objects that seemed destined to remain separate for ever. Scattered facts cease to be strangers to one another, and they tend to arrange themselves into an imposing synthesis. Science is moving toward unity and simplicity.
4.10.41	D'autre part, l'observation nous révèle tous les jours des phénomènes nouveaux ; il faut qu'ils attendent	On the other hand, observation reveals new phenomena every day. They must wait a long time for

14 Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928), Dutch physicist whose electron theory explained electrical and optical phenomena by charged particles moving through a stationary ether.

15 The more precise experiments are chiefly the Michelson–Morley experiment of 1887, explained by the contraction of moving bodies proposed by FitzGerald and Lorentz. The closing phrase echoes La Fontaine's fable "The Plowman and His Children": "c'est le fonds qui manque le moins."

	FRENCH	ENGLISH
	longtemps leur place et quelquefois, pour leur en faire une, on doit démolir un coin de l'édifice. Dans les phénomènes connus eux-mêmes, où nos sens grossiers nous montraient l'uniformité, nous apercevons des détails de jour en jour plus variés ; ce que nous croyions simple redevient complexe et la science paraît marcher vers la variété et la complication.	their place, and sometimes, to make room for one, a corner of the building has to be torn down. Even in known phenomena, where our coarse senses showed us uniformity, we perceive details that grow more varied day by day. What we thought simple becomes complex again, and science seems to be moving toward variety and complication.
4.10.42	De ces deux tendances inverses, qui semblent triompher tour à tour, laquelle l'emportera ? Si c'est la première, la science est possible ; mais rien ne le prouve *a priori*, et l'on peut craindre qu'après avoir fait de vains efforts pour plier la nature malgré elle à notre idéal d'unité, débordés par le flot toujours montant de nos nouvelles richesses, nous ne devions renoncer à les classer, abandonner notre idéal, et réduire la science à l'enregistrement d'innombrables recettes.	Of these two opposite tendencies, which seem to triumph by turns, which will win? If it is the first, science is possible. But nothing proves this *a priori*, and one may fear the following outcome. After vain efforts to bend nature against its will to our ideal of unity, and overwhelmed by the ever-rising flood of our new riches, we might have to give up classifying them, abandon our ideal, and reduce science to the recording of countless recipes.
4.10.43	À cette question, nous ne pouvons répondre. Tout ce que nous pouvons faire, c'est d'observer la science d'aujourd'hui et de la comparer à celle d'hier. De cet examen nous pourrons sans doute tirer quelques présomptions.	This question we cannot answer. All we can do is observe the science of today and compare it with that of yesterday. From this examination we may no doubt draw some presumptions.
4.10.44	Il y a un demi-siècle, on avait conçu les plus grandes espérances. La découverte de la conservation de l'énergie et de ses transformations venait de nous révéler l'unité de la force. Elle montrait ainsi que les phénomènes de la chaleur pouvaient s'expliquer par des mouvements moléculaires. Quelle était la nature de ces mouvements, on ne le savait pas au juste, mais on ne doutait pas qu'on le sût bientôt. Pour la lumière la tâche semblait complètement accomplie. En ce qui concerne l'électricité, on était moins avancé. L'électricité venait de s'annexer le magnétisme. C'était un pas considérable vers l'unité, un pas définitif. Mais comment l'électricité rentrerait-elle à son tour dans l'unité générale, comment se ramènerait-elle au mécanisme universel ? On n'en avait aucune idée.	Half a century ago the highest hopes were entertained. The discovery of the conservation of energy and of its transformations had just revealed to us the unity of force. It thus showed that the phenomena of heat could be explained by molecular motions. What the nature of these motions was, no one knew exactly, but no one doubted that it would soon be known. For light, the task seemed completely accomplished. As for electricity, things were less advanced. Electricity had just annexed magnetism. That was a considerable step toward unity, and a definitive one. But how would electricity in its turn fit into the general unity? How would it be reduced to the universal mechanism? No one had any idea.
	La possibilité de cette réduction n'était cependant mise en doute par personne, on avait la foi. Enfin, en ce qui concerne les propriétés moléculaires des corps matériels, la réduction semblait encore plus facile, mais tout le détail restait dans un brouillard. En un mot, les espérances étaient vastes, elles étaient vives, mais elles étaient vagues.	Yet no one doubted that this reduction was possible; people had faith. Finally, as regards the molecular properties of material bodies, the reduction seemed easier still, but all the detail remained in a fog. In a word, the hopes were vast, they were keen, but they were vague.
4.10.45	Aujourd'hui, que voyons-nous ?	Today, what do we see?
4.10.46		

FRENCH

D'abord un premier progrès, progrès immense. Les rapports de l'électricité et de la lumière sont maintenant connus ; les trois domaines de la lumière, de l'électricité et du magnétisme, autrefois séparés, n'en forment plus qu'un ; et cette annexion semble définitive.

4.10.47 Cette conquête, toutefois, nous a coûté quelques sacrifices. Les phénomènes optiques rentrent comme cas particuliers dans les phénomènes électriques ; tant qu'ils restaient isolés, il était aisé de les expliquer par des mouvements qu'on croyait connaître dans tous leurs détails, cela allait tout seul ; mais maintenant une explication, pour être acceptable, doit s'étendre sans peine au domaine électrique tout entier. Or, cela ne marche pas sans difficultés.

4.10.48 Ce que nous avons de plus satisfaisant, c'est la théorie de Lorentz qui, ainsi que nous le verrons au dernier chapitre, explique les courants électriques par les mouvements de petites particules électrisées ; c'est sans contredit celle qui rend le mieux compte des faits connus, celle qui met en lumière le plus grand nombre de rapports vrais, celle dont on retrouvera le plus de traces dans la construction définitive.

Néanmoins elle a encore un défaut grave, que j'ai signalé plus haut ; elle est contraire au principe de Newton, de l'égalité de l'action et de la réaction ; ou plutôt ce principe, aux yeux de Lorentz, ne serait pas applicable à la matière seule ; pour qu'il fût vrai, il faudrait tenir compte des actions exercées par l'éther sur la matière et de la réaction de la matière sur l'éther. Or, jusqu'à nouvel ordre, il est vraisemblable que les choses ne se passent pas ainsi.

4.10.49 Quoi qu'il en soit, grâce à Lorentz, les résultats de Fizeau sur l'optique des corps en mouvement, les lois de la dispersion normale et anormale et de l'absorption se trouvent rattachés entre eux et aux autres propriétés de l'éther par des liens qui sans aucun doute ne se rompront plus. Voyez la facilité avec laquelle le phénomène nouveau de Zeeman a trouvé sa place toute prête, et a même aidé à classer la rotation magnétique de Faraday qui était restée rebelle aux efforts de Maxwell ; cette facilité prouve bien que la théorie de Lorentz n'est pas un assemblage artificiel destiné à se dissoudre. On devra probablement la modifier, mais non la détruire.

ENGLISH

First, an initial advance, and an immense one. The relations between electricity and light are now known. The three domains of light, electricity and magnetism, once separate, now form a single one, and this annexation seems definitive.

This conquest, however, has cost us some sacrifices. Optical phenomena now fall under electrical phenomena as special cases. As long as they stood alone, it was easy to explain them by motions we thought we knew in every detail; it all went smoothly. But now an explanation, to be acceptable, must extend effortlessly to the whole electrical domain. And that does not go without difficulty.

The most satisfactory thing we have is Lorentz's theory, which, as we shall see in the last chapter, explains electric currents by the motions of small electrified particles. It is undoubtedly the theory that best accounts for the known facts and brings to light the greatest number of true relations. It is also the one of which most traces will be found in the final construction.

Nevertheless it still has a serious defect, which I pointed out above: it contradicts Newton's principle of the equality of action and reaction. Or rather, in Lorentz's eyes, this principle would not apply to matter alone. For it to be true, one would have to take into account the actions exerted by the ether on matter and the reaction of matter on the ether. Now, until further notice, it seems likely that things do not happen that way.

Be that as it may, Lorentz has linked several groups of results to one another and to the other properties of the ether: Fizeau's results on the optics of moving bodies, the laws of normal and anomalous dispersion, and those of absorption. These ties will undoubtedly never again be broken. See how easily the new Zeeman phenomenon found its place ready and waiting. It even helped to classify Faraday's magnetic rotation, which had resisted Maxwell's efforts. This ease clearly shows that Lorentz's theory is not an artificial assemblage doomed to fall apart. It will probably have to be modified, but not destroyed.[16]

16 The Zeeman effect (1896) is the splitting of spectral lines in a magnetic field. Faraday's magnetic rotation (1845) is the turning of the plane of polarization of light by a magnetic field.

FRENCH	ENGLISH
4.10.50 Mais Lorentz n'avait d'autre ambition que d'embrasser dans un même ensemble toute l'optique et l'électrodynamique des corps en mouvement ; il n'avait pas la prétention d'en donner une explication mécanique. Larmor va plus loin ; conservant la théorie de Lorentz dans ce qu'elle a d'essentiel, il y greffe pour ainsi dire les idées de Mac-Cullagh sur la direction des mouvements de l'éther. Pour lui la vitesse de l'éther aurait même direction et même grandeur que la force magnétique. Cette vitesse nous est donc connue puisque la force magnétique est accessible à l'expérience. Quelque ingénieuse que soit cette tentative, le défaut de la théorie de Lorentz subsiste et même il s'aggrave. L'action n'est pas égale à la réaction.	But Lorentz's only ambition was to embrace the whole of the optics and electrodynamics of moving bodies in a single framework; he made no claim to give a mechanical explanation of them. Larmor goes further. Keeping what is essential in Lorentz's theory, he grafts onto it, so to speak, MacCullagh's ideas on the direction of the motions of the ether. For him the velocity of the ether would have the same direction and the same magnitude as the magnetic force. This velocity is therefore known to us, since the magnetic force is accessible to experiment. However ingenious this attempt may be, the defect of Lorentz's theory remains, and is even aggravated. Action is not equal to reaction.[17]
Avec Lorentz, nous ne savions pas quels sont les mouvements de l'éther ; grâce à cette ignorance, nous pouvions les supposer tels que, compensant ceux de la matière, ils rétablissent l'égalité de l'action et de la réaction. Avec Larmor, nous connaissons les mouvements de l'éther et nous pouvons constater que la compensation ne se fait pas.	With Lorentz we did not know what the motions of the ether were. Thanks to this ignorance, we could suppose them to be such that, by compensating those of matter, they restored the equality of action and reaction. With Larmor we know the motions of the ether, and we can see that the compensation does not take place.
4.10.51 Si Larmor a à mon sens échoué, cela veut-il dire qu'une explication mécanique est impossible ? Loin de là : j'ai dit plus haut que dès qu'un phénomène obéit aux deux principes de l'énergie et de la moindre action, il comporte une infinité d'explications mécaniques ; il en est donc ainsi des phénomènes optiques et électriques.	If Larmor has, in my opinion, failed, does that mean a mechanical explanation is impossible? Far from it. I said above that as soon as a phenomenon obeys the two principles of energy and of least action, it admits infinitely many mechanical explanations. That is therefore the case with optical and electrical phenomena.
4.10.52 Mais cela ne suffit pas ; pour qu'une explication mécanique soit bonne, il faut qu'elle soit simple ; il faut que, pour la choisir entre toutes celles qui sont possibles, on ait d'autres raisons que la nécessité de faire un choix. Eh bien, une théorie qui satisfasse à cette condition et par conséquent qui puisse servir à quelque chose, nous n'en avons pas encore. Devons-nous nous en plaindre ? Ce serait oublier quel est le but poursuivi ; ce n'est pas le mécanisme, le vrai, le seul but, c'est l'unité.	But that is not enough. For a mechanical explanation to be good, it must be simple. To choose it among all the possible ones, we must have reasons other than the necessity of making a choice. Well, a theory that meets this condition, and that can therefore be of some use, we do not yet have. Should we complain? That would be to forget what the goal is. The goal is not mechanism; the true, the only goal is unity.
4.10.53 Nous devons donc borner notre ambition ; ne cherchons pas à formuler une explication mécanique ; contentons-nous de montrer que nous pourrions toujours en trouver une si nous le voulions. À cela, nous avons réussi ; le principe de la conservation de l'énergie n'a reçu que des confirmations ; un second principe est venu s'y joindre, celui de la moindre action, mis sous la forme qui convient	We must therefore limit our ambition. Let us not try to formulate a mechanical explanation; let us be content to show that we could always find one if we wished. In this we have succeeded. The principle of the conservation of energy has received nothing but confirmations. A second principle has come to join it, that of least action, put into the

17 James MacCullagh (1809–1847), Irish mathematician who developed a theory of the ether as an elastic medium.

FRENCH

à la physique. Lui aussi a toujours été vérifié, au moins en ce qui concerne les phénomènes réversibles qui obéissent ainsi aux équations de Lagrange, c'est-à-dire aux lois les plus générales de la mécanique.

4.10.54 Les phénomènes irréversibles sont beaucoup plus rebelles. Eux aussi cependant s'ordonnent et tendent à rentrer dans l'unité ; la lumière qui les a éclairés nous est venue du principe de Carnot. Longtemps la thermodynamique s'est confinée dans l'étude de la dilatation des corps et de leurs changements d'état. Depuis quelque temps, elle s'est enhardie et elle a considérablement élargi son domaine. Nous lui devons la théorie de la pile, celle des phénomènes thermo-électriques ; il n'est pas dans toute la physique de coin qu'elle n'ait exploré et elle s'est attaquée à la chimie elle-même.

Partout règnent les mêmes lois ; partout, sous la diversité des apparences, on retrouve le principe de Carnot ; partout aussi ce concept si prodigieusement abstrait de l'entropie, qui est aussi universel que celui de l'énergie et semble comme lui recouvrir une réalité. La chaleur rayonnante paraissait devoir lui échapper ; on l'a vue récemment plier sous les mêmes lois.

4.10.55 Par là nous sont révélées des analogies nouvelles, qui souvent se poursuivent dans le détail ; la résistance ohmique ressemble à la viscosité des liquides ; l'hystérésis ressemblerait plutôt au frottement des solides. Dans tous les cas, le frottement paraît le type sur lequel se calquent les phénomènes irréversibles les plus divers, et cette parenté est réelle et profonde.

4.10.56 On a cherché aussi une explication mécanique proprement dite de ces phénomènes. Ils ne s'y prêtaient guère. Pour la trouver, il a fallu supposer que l'irréversibilité n'est qu'une apparence, que les phénomènes élémentaires sont réversibles et obéissent aux lois connues de la dynamique. Mais les éléments sont extrêmement nombreux et se mêlent de plus en plus, de sorte que pour nos yeux grossiers tout paraît tendre vers l'uniformité, c'est-à-dire que tout semble marcher dans le même sens, sans espoir de retour. L'irréversibilité apparente n'est ainsi qu'un effet de la loi des grands nombres. Seul un être dont les sens seraient infiniment subtils, comme le démon imaginaire de Maxwell, pourrait démêler cet écheveau inextricable et ramener le monde en arrière.

ENGLISH

form suited to physics. It too has always been verified, at least as far as reversible phenomena are concerned; these thus obey Lagrange's equations, that is, the most general laws of mechanics.

Irreversible phenomena are much more stubborn. Yet they too are falling into order and tending to fit into the unity; the light that has illuminated them has come to us from Carnot's principle. For a long time thermodynamics confined itself to the study of the expansion of bodies and their changes of state. For some time now it has grown bolder and has considerably widened its domain. To it we owe the theory of the battery and that of thermo-electric phenomena. There is no corner of physics it has not explored, and it has taken on chemistry itself.

Everywhere the same laws reign. Everywhere, beneath the diversity of appearances, we find Carnot's principle again. Everywhere too we find that prodigiously abstract concept, entropy, which is as universal as that of energy and, like it, seems to cover a reality. Radiant heat seemed bound to escape it; recently it has been seen to bow to the same laws.

In this way new analogies are revealed to us, which often hold even in detail. Ohmic resistance resembles the viscosity of liquids; hysteresis would rather resemble the friction of solids. In every case, friction seems to be the model on which the most diverse irreversible phenomena are patterned, and this kinship is real and deep.

FRENCH	ENGLISH
	People have also sought a mechanical explanation, properly so called, of these phenomena. The phenomena hardly lent themselves to one. To find it, it was necessary to suppose that irreversibility is only an appearance, and that elementary phenomena are reversible and obey the known laws of dynamics. But the elements are extremely numerous and become more and more intermingled. To our coarse eyes, therefore, everything seems to tend toward uniformity, that is, everything seems to move in the same direction, with no hope of return. Apparent irreversibility is thus only an effect of the law of large numbers. Only a being with infinitely subtle senses, like Maxwell's imaginary demon, could untangle this inextricable skein and turn the world back.[18]
4.10.57 Cette conception, qui se rattache à la théorie cinétique des gaz, a coûté de grands efforts et a été en somme assez peu féconde ; elle pourra le devenir. Ce n'est pas ici le lieu d'examiner si elle ne conduit pas à des contradictions et si elle est bien conforme à la véritable nature des choses.	This conception, which is connected with the kinetic theory of gases, has cost great efforts and has, on the whole, been rather unfruitful; it may become fruitful. This is not the place to examine whether it leads to contradictions, or whether it truly conforms to the real nature of things.
4.10.58 Signalons toutefois les idées originales de M. Gouy sur le mouvement brownien. D'après ce savant, ce singulier mouvement échapperait au principe de Carnot. Les particules qu'il met en branle seraient plus petites que les mailles de cet écheveau si serré ; elles seraient donc en mesure de les démêler et par là de faire marcher le monde à contre-courant. On croirait voir à l'œuvre le démon de Maxwell.	Let us mention, however, Gouy's original ideas on Brownian motion. According to this scientist, this strange motion would escape Carnot's principle. The particles it sets moving would be smaller than the meshes of that tightly woven skein. They would therefore be able to untangle it, and thereby make the world run against the current. One would think one saw Maxwell's demon at work.[19]
4.10.59 En résumé, les phénomènes anciennement connus se classent de mieux en mieux ; mais des phénomènes nouveaux viennent réclamer leur place ; la plupart d'entre eux, comme celui de Zeeman, l'ont trouvée tout de suite.	To sum up, phenomena known of old are being classified better and better, but new phenomena come claiming their place. Most of them, like Zeeman's phenomenon, have found it at once.
4.10.60 Mais nous avons les rayons cathodiques, les rayons X, ceux de l'uranium et du radium. Il y a là tout un monde que nul ne soupçonnait. Que d'hôtes inattendus il faut caser !	But we have cathode rays, X-rays, and the rays of uranium and radium. Here is a whole world that no one suspected. So many unexpected guests to find room for!
4.10.61 Personne ne peut encore prévoir la place qu'ils occuperont. Mais je ne crois pas qu'ils détruiront l'unité générale, je crois plutôt qu'ils la compléteront. D'une	No one can yet foresee the place they will occupy. But I do not believe they will destroy the general unity; I believe rather that they will complete it.

18 In Maxwell's thought experiment (1867), a tiny being sorts fast molecules from slow ones and so would defeat the second law of thermodynamics.

19 Louis Georges Gouy (1854–1926), French physicist who in 1888 attributed Brownian motion to the agitation of molecules.

	FRENCH	ENGLISH
	part, en effet, les radiations nouvelles semblent liées aux phénomènes de luminescence ; non seulement elles excitent la fluorescence, mais elles prennent naissance quelquefois dans les mêmes conditions qu'elle.	For, on the one hand, the new radiations seem linked to the phenomena of luminescence. They excite fluorescence, and they sometimes arise under the same conditions as fluorescence does.
4.10.62	Elles ne sont pas non plus sans parenté avec les causes qui font éclater l'étincelle sous l'action de la lumière ultra-violette.	Nor are they unrelated to the causes that make a spark leap under the action of ultraviolet light.[20]
4.10.63	Enfin, et surtout, on croit retrouver dans tous ces phénomènes de véritables ions animés, il est vrai, de vitesses incomparablement plus fortes que dans les électrolytes.	Finally, and above all, we think we can recognize in all these phenomena true ions—moving, it is true, at speeds incomparably greater than in electrolytes.
4.10.64	Tout cela est bien vague, mais tout cela se précisera.	All this is very vague, but all of it will become clearer.
4.10.65	La phosphorescence, l'action de la lumière sur l'étincelle, c'étaient là des cantons un peu isolés, et par suite un peu délaissés par les chercheurs. On peut espérer maintenant qu'on va construire une nouvelle ligne qui facilitera leurs communications avec la science universelle.	Phosphorescence and the action of light on the spark were somewhat isolated districts, and hence somewhat neglected by researchers. We may now hope that a new line will be built to improve their communications with science as a whole.
4.10.66	Non seulement nous découvrons des phénomènes nouveaux, mais dans ceux que nous croyions connaître, se révèlent des aspects imprévus. Dans l'éther libre, les lois conservent leur majestueuse simplicité ; mais la matière proprement dite semble de plus en plus complexe ; tout ce qu'on en dit n'est jamais qu'approché et à chaque instant nos formules exigent de nouveaux termes.	We are discovering new phenomena, and unforeseen aspects are also coming to light in those we thought we knew. In the free ether, the laws keep their majestic simplicity. But matter proper seems more and more complex. Whatever we say about it is only ever approximate, and at every moment our formulas demand new terms.
4.10.67	Néanmoins les cadres ne sont pas rompus ; les rapports que nous avions reconnus entre des objets que nous croyions simples, subsistent encore entre ces mêmes objets quand nous connaissons leur complexité, et c'est cela seul qui importe. Nos équations deviennent de plus en plus compliquées, c'est vrai, afin de serrer de plus près la complication de la nature ; mais rien n'est changé aux relations qui permettent de déduire ces équations les unes des autres. En un mot, la forme de ces équations a résisté.	Nevertheless the frameworks are not broken. We had recognized relations between objects we thought simple, and these relations still hold between the same objects once we know their complexity; that alone is what matters. Our equations, it is true, become more and more complicated in order to follow more closely the complication of nature. But nothing has changed in the relations that allow us to deduce these equations from one another. In a word, the form of these equations has held out.
4.10.68	Prenons pour exemple les lois de la réflexion, Fresnel les avait établies par une théorie simple et séduisante que l'expérience semblait confirmer. Depuis, des recherches plus précises ont prouvé que cette vérification n'était qu'approximative ; elles ont montré partout des traces de polarisation elliptique. Mais, grâce à l'appui que nous prêtait la première approximation, on a trouvé tout de	Take for example the laws of reflection. Fresnel had established them through a simple and attractive theory that experiment seemed to confirm. Since then, more precise research has shown that this verification was only approximate; it has revealed traces of elliptical polarization every-

20 The effect of ultraviolet light on sparks was discovered by Heinrich Hertz in 1887; it is the photoelectric effect.

	FRENCH	ENGLISH
	suite la cause de ces anomalies, qui est la présence d'une couche de passage ; et la théorie de Fresnel a subsisté dans ce qu'elle avait d'essentiel.	where. But thanks to the support the first approximation gave us, the cause of these anomalies was found at once: the presence of a transition layer. And Fresnel's theory has survived in its essentials.
4.10.69	Seulement on ne peut s'empêcher de faire une réflexion : Tous ces rapports seraient demeurés inaperçus si l'on s'était douté d'abord de la complexité des objets qu'ils relient. Il y a longtemps qu'on l'a dit : Si Tycho avait eu des instruments dix fois plus précis, il n'y aurait jamais eu ni Képler, ni Newton, ni Astronomie. C'est un malheur pour une science de prendre naissance trop tard, quand les moyens d'observation sont devenus trop parfaits. C'est ce qui arrive aujourd'hui à la physico-chimie ; ses fondateurs sont gênés dans leurs aperçus par la troisième et la quatrième décimales ; heureusement, ce sont des hommes d'une foi robuste.	Only, one cannot help making a reflection: all these relations would have gone unnoticed if we had suspected from the start the complexity of the objects they connect. It was said long ago: if Tycho had had instruments ten times more precise, there would never have been a Kepler, or a Newton, or astronomy. It is a misfortune for a science to be born too late, when the means of observation have become too perfect. That is what is happening today to physical chemistry. Its founders are hampered in their insights by the third and fourth decimal places; fortunately, they are men of robust faith.
4.10.70	À mesure qu'on connaît mieux les propriétés de la matière, on y voit régner la continuité. Depuis les travaux d'Andrews et de Van der Waals, on se rend compte de la façon dont se fait le passage de l'état liquide à l'état gazeux et que ce passage n'est pas brusque. De même il n'y a pas un abîme entre les états liquide et solide, et dans les comptes rendus d'un Congrès récent on voyait à côté d'un travail sur la rigidité des liquides, un mémoire sur l'écoulement des solides.	The better we come to know the properties of matter, the more we see continuity reigning in it. Since the work of Andrews and van der Waals, we understand how the passage from the liquid to the gaseous state takes place, and we know that this passage is not abrupt. Likewise there is no gulf between the liquid and solid states. In the proceedings of a recent Congress, one could see a paper on the rigidity of liquids beside a memoir on the flow of solids.[21]
4.10.71	À cette tendance la simplicité perd sans doute ; tel phénomène était représenté par plusieurs droites : il faut raccorder ces droites par des courbes plus ou moins compliquées. En revanche l'unité y gagne beaucoup. Ces catégories tranchées reposaient l'esprit, mais elles ne le satisfaisaient pas.	With this tendency simplicity no doubt loses. A phenomenon was represented by several straight lines, and these straight lines must now be joined by more or less complicated curves. In return, unity gains a great deal. Those clear-cut categories rested the mind, but they did not satisfy it.
4.10.72	Enfin les méthodes de la physique ont envahi un domaine nouveau, celui de la chimie ; la physico-chimie est née. Elle est encore bien jeune, mais on voit déjà qu'elle nous permettra de relier entre eux des phénomènes tels que l'électrolyse, l'osmose, les mouvements des ions.	Lastly, the methods of physics have invaded a new domain, that of chemistry, and physical chemistry has been born. It is still very young, but we can already see that it will allow us to link together phenomena such as electrolysis, osmosis and the motions of ions.
4.10.73	De ce rapide exposé, que conclurons-nous ?	What shall we conclude from this rapid survey?
4.10.74	Tout compte fait, on s'est rapproché de l'unité, on n'a pas été aussi vite qu'on l'espérait il y a cinquante ans, on n'a	All things considered, we have drawn closer to unity. We have not gone as fast as was hoped fifty years ago, and we have not always taken the ex-

21 Thomas Andrews (1813–1885) discovered the critical point of gases (1869); Johannes Diderik van der Waals (1837–1923) gave an equation of state covering both liquids and gases.

	FRENCH	ENGLISH
	pas toujours pris le chemin prévu ; mais, en définitive, on a gagné beaucoup de terrain.	pected road; but in the end we have gained a great deal of ground.

CHAPTER XI: THE CALCULUS OF PROBABILITIES

Every scientific induction relies on probability, yet probability itself resists definition.

	FRENCH	ENGLISH
4.11.1	On s'étonnera sans doute de trouver à cette place des réflexions sur le calcul des probabilités. Qu'a-t-il à faire avec la méthode des sciences physiques ?	No doubt the reader will be surprised to find reflections on the calculus of probabilities at this point. What has it to do with the method of the physical sciences?
4.11.2	Et pourtant les questions que je vais soulever, sans les résoudre, se posent naturellement au philosophe qui veut réfléchir sur la physique.	And yet the questions I am going to raise, without resolving them, arise naturally for the philosopher who wants to reflect on physics.
4.11.3	Et c'est à tel point que dans les deux chapitres précédents j'ai été amené plusieurs fois à prononcer les mots de probabilité et de hasard.	So much so that in the two preceding chapters I have several times been led to use the words probability and chance.
4.11.4	« Les faits prévus, ai-je dit plus haut, ne peuvent être que probables. Si solidement assise que puisse nous paraître une prévision, nous ne sommes jamais absolument sûrs que l'expérience ne la démentira pas. Mais la probabilité est souvent assez grande pour que pratiquement nous puissions nous en contenter. »	"Predicted facts," I said above, "can only be probable. However solidly founded a prediction may seem to us, we are never absolutely sure that experiment will not refute it. But the probability is often great enough for us to be content with it in practice."
4.11.5	Et un peu plus loin, j'ai ajouté :	And a little further on I added:
4.11.6	« Voyons quel rôle joue dans nos généralisations la croyance à la simplicité. Nous avons vérifié une loi simple dans un grand nombre de cas particuliers ; nous nous refusons à admettre que cette rencontre, si souvent répétée, soit un simple effet du hasard... »	"Let us see what part the belief in simplicity plays in our generalizations. We have verified a simple law in a large number of particular cases; we refuse to admit that this agreement, so often repeated, is a mere effect of chance..."
4.11.7	Ainsi, dans une foule de circonstances, le physicien se trouve dans la même position que le joueur qui suppute ses chances. Toutes les fois qu'il raisonne par induction, il fait plus ou moins consciemment usage du calcul des probabilités.	Thus, in a host of circumstances, the physicist is in the same position as the gambler who reckons up his chances. Every time he reasons by induction, he makes use, more or less consciously, of the calculus of probabilities.
4.11.8	Et voilà pourquoi je suis obligé d'ouvrir une parenthèse et d'interrompre notre étude de la méthode dans les sciences physiques, pour examiner d'un peu plus près ce que vaut ce calcul et quelle confiance il mérite.	And that is why I am obliged to open a parenthesis and interrupt our study of method in the physical sciences. I must examine a little more closely what this calculus is worth and how much confidence it deserves.
4.11.9	Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe : la probabilité opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on ne connaît pas ? Cependant, beaucoup de savants éminents se sont occupés de ce calcul, et l'on ne saurait nier que la science	The very name calculus of probabilities is a paradox. Probability, as opposed to certainty, is what we do not know—and how can we calculate what we do not know? Yet many eminent scientists have occupied themselves with this calculus, and it

	FRENCH	ENGLISH
	n'en ait tiré quelque profit. Comment expliquer cette apparente contradiction ?	cannot be denied that science has drawn some benefit from it. How are we to explain this apparent contradiction?
4.11.10	La probabilité a-t-elle été définie ? Peut-elle même être définie ? Et, si elle ne peut l'être, comment ose-t-on en raisonner ? La définition, dira-t-on, est bien simple : la probabilité d'un événement est le rapport du nombre de cas favorables à cet événement au nombre total des cas possibles.	Has probability been defined? Can it even be defined? And if it cannot, how do we dare to reason about it? The definition, someone will say, is quite simple: the probability of an event is the ratio of the number of cases favorable to that event to the total number of possible cases.
4.11.11	Un exemple simple va faire comprendre combien cette définition est incomplète. Je jette deux dés ; quelle est la probabilité pour que l'un des deux dés au moins amène un six ? Chaque dé peut amener six points différents : le nombre des cas possibles est 6×6=36 ; le nombre des cas favorables est 11 ; la probabilité est 11/36.	A simple example will show how incomplete this definition is. I throw two dice. What is the probability that at least one of the two dice will come up six? Each die can show six different numbers, so the number of possible cases is 6×6=36. The number of favorable cases is 11, and the probability is 11/36.
4.11.12	C'est la solution correcte. Mais ne pourrais-je pas dire tout aussi bien : Les points amenés par les deux dés peuvent former (6 × 7)/2 = 21 combinaisons différentes ? Parmi ces combinaisons, 6 sont favorables ; la probabilité est 6/21.	That is the correct solution. But could I not just as well say this: the numbers shown by the two dice can form (6 × 7)/2 = 21 different combinations? Of these combinations, 6 are favorable, and so the probability is 6/21.
4.11.13	Pourquoi la première manière d'énumérer les cas possibles est-elle plus légitime que la seconde ? En tout cas, ce n'est pas notre définition qui nous l'apprend.	Why is the first way of enumerating the possible cases more legitimate than the second? At any rate, our definition does not tell us.
4.11.14	On est donc réduit à compléter cette définition en disant : « ... au nombre total des cas possibles, pourvu que ces cas soient également probables ». Nous voilà donc réduits à définir le probable par le probable.	We are therefore reduced to completing this definition by saying: "... to the total number of possible cases, provided these cases are equally probable." So here we are, reduced to defining the probable by the probable.
4.11.15	Comment saurons-nous que deux cas possibles sont également probables ? Sera-ce par une convention ? Si nous plaçons au début de chaque problème une convention explicite, tout ira bien, nous n'aurons plus qu'à appliquer les règles de l'arithmétique et de l'algèbre et nous irons jusqu'au bout du calcul sans que notre résultat puisse laisser place au doute ; mais dès que nous en voudrons faire la moindre application, il faudra démontrer que notre convention était légitime, et nous nous retrouverons en face de la difficulté que nous avions cru éluder.	How shall we know that two possible cases are equally probable? Will it be by a convention? If we place an explicit convention at the start of each problem, all will be well. We shall then only have to apply the rules of arithmetic and algebra, and we shall carry the calculation through to the end without our result leaving any room for doubt. But as soon as we want to make the slightest application of it, we shall have to prove that our convention was legitimate. We shall then find ourselves once again facing the difficulty we thought we had evaded.
4.11.16	Dira-t-on que le bon sens suffit pour nous apprendre quelle convention il faut faire ? Hélas ! M. Bertrand s'est amusé à traiter un problème simple : « quelle est la probabilité pour que, dans une circonférence, une corde	Will it be said that common sense is enough to tell us what convention to adopt? Alas! Bertrand amused himself by treating a simple problem: "What is the probability that a chord of a circle is

	FRENCH	ENGLISH
	soit plus grande que le côté du triangle équilatéral inscrit ? » L'illustre géomètre a adopté successivement deux conventions que le bon sens semblait également imposer, et il a trouvé avec l'une 1/2, avec l'autre 1/3.	longer than the side of the inscribed equilateral triangle?" The illustrious mathematician adopted in turn two conventions that common sense seemed equally to impose. With one he found 1/2, with the other 1/3.[22]
4.11.17	La conclusion qui semble résulter de tout cela, c'est que le calcul des probabilités est une science vaine, qu'il faut se défier de cet instinct obscur que nous nommions bon sens et auquel nous demandions de légitimer nos conventions.	The conclusion that seems to follow from all this is that the calculus of probabilities is a futile science. We would also have to distrust that obscure instinct we called common sense, which we asked to legitimize our conventions.
4.11.18	Mais, cette conclusion, nous ne pouvons non plus y souscrire ; cet instinct obscur, nous ne pouvons nous en passer ; sans lui la science serait impossible, sans lui nous ne pourrions ni découvrir une loi, ni l'appliquer. Avons-nous le droit, par exemple, d'énoncer la loi de Newton ? Sans doute, de nombreuses observations sont en concordance avec elle ; mais n'est-ce pas là un simple effet du hasard ? Comment savons-nous d'ailleurs si cette loi, vraie depuis tant de siècles, le sera encore l'an prochain ? À cette objection, vous ne trouverez rien à répondre, sinon : « Cela est bien peu probable ».	But we cannot subscribe to this conclusion either, for we cannot do without that obscure instinct. Without it science would be impossible; without it we could neither discover a law nor apply one. Have we the right, for example, to state Newton's law? No doubt many observations agree with it; but is that not a mere effect of chance? And how, besides, do we know whether this law, true for so many centuries, will still be true next year? To this objection you will find nothing to reply except: "That is highly improbable."
4.11.19	Mais admettons la loi ; grâce à elle, je crois pouvoir calculer la position de Jupiter dans un an. En ai-je le droit ? Qui me dit qu'une masse gigantesque, animée d'une vitesse énorme, ne va pas d'ici là passer près du système solaire et produire des perturbations imprévues ? Ici encore il n'y a rien à répondre, sinon : « Cela est bien peu probable ».	But let us grant the law. With its help I think I can calculate the position of Jupiter a year from now. Have I the right to? Who is to say that a gigantic mass, moving at enormous speed, will not pass near the solar system before then and produce unforeseen perturbations? Here again there is nothing to reply except: "That is highly improbable."
4.11.20	À ce compte, toutes les sciences ne seraient que des applications inconscientes du calcul des probabilités ; condamner ce calcul, ce serait condamner la science tout entière.	On this reckoning, all the sciences would be nothing but unconscious applications of the calculus of probabilities. To condemn this calculus would be to condemn the whole of science.
4.11.21	J'insisterai moins sur les problèmes scientifiques où l'intervention du calcul des probabilités est plus évidente. Tel est en première ligne celui de l'interpolation, où, connaissant un certain nombre de valeurs d'une fonction, on cherche à deviner les valeurs intermédiaires.	I shall dwell less on the scientific problems in which the intervention of the calculus of probabilities is more evident. Foremost among them is interpolation, in which, knowing a certain number of values of a function, we try to guess the intermediate values.
4.11.22	Je citerai également : la célèbre théorie des erreurs d'observation, sur laquelle je reviendrai plus loin, la théorie cinétique des gaz, hypothèse bien connue, où chaque molécule gazeuse est supposée décrire une trajectoire extrêmement compliquée, mais où, par l'effet	I shall also mention the celebrated theory of errors of observation, to which I shall return later. There is also the kinetic theory of gases, a well-known hypothesis in which each gas molecule is supposed to describe an extremely complicated

22 Joseph Bertrand (1822–1900), French mathematician; the problem, from his *Calcul des probabilités* (1889), is now known as Bertrand's paradox.

	FRENCH	ENGLISH
	des grands nombres, les phénomènes moyens, seuls observables, obéissent à des lois simples qui sont celles de Mariotte et de Gay-Lussac.	path. Yet in this theory, through the effect of large numbers, the average phenomena, which alone are observable, obey simple laws: those of Mariotte and Gay-Lussac.[23]
4.11.23	Toutes ces théories reposent sur les lois des grands nombres, et le calcul des probabilités les entraînerait évidemment dans sa ruine. Il est vrai qu'elles n'ont qu'un intérêt particulier et que, sauf en ce qui concerne l'interpolation, ce sont là des sacrifices auxquels on pourrait se résigner.	All these theories rest on the laws of large numbers, and if the calculus of probabilities fell, it would obviously bring them down with it. It is true that they are only of particular interest. Except for interpolation, these are sacrifices we might resign ourselves to.
4.11.24	Mais, je l'ai dit plus haut, ce ne serait pas seulement de ces sacrifices partiels qu'il s'agirait, ce serait la science tout entière dont la légitimité serait révoquée en doute.	But, as I said above, it would not be merely a matter of these partial sacrifices. It would be the legitimacy of science as a whole that would be called into question.
4.11.25	Je vois bien ce qu'on pourrait dire : « Nous sommes ignorants et pourtant nous devons agir. Pour agir, nous n'avons pas le temps de nous livrer à une enquête suffisante pour dissiper notre ignorance ; d'ailleurs, une pareille enquête exigerait un temps infini. Nous devons donc nous décider sans savoir ; il faut bien le faire au petit bonheur et suivre des règles sans trop y croire. Ce que je sais, ce n'est pas que telle chose est vraie, mais que le mieux pour moi est encore d'agir comme si elle était vraie ». Le calcul des probabilités, et par conséquent la science, n'aurait plus qu'une valeur pratique.	I can well see what might be said: "We are ignorant, and yet we must act. In order to act, we have no time to carry out an inquiry sufficient to dispel our ignorance; besides, such an inquiry would require infinite time. We must therefore decide without knowing. We have to do so haphazardly, and follow rules without believing in them too much. What I know is not that such and such a thing is true, but that the best thing for me is still to act as if it were true." The calculus of probabilities, and consequently science, would then have only a practical value.
4.11.26	Malheureusement la difficulté ne disparaît pas ainsi : un joueur veut tenter un coup ; il me demande conseil. Si je le lui donne, je m'inspirerai du calcul des probabilités, mais je ne lui garantirai pas le succès. C'est là ce que j'appellerai la *probabilité subjective*. Dans ce cas, on pourrait se contenter de l'explication que je viens d'esquisser. Mais je suppose qu'un observateur assiste au jeu, qu'il en note tous les coups et que le jeu se prolonge longtemps ; quand il fera le relevé de son carnet, il constatera que les événements se sont répartis conformément aux lois du calcul des probabilités. C'est là ce que j'appellerai la *probabilité objective*, et c'est ce phénomène qu'il faudrait expliquer.	Unfortunately the difficulty does not vanish so easily. A gambler wants to try a bet, and he asks my advice. If I give it, I shall draw on the calculus of probabilities, but I shall not guarantee him success. This is what I shall call *subjective probability*. In this case one could be content with the explanation I have just sketched. But suppose an observer watches the game and notes every play, and the game goes on for a long time. When he goes over his notebook, he will find that the events have been distributed in accordance with the laws of the calculus of probabilities. This is what I shall call *objective probability*, and it is this phenomenon that would have to be explained.
4.11.27	Il existe de nombreuses sociétés d'assurances qui appliquent les règles du calcul des probabilités, et elles distribuent à leurs actionnaires des dividendes dont la réalité objective ne saurait être contestée. Il ne suffit pas,	There are many insurance companies that apply the rules of the calculus of probabilities, and they distribute to their shareholders dividends whose objective reality cannot be disputed. To explain

23 Joseph Louis Gay-Lussac (1778–1850), French chemist; his law relates the volume of a gas to its temperature.

FRENCH

pour les expliquer, d'invoquer notre ignorance et la nécessité d'agir.

4.11.28 Ainsi, le scepticisme absolu n'est pas de mise ; nous devons nous méfier, mais nous ne pouvons condamner en bloc ; il est nécessaire de discuter.

4.11.29 I. — Classification des problèmes de probabilité. — Pour classer les problèmes qui se présentent à propos des probabilités, on peut se placer à plusieurs points de vue différents, et d'abord au *point de vue de la généralité*. J'ai dit plus haut que la probabilité est le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles. Ce que, faute d'un meilleur terme, j'appelle la généralité, croîtra avec le nombre des cas possibles. Ce nombre peut être fini ; comme, par exemple, si l'on envisage un coup de dés où le nombre des cas possibles est 36. C'est là le premier degré de généralité.

4.11.30 Mais, si nous demandons, par exemple, quelle est la probabilité pour qu'un point intérieur d'un cercle soit intérieur au carré inscrit, il y a autant de cas possibles que de points dans le cercle, c'est-à-dire une infinité. C'est le second degré de généralité. La généralité peut être poussée plus loin encore : on peut se demander la probabilité pour qu'une fonction satisfasse à une condition donnée ; il y a alors autant de cas possibles qu'on peut imaginer de fonctions différentes. C'est le troisième degré de généralité, auquel on s'élève, par exemple, quand on cherche à deviner la loi la plus probable d'après un nombre fini d'observations.

4.11.31 On peut se placer à un point de vue tout différent. Si nous n'étions pas ignorants, il n'y aurait pas de probabilité, il n'y aurait de place que pour la certitude ; mais notre ignorance ne peut être absolue, sans quoi il n'y aurait pas non plus de probabilité, puisqu'il faut encore un peu de lumière pour parvenir même à cette science incertaine. Les problèmes de probabilité peuvent ainsi se classer d'après la profondeur plus ou moins grande de cette ignorance.

4.11.32 En mathématiques, on peut déjà se proposer des problèmes de probabilité. Quelle est la probabilité pour que la 5e décimale d'un logarithme pris au hasard dans une table soit un 9 ? On n'hésitera pas à répondre que cette probabilité est 1/10. Ici nous possédons toutes les données du problème ; nous saurions calculer notre logarithme sans recourir à la table ; mais nous ne voulons pas nous en donner la peine. C'est le premier degré de l'ignorance.

ENGLISH

them, it is not enough to invoke our ignorance and the necessity of acting.

Thus absolute skepticism is out of place. We must be wary, but we cannot condemn wholesale; discussion is necessary.

I. Classification of problems of probability.—To classify the problems that arise in connection with probabilities, we can take several different points of view. The first is the *point of view of generality*. I said above that probability is the ratio of the number of favorable cases to the number of possible cases. What I call generality, for want of a better term, will increase with the number of possible cases. This number may be finite, as, for example, when we consider a throw of the dice in which the number of possible cases is 36. That is the first degree of generality.

But suppose we ask, for example, what the probability is that a point inside a circle is inside the inscribed square. There are then as many possible cases as there are points in the circle, that is, infinitely many. That is the second degree of generality. Generality can be pushed further still: we can ask the probability that a function satisfies a given condition. There are then as many possible cases as one can imagine different functions. That is the third degree of generality, to which we rise, for example, when we try to guess the most probable law from a finite number of observations.

We can take a quite different point of view. If we were not ignorant there would be no probability; there would be room only for certainty. But our ignorance cannot be absolute, for then there would be no probability either, since some light is still needed to arrive even at this uncertain science. Problems of probability can thus be classified according to the greater or lesser depth of this ignorance.

Even in mathematics we can set ourselves problems of probability. What is the probability that the fifth decimal of a logarithm taken at random from a table is a 9? No one will hesitate to answer that this probability is 1/10. Here we possess all the data of the problem. We could calculate our logarithm without resorting to the table, but we do not

FRENCH	ENGLISH
	want to take the trouble. That is the first degree of ignorance.
4.11.33 Dans les sciences physiques, notre ignorance est déjà plus grande. L'état d'un système, à un instant donné, dépend de deux choses : son état initial et la loi d'après laquelle cet état varie. Si nous connaissions à la fois cette loi et cet état initial, nous n'aurions plus qu'un problème mathématique à résoudre et nous retomberions sur le premier degré d'ignorance.	In the physical sciences our ignorance is already greater. The state of a system at a given instant depends on two things: its initial state and the law according to which that state varies. If we knew both this law and this initial state, we should have only a mathematical problem to solve, and we should fall back on the first degree of ignorance.
4.11.34 Mais il arrive souvent qu'on connaît la loi et qu'on ne connaît pas l'état initial. On demande, par exemple, quelle est la distribution actuelle des petites planètes ; nous savons que, de tout temps, elles ont obéi aux lois de Képler, mais nous ignorons quelle était leur distribution initiale.	But it often happens that we know the law and do not know the initial state. We ask, for example, what the present distribution of the minor planets is. We know that they have always obeyed Kepler's laws, but we do not know what their initial distribution was.
4.11.35 Dans la théorie cinétique des gaz, on suppose que les molécules gazeuses suivent des trajectoires rectilignes et obéissent aux lois du choc des corps élastiques ; mais, comme on ne sait rien de leurs vitesses initiales, on ne sait rien de leurs vitesses actuelles.	In the kinetic theory of gases, we suppose that the gas molecules follow straight-line paths and obey the laws of impact of elastic bodies. But since we know nothing of their initial velocities, we know nothing of their present velocities.
4.11.36 Seul, le calcul des probabilités permet de prévoir les phénomènes moyens qui résulteront de la combinaison de ces vitesses. C'est là le second degré d'ignorance.	Only the calculus of probabilities allows us to predict the average phenomena that will result from the combination of these velocities. That is the second degree of ignorance.
4.11.37 Il est possible, enfin, que non seulement les conditions initiales, mais les lois elles-mêmes, soient inconnues ; on atteint alors le troisième degré de l'ignorance et, généralement, on ne peut plus rien affirmer du tout au sujet de la probabilité d'un phénomène.	Finally, it is possible that the laws themselves are unknown, as well as the initial conditions. We then reach the third degree of ignorance, and in general we can no longer assert anything at all about the probability of a phenomenon.
4.11.38 Il arrive souvent qu'au lieu de chercher à deviner un événement d'après une connaissance plus ou moins imparfaite de la loi, on connaisse les événements et qu'on cherche à deviner la loi ; qu'au lieu de déduire les effets des causes, on veuille déduire les causes des effets. Ce sont là les problèmes dits de *probabilité des causes*, les plus intéressants au point de vue de leurs applications scientifiques.	It often happens that, instead of trying to guess an event from a more or less imperfect knowledge of the law, we know the events and try to guess the law. Instead of deducing effects from causes, we want to deduce causes from effects. These are the so-called problems of *probability of causes*, the most interesting from the point of view of their scientific applications.

	FRENCH	ENGLISH
4.11.39	Je joue à l'écarté avec un monsieur que je sais parfaitement honnête ; il va donner ; quelle est la probabilité pour qu'il tourne le roi ? c'est 1/8 ; c'est là un problème de probabilité des effets. Je joue avec un monsieur que je ne connais pas ; il a donné 10 fois et il a tourné 6 fois le roi ; quelle est la probabilité pour que ce soit un grec ? c'est là un problème de probabilité des causes.	I am playing écarté with a gentleman I know to be perfectly honest, and he is about to deal. What is the probability that he will turn up the king? It is 1/8; that is a problem of probability of effects. Now I am playing with a gentleman I do not know. He has dealt 10 times and has turned up the king 6 times. What is the probability that he is a card-sharp? That is a problem of probability of causes.[24]
4.11.40	On peut dire que c'est le problème essentiel de la méthode expérimentale. J'ai observé n valeurs de x et les valeurs correspondantes de y ; j'ai constaté que le rapport des secondes aux premières est sensiblement constant. Voilà l'événement ; quelle est la cause ?	It may be called the essential problem of the experimental method. I have observed n values of x and the corresponding values of y; I have found that the ratio of the latter to the former is very nearly constant. That is the event; what is the cause?
4.11.41	Est-il probable qu'il y ait une loi générale d'après laquelle y serait proportionnel à x et que les petites divergences soient dues à des erreurs d'observations ? Voilà un genre de question qu'on est sans cesse amené à se poser et qu'on résout inconsciemment toutes les fois que l'on fait de la science.	Is it probable that there is a general law according to which y is proportional to x, and that the small discrepancies are due to errors of observation? This is the kind of question we are constantly led to ask, and we answer it unconsciously every time we do science.
4.11.42	Je vais maintenant passer en revue ces différentes catégories de problèmes en envisageant successivement ce que j'ai appelé plus haut la probabilité subjective et ce que j'ai appelé la probabilité objective.	I shall now review these different categories of problems, considering in turn what I called above subjective probability and what I called objective probability.
4.11.43	II. — La probabilité dans les sciences mathématiques. — L'impossibilité de la quadrature du cercle est démontrée depuis 1883 ; mais, bien avant cette date récente, tous les géomètres considéraient cette impossibilité comme tellement « probable », que l'Académie des sciences rejetait sans examen les mémoires, hélas ! trop nombreux, que quelques malheureux fous lui envoyaient tous les ans sur ce sujet.	II. Probability in the mathematical sciences.—The impossibility of squaring the circle has been proved since 1883. But long before that recent date, all mathematicians considered this impossibility so "probable" that the Academy of Sciences rejected unexamined the papers, alas all too many, that a few unfortunate cranks sent it on the subject every year.[25]
4.11.44	L'Académie avait-elle tort ? Évidemment non, et elle savait bien qu'en agissant ainsi, elle ne risquait nullement d'étouffer une découverte sérieuse. Elle n'aurait pu démontrer qu'elle avait raison ; mais elle savait bien que son instinct ne la trompait pas. Si vous aviez interrogé les académiciens, ils vous auraient répondu : « Nous avons comparé la probabilité pour qu'un savant inconnu ait trouvé ce qu'on cherche vainement depuis si longtemps, et celle pour qu'il y ait un fou de plus sur la terre ; la seconde nous a paru plus	Was the Academy wrong? Obviously not, and it knew perfectly well that in acting this way it ran no risk of stifling a serious discovery. It could not have proved that it was right, but it knew that its instinct was not deceiving it. Had you questioned the academicians, they would have answered: "We have compared the probability that an unknown scientist has found what has been sought in vain for so long with the probability that there is one

24 Écarté is a two-player card game with a 32-card pack; the dealer turns up a card for trumps and scores a point if it is a king. Poincaré's word for a cheat, *grec*, was period slang for a cardsharp.
25 The proof came from Ferdinand von Lindemann, who showed in 1882 that π is transcendental, and hence that the circle cannot be squared with ruler and compass.

FRENCH

grande. » Ce sont là de très bonnes raisons, mais elles n'ont rien de mathématique, elles sont purement psychologiques.

4.11.45 Et si vous les aviez pressés davantage, ils auraient ajouté : « Pourquoi voulez-vous qu'une valeur particulière d'une fonction transcendante soit un nombre algébrique ; et si π était racine d'une équation algébrique, pourquoi voulez-vous que cette racine soit une période de la fonction sin 2*x* et qu'il n'en soit pas de même des autres racines de cette même équation ? » En somme, ils auraient invoqué le principe de raison suffisante sous sa forme la plus vague.

4.11.46 Mais que pouvaient-ils en tirer ? Tout au plus une règle de conduite pour l'emploi de leur temps, plus utilement dépensé à leurs travaux ordinaires qu'à la lecture d'une élucubration qui leur inspirait une légitime défiance. Mais ce que j'appelais plus haut la probabilité objective n'a rien à voir avec ce premier problème.

4.11.47 Il en est autrement du second problème.

4.11.48 Envisageons les 10,000 premiers logarithmes que je trouve dans une table. Parmi ces 10,000 logarithmes, j'en prends un au hasard ; quelle est la probabilité pour que sa troisième décimale soit un nombre pair ? Vous n'hésiterez pas à répondre 1/2, et, en effet, si vous relevez dans une table les troisièmes décimales de ces 10,000 nombres, vous trouverez à peu près autant de chiffres pairs que de chiffres impairs.

4.11.49 Ou si l'on préfère, écrivons 10,000 nombres, correspondant à nos 10,000 logarithmes ; chacun de ces nombres étant égal à +1 si la troisième décimale du logarithme correspondant est paire, et à −1 dans le contraire. Prenons ensuite la moyenne de ces 10,000 nombres.

4.11.50 Je n'hésiterai pas à dire que la moyenne de ces 10,000 nombres est probablement nulle, et, si je la calculais effectivement, je vérifierais qu'elle est très petite.

4.11.51 Mais cette vérification même est inutile. J'aurais pu démontrer rigoureusement que cette moyenne est plus petite que 0,003. Pour établir ce résultat, il m'aurait fallu un assez long calcul qui ne saurait trouver place ici et pour lequel je me borne à renvoyer à un article que j'ai publié dans la *Revue générale des Sciences*, le 15 avril 1899. Le seul point sur lequel je dois attirer l'attention, c'est le suivant : dans ce calcul, je n'aurais eu besoin que de m'appuyer sur deux faits, à savoir que les dérivées

ENGLISH

more crank in the world; the second seemed to us greater." These are very good reasons, but there is nothing mathematical about them; they are purely psychological.

And had you pressed them further, they would have added: "Why should a particular value of a transcendental function be an algebraic number? And if π were a root of an algebraic equation, why should this root be a period of the function sin 2*x*, while the same is not true of the other roots of that equation?" In short, they would have invoked the principle of sufficient reason in its vaguest form.

But what could they draw from it? At most a rule of conduct for the use of their time, which was better spent on their ordinary work than on reading an elaborate effusion that rightly inspired their distrust. What I called above objective probability, however, has nothing to do with this first problem.

The second problem is another matter.

Let us consider the first 10,000 logarithms I find in a table. From these 10,000 logarithms I pick one at random; what is the probability that its third decimal is an even number? You will not hesitate to answer 1/2. And indeed, if you go through a table and note down the third decimals of these 10,000 numbers, you will find roughly as many even digits as odd ones.

Or, if you prefer, let us write down 10,000 numbers corresponding to our 10,000 logarithms, each of these numbers being equal to +1 if the third decimal of the corresponding logarithm is even, and to −1 otherwise. Then let us take the mean of these 10,000 numbers.

I shall not hesitate to say that the mean of these 10,000 numbers is probably zero, and if I actually worked it out, I would verify that it is very small.

But even this verification is unnecessary. I could have proved rigorously that this mean is less than 0.003. To establish this result I would have needed a rather long calculation, which has no place here; for it I simply refer the reader to an article I published in the *Revue générale des Sciences* on 15 April 1899. The only point to which I must draw attention is this: in that calculation, I would have

FRENCH

première et seconde du logarithme restent, dans l'intervalle considéré, comprises entre certaines limites.

4.11.52 D'où cette première conséquence que la propriété est vraie non seulement du logarithme, mais d'une fonction continue quelconque, puisque les dérivées de toute fonction continue sont limitées.

4.11.53 Si j'étais certain d'avance du résultat, c'est d'abord que j'avais souvent observé des faits analogues pour d'autres fonctions continues ; c'est ensuite parce que je faisais dans mon for intérieur, d'une façon plus ou moins inconsciente et imparfaite, le raisonnement qui m'a conduit aux inégalités précédentes, comme un calculateur exercé qui, avant d'avoir achevé une multiplication, se rend compte que « cela va faire à peu près tant ».

4.11.54 Et d'ailleurs, comme ce que j'appelais mon intuition n'était qu'un aperçu incomplet d'un véritable raisonnement, on s'explique que l'observation ait confirmé mes prévisions, que la probabilité objective ait été d'accord avec la probabilité subjective.

4.11.55 Comme troisième exemple, je choisirai le problème suivant : Un nombre u est pris au hasard, n est un entier donné très grand ; quelle est la valeur probable de sin nu ? Ce problème n'a aucun sens par lui-même. Pour lui en donner un, il faut une convention ; nous *conviendrons* que la probabilité pour que le nombre u soit compris entre a et $a+da$ est égale à $\varphi(a)da$; qu'elle est par conséquent proportionnelle à l'étendue de l'intervalle infiniment petit da et égale à cette étendue multipliée par une fonction $\varphi(a)$ ne dépendant que de a. Quant à cette fonction, je la choisis arbitrairement, mais il faut bien que je la suppose continue.

La valeur de sin nu restant la même quand u augmente de 2π, je puis, sans restreindre la généralité, supposer que u est compris entre 0 et 2π et je serai ainsi conduit à supposer que $\varphi(a)$ est une fonction périodique dont la période est 2π.

4.11.56 La valeur probable cherchée s'exprime aisément par une intégrale simple, et il est aisé de montrer que cette intégrale est plus petite que : $2\pi M_k/n^k$, M^k étant la plus grande valeur de la dérivée k^e de $\varphi(u)$. On voit donc que, si la dérivée k^e est finie, notre valeur probable tendra vers zéro quand n croîtra indéfiniment et cela plus vite que $1/n^{k-1}$.

ENGLISH

needed to rely on only two facts, namely that the first and second derivatives of the logarithm remain, in the interval considered, between certain limits.

Hence a first consequence: the property holds not only for the logarithm but for any continuous function whatever, since the derivatives of every continuous function are bounded.

If I was certain of the result in advance, it was first because I had often observed similar facts for other continuous functions; and second because, in my own mind, more or less unconsciously and imperfectly, I was carrying out the reasoning that led me to the inequalities above—like a practiced calculator who, before finishing a multiplication, realizes that "it's going to come to about so much."

Moreover, since what I called my intuition was only an incomplete glimpse of a genuine piece of reasoning, it is understandable that observation confirmed my predictions, and that objective probability agreed with subjective probability.

As a third example I shall choose the following problem. A number u is taken at random, and n is a given, very large integer; what is the probable value of sin nu? This problem has no meaning in itself. To give it one, a convention is needed: we shall *agree* that the probability that the number u lies between a and $a+da$ is equal to $\phi(a)da$; that it is therefore proportional to the size of the infinitely small interval da, and equal to that size multiplied by a function $\phi(a)$ depending only on a. As for this function, I choose it arbitrarily, but I must of course assume it to be continuous.

Since the value of sin nu stays the same when u increases by 2π, I can, without loss of generality, assume that u lies between 0 and 2π, and I shall thus be led to assume that $\phi(a)$ is a periodic function with period 2π.

The probable value sought is easily expressed by a simple integral, and it is easy to show that this integral is less than: $2\pi M_k/n^k$, M^k being the greatest value of the kth derivative of $\phi(u)$. We see, then, that if the kth derivative is finite, our probable value will tend to zero as n increases indefinitely, and will do so faster than $1/n^{k-1}$.

FRENCH

4.11.57 La valeur probable de sin *nu* pour *n* très grand est donc nulle ; pour définir cette valeur, j'ai eu besoin d'une convention ; mais le résultat reste le même *quelle que soit cette convention*. Je ne me suis imposé que de faibles restrictions en supposant que la fonction $\varphi(a)$ est continue et périodique, et ces hypothèses sont tellement naturelles qu'on se demande comment on pourrait y échapper.

4.11.58 L'examen des trois exemples précédents, si différents à tous égards, nous a fait déjà entrevoir d'une part le rôle de ce que les philosophes appellent le principe de raison suffisante, et d'autre part l'importance de ce fait que certaines propriétés sont communes à toutes les fonctions continues. L'étude de la probabilité dans les sciences physiques nous conduira au même résultat.

4.11.59 III. — La probabilité dans les sciences physiques. — Arrivons maintenant aux problèmes qui se rapportent à ce que j'ai appelé plus haut le second degré d'ignorance ; ce sont ceux où l'on connaît la loi, mais où on ignore l'état initial du système. Je pourrais multiplier les exemples, je n'en prendrai qu'un : Quelle est la distribution actuelle probable des petites planètes sur le zodiaque ?

4.11.60 Nous savons qu'elles obéissent aux lois de Képler ; nous pouvons même, sans rien changer à la nature du problème, supposer que leurs orbites sont toutes circulaires et situées dans un même plan et que nous le sachions. En revanche, nous ignorons absolument quelle était leur distribution initiale. Cependant nous n'hésitons pas à affirmer qu'aujourd'hui cette distribution est à peu près uniforme. Pourquoi ?

4.11.61 Soit *b* la longitude d'une petite planète à l'époque initiale, c'est-à-dire à l'époque zéro ; soit *a* son moyen mouvement ; sa longitude à l'époque actuelle, c'est-à-dire à l'époque *t*, sera $at + b$. Dire que la distribution actuelle est uniforme, c'est dire que la valeur moyenne des sinus et des cosinus des multiples de $at + b$ est nulle. Pourquoi l'affirmons-nous ?

4.11.62 Représentons chaque petite planète par un point dans un plan, à savoir par le point dont les coordonnées sont précisément *a* et *b*. Tous ces points représentatifs seront contenus dans une certaine région du plan, mais comme

ENGLISH

The probable value of sin *nu* for very large *n* is therefore zero. To define this value I needed a convention; but the result remains the same *whatever that convention may be*. I imposed only slight restrictions on myself in assuming that the function $\phi(a)$ is continuous and periodic, and these hypotheses are so natural that one wonders how they could be avoided.

Examining the three preceding examples, so different in every respect, has already given us a glimpse, on the one hand, of the role of what philosophers call the principle of sufficient reason, and on the other, of the importance of the fact that certain properties are common to all continuous functions. The study of probability in the physical sciences will lead us to the same result.

III. Probability in the physical sciences.—Let us now come to the problems that relate to what I called above the second degree of ignorance: those in which we know the law but do not know the initial state of the system. I could multiply examples; I shall take only one. What is the probable current distribution of the minor planets around the zodiac?[26]

We know that they obey Kepler's laws; we may even, without changing the nature of the problem, suppose that their orbits are all circular and lie in a single plane, and that we know this. On the other hand, we are completely ignorant of what their initial distribution was. Yet we do not hesitate to assert that today this distribution is roughly uniform. Why?

Let *b* be the longitude of a minor planet at the initial epoch, that is, at time zero; let *a* be its mean motion. Its longitude at the present epoch, that is, at time *t*, will be $at + b$. To say that the current distribution is uniform is to say that the mean value of the sines and cosines of the multiples of $at + b$ is zero. Why do we assert this?[27]

Let us represent each minor planet by a point in a plane, namely the point whose coordinates are precisely *a* and *b*. All these representative points will lie within a certain region of the plane; but

26 The minor planets are what we now usually call asteroids.
27 The mean motion is a planet's average angular speed along its orbit.

FRENCH

ils sont très nombreux, cette région paraîtra criblée de points. Nous ne savons rien d'ailleurs de la distribution de ces points.

4.11.63 Que fait-on quand on veut appliquer le calcul des probabilités à une semblable question ? Quelle est la probabilité pour qu'un ou plusieurs points représentatifs se trouvent dans telle partie du plan ? Dans notre ignorance nous sommes réduits à faire une hypothèse arbitraire. Pour faire comprendre la nature de cette hypothèse, qu'on me permette d'employer au lieu d'une formule mathématique, une image grossière, mais concrète. Imaginons qu'on ait répandu sur la surface de notre plan une matière fictive dont la densité sera variable mais variera d'une manière continue. Nous conviendrons alors de dire que le nombre probable de points représentatifs qui se trouvent sur une partie du plan est proportionnel à la quantité de matière fictive qui s'y trouve.

Si l'on a alors deux régions du plan de même étendue, les probabilités pour qu'un point représentatif de l'une de nos petites planètes se trouve dans l'une ou dans l'autre de ces régions seront entre elles comme les densités moyennes de la matière fictive dans l'une et l'autre région.

4.11.64 Voilà donc deux distributions, l'une réelle, où les points représentatifs sont très nombreux, très serrés, mais discrets comme les molécules de la matière dans l'hypothèse atomique ; l'autre, éloignée de la réalité, où nos points représentatifs sont remplacés par une matière fictive continue. Cette dernière, nous savons qu'elle ne peut être réelle, mais notre ignorance nous condamne à l'adopter.

4.11.65 Si encore nous avions quelque idée de la distribution réelle des points représentatifs, nous pourrions nous arranger pour que, dans une région de quelque étendue, la densité de cette matière fictive continue soit à peu près proportionnelle au nombre de points représentatifs, ou si l'on veut, des atomes qui sont contenus dans cette région. Cela même est impossible et notre ignorance est si grande que nous sommes forcés de choisir arbitrairement la fonction qui définit la densité de notre matière fictive. Nous serons astreints seulement à une hypothèse à laquelle nous ne pourrions guère nous soustraire, nous supposerons que cette fonction est continue. Cela suffit, comme nous allons le voir, pour nous permettre une conclusion.

4.11.66

ENGLISH

since they are very numerous, this region will appear peppered with points. Beyond that, we know nothing about the distribution of these points.

What do we do when we want to apply the calculus of probabilities to a question of this kind? What is the probability that one or more representative points lie in a given part of the plane? In our ignorance we are reduced to making an arbitrary hypothesis. To convey the nature of this hypothesis, let me use, instead of a mathematical formula, a crude but concrete image. Let us imagine that a fictitious substance has been spread over the surface of our plane, with a density that varies, but varies continuously. We shall then agree to say that the probable number of representative points on a part of the plane is proportional to the quantity of fictitious substance found there.

If we then have two regions of the plane of equal size, the probabilities that a representative point of one of our minor planets lies in one or the other of these regions will be to each other as the mean densities of the fictitious substance in the two regions.

Here, then, are two distributions. One is real: in it the representative points are very numerous and very close together, but discrete, like the molecules of matter in the atomic hypothesis. The other is remote from reality: in it our representative points are replaced by a continuous fictitious substance. We know that the latter cannot be real, but our ignorance condemns us to adopt it.

If we at least had some idea of the real distribution of the representative points, we could arrange things so that, in a region of some size, the density of this continuous fictitious substance would be roughly proportional to the number of representative points—or, if you like, of atoms—contained in that region. Even that is impossible, and our ignorance is so great that we are forced to choose arbitrarily the function that defines the density of our fictitious substance. We shall be bound only by one hypothesis, which we could hardly escape: we shall assume that this function is continuous. That is enough, as we shall see, to allow us a conclusion.

	FRENCH	ENGLISH
	Quelle est à l'instant t la distribution probable des petites planètes ? Ou bien, quelle est la valeur probable du sinus de la longitude, à l'instant t, c'est-à-dire de $\sin(at + b)$? Nous avons fait au début une convention arbitraire, mais, si nous l'adoptons, cette valeur probable est entièrement définie. Décomposons le plan en éléments de surface. Considérons la valeur de $\sin(at + b)$ au centre de chacun de ces éléments ; multiplions cette valeur par la surface de l'élément et par la densité correspondante de la matière fictive ; faisons ensuite la somme pour tous les éléments du plan. Cette somme sera, par définition, la valeur moyenne probable cherchée, qui se trouvera ainsi exprimée par une intégrale double.	What is the probable distribution of the minor planets at time t? Or again, what is the probable value of the sine of the longitude at time t, that is, of $\sin(at + b)$? At the outset we made an arbitrary convention; but if we adopt it, this probable value is completely defined. Let us divide the plane into surface elements. Let us take the value of $\sin(at + b)$ at the center of each of these elements, multiply this value by the area of the element and by the corresponding density of the fictitious substance, and then add up the results for all the elements of the plane. This sum will be, by definition, the probable mean value we are looking for, which will thus be expressed by a double integral.
4.11.67	On peut croire d'abord que cette valeur moyenne dépendra du choix de la fonction φ qui définit la densité de la matière fictive et que comme cette fonction φ est arbitraire, nous pourrons, suivant le choix arbitraire que nous ferons, obtenir une valeur moyenne quelconque. Il n'en est rien.	One might think at first that this mean value will depend on the choice of the function ϕ that defines the density of the fictitious substance, and that, since this function ϕ is arbitrary, we could obtain any mean value we liked, depending on the arbitrary choice we made. Not at all.
4.11.68	Un calcul simple montre que notre intégrale double décroît très rapidement quand t augmente.	A simple calculation shows that our double integral decreases very rapidly as t increases.
4.11.69	Ainsi, je ne savais trop quelle hypothèse faire au sujet de la probabilité de telle ou telle distribution initiale ; mais, quelle que soit l'hypothèse faite, le résultat sera le même et c'est ce qui me tire d'embarras.	So I hardly knew what hypothesis to make about the probability of this or that initial distribution; but whatever hypothesis is made, the result will be the same, and that is what gets me out of my difficulty.
4.11.70	Quelle que soit la fonction φ la valeur moyenne tend vers zéro quand t augmente, et comme les petites planètes ont certainement accompli un très grand nombre de révolutions, je puis affirmer que cette valeur moyenne est très petite.	Whatever the function ϕ, the mean value tends to zero as t increases; and since the minor planets have certainly completed a very large number of revolutions, I can assert that this mean value is very small.
4.11.71	Je puis choisir φ comme je le veux, sauf une restriction toutefois : cette fonction doit être continue ; et, en effet, au point de vue de la probabilité subjective, le choix d'une fonction discontinue aurait été déraisonnable ; quelle raison pourrai-je avoir, par exemple, de supposer que la longitude initiale peut être égale à 0° juste, mais qu'elle ne peut être comprise entre 0° et 1° ?	I may choose ϕ as I please, with one restriction, however: this function must be continuous. And indeed, from the standpoint of subjective probability, choosing a discontinuous function would have been unreasonable. What reason could I have, for example, for supposing that the initial longitude can be exactly 0°, but cannot lie between 0° and 1°?
4.11.72	Mais la difficulté reparaît si l'on se place au point de vue de la probabilité objective ; si l'on passe de notre distribution imaginaire où la matière fictive était supposée continue à la distribution réelle où nos points représentatifs forment comme des atomes discrets.	But the difficulty reappears if we take the standpoint of objective probability—if we pass from our imaginary distribution, in which the fictitious substance was assumed continuous, to the real distribution, in which our representative points form something like discrete atoms.

FRENCH	ENGLISH
4.11.73 La valeur moyenne de sin(*at*+*b*) sera représentée tout simplement par : 1/n Σ sin(at + b), *n* étant le nombre des petites planètes. Au lieu d'une intégrale double portant sur une fonction continue, nous avons une somme de termes discrets. Et pourtant personne ne doutera sérieusement que cette valeur moyenne ne soit effectivement très petite.	The mean value of sin(*at*+*b*) will be represented quite simply by: 1/n ∑ sin(at + b), *n* being the number of minor planets. Instead of a double integral over a continuous function, we have a sum of discrete terms. And yet no one will seriously doubt that this mean value is in fact very small.
4.11.74 C'est que, nos points représentatifs étant très serrés, notre somme discrète différera en général très peu d'une intégrale.	The reason is that, since our representative points are very close together, our discrete sum will in general differ very little from an integral.
4.11.75 Une intégrale est la limite vers laquelle tend une somme de termes quand le nombre de ces termes croît indéfiniment. Si les termes sont très nombreux, la somme différera très peu de sa limite, c'est-à-dire de l'intégrale, et ce que j'ai dit de cette dernière sera encore vrai de la somme elle-même.	An integral is the limit toward which a sum of terms tends when the number of these terms increases indefinitely. If the terms are very numerous, the sum will differ very little from its limit, that is, from the integral, and what I have said of the integral will still hold for the sum itself.
4.11.76 Il y a des cas d'exception néanmoins. Si, par exemple, l'on avait pour toutes les petites planètes : b = π/2 – at, toutes les planètes à l'instant *t* se trouveraient avoir pour longitude π/2 et la valeur moyenne serait évidemment égale à 1. Pour cela, il faudrait qu'à l'époque 0, les petites planètes eussent été toutes placées sur une sorte de spirale d'une forme particulière à spires extrêmement serrées. Tout le monde jugera qu'une pareille distribution initiale est extrêmement improbable (et, même en la supposant réalisée, la distribution ne serait pas uniforme à l'époque actuelle, par exemple le 1er janvier 1900, mais elle le redeviendrait quelques années plus tard).	There are exceptional cases, nevertheless. If, for example, we had for all the minor planets: b = π/2 – at, all the planets would have longitude π/2 at time *t*, and the mean value would obviously equal 1. For this to happen, the minor planets would all have had to be placed at epoch 0 on a sort of spiral of a peculiar shape, with extremely tightly wound turns. Everyone will judge such an initial distribution extremely improbable (and even supposing it had occurred, the distribution would not be uniform at the present epoch—on 1 January 1900, for example—but it would become uniform again a few years later).
4.11.77 Toutefois, pourquoi jugeons-nous cette distribution initiale improbable ? Il est nécessaire de l'expliquer, car, si nous n'avions pas de raison de rejeter comme invraisemblable cette hypothèse saugrenue, tout s'écroulerait et nous ne pourrions plus rien affirmer au sujet de la probabilité de telle ou telle distribution actuelle.	Still, why do we judge this initial distribution improbable? This needs explaining, for if we had no reason to reject this outlandish hypothesis as implausible, everything would collapse, and we could no longer assert anything about the probability of this or that current distribution.
4.11.78 Ce que nous invoquerons, c'est encore le principe de raison suffisante, auquel il faut toujours revenir. Nous pourrions admettre qu'à l'origine les planètes étaient distribuées à peu près en ligne droite ; nous pourrions admettre qu'elles étaient irrégulièrement distribuées ; mais il nous semble qu'il n'y a pas de raison suffisante pour que la cause inconnue qui leur a donné naissance ait agi suivant une courbe si régulière et pourtant si compliquée, et qui paraîtrait précisément avoir été	What we shall invoke is, once again, the principle of sufficient reason, to which we must always return. We could admit that the planets were originally distributed roughly in a straight line; we could admit that they were irregularly distributed. But it seems to us that there is no sufficient reason why the unknown cause that gave rise to them should have acted along a curve so regular and yet so complicated—a curve that would seem to have

	FRENCH	ENGLISH
	choisie exprès pour que la distribution actuelle ne fût pas uniforme.	been chosen precisely so that the current distribution would not be uniform.
4.11.79	IV. — Rouge et Noir. — Les questions soulevées par les jeux de hasard, comme celui de la roulette, sont, au fond, tout à fait analogues à celles que nous venons de traiter.	IV. Red and black.—The questions raised by games of chance, such as roulette, are at bottom entirely analogous to those we have just dealt with.
4.11.80	Par exemple, un cadran est partagé en un grand nombre de subdivisions égales, alternativement rouges et noires ; une aiguille est lancée avec force, et, après avoir fait un grand nombre de tours, elle s'arrête devant une de ces subdivisions. La probabilité, pour que cette division soit rouge, est évidemment 1/2.	For example, a dial is divided into a large number of equal sections, alternately red and black. A pointer is spun hard, and after making a great many turns, it stops in front of one of these sections. The probability that this section is red is obviously 1/2.
4.11.81	L'aiguille va tourner d'un angle θ, comprenant plusieurs circonférences ; j'ignore quelle est la probabilité pour que l'aiguille soit lancée avec une force telle que cet angle soit compris entre θ et θ + $d\theta$; mais, je puis faire une convention ; je puis supposer que cette probabilité est $\varphi(\theta)d\theta$; quant à la fonction φ(θ), je puis la choisir d'une façon entièrement arbitraire ; il n'y a rien qui puisse me guider dans mon choix ; cependant, je suis naturellement conduit à supposer cette fonction continue.	The pointer will turn through an angle θ amounting to several full turns. I do not know the probability that the pointer will be spun with such force that this angle lies between θ and θ + $d\theta$; but I can make a convention. I can suppose that this probability is $\phi(\theta)d\theta$. As for the function ϕ(θ), I can choose it entirely arbitrarily; there is nothing to guide me in my choice. Yet I am naturally led to suppose this function continuous.
4.11.82	Soit ε la longueur (comptée sur la circonférence de rayon 1) de chaque subdivision rouge ou noire.	Let ε be the length (measured on the circle of radius 1) of each red or black section.
4.11.83	Il faut calculer l'intégrale de $\varphi(\theta)d\theta$ en l'étendant, d'une part, à toutes les divisions rouges, d'autre part, à toutes les divisions noires, et comparer les résultats.	We must calculate the integral of $\phi(\theta)d\theta$, taking it on the one hand over all the red sections and on the other over all the black sections, and compare the results.
4.11.84	Considérons un intervalle 2ε, comprenant une division rouge et la division noire qui la suit. Soit M et m, la plus grande et la plus petite valeur de la fonction φ(θ) dans cet intervalle. L'intégrale étendue aux divisions rouges sera plus petite que ΣMε ; l'intégrale étendue aux divisions noires sera plus grande que Σmε ; la différence sera donc plus petite que Σ(M − m)ε. Mais, si la fonction φ est supposée continue ; si, d'autre part, l'intervalle ε est très petit par rapport à l'angle total parcouru par l'aiguille, la différence M − m sera très petite. La différence des deux intégrales sera donc très petite, et la probabilité sera très voisine de 1/2.	Consider an interval 2ε comprising a red section and the black section that follows it. Let M and m be the greatest and least values of the function ϕ(θ) in this interval. The integral taken over the red sections will be less than ∑Mε; the integral taken over the black sections will be greater than ∑mε; the difference will therefore be less than ∑(M − m)ε. But if the function ϕ is assumed continuous, and if, moreover, the interval ε is very small relative to the total angle traversed by the pointer, the difference M − m will be very small. The difference between the two integrals will therefore be very small, and the probability will be very close to 1/2.
4.11.85	On comprend que, sans rien savoir de la fonction φ, je doive agir comme si la probabilité était 1/2. On s'explique, d'autre part, pourquoi, si, me plaçant au point de vue objectif, j'observe un certain nombre de coups, l'observation me donnera à peu près autant de coups noirs que de coups rouges.	We can see why, without knowing anything about the function ϕ, I should act as if the probability were 1/2. We can also see why, if I take the objective standpoint and observe a certain number of spins, observation will give me roughly as many black results as red ones.

FRENCH	ENGLISH
4.11.86 Tous les joueurs connaissent cette loi objective ; mais elle les entraîne dans une singulière erreur, qui a été souvent relevée, et dans laquelle ils retombent toujours. Quand la rouge est sortie, par exemple, six fois de suite, ils mettent sur la noire, croyant jouer à coup sûr ; parce que, disent-ils, il est bien rare que la rouge sorte sept fois de suite.	All gamblers know this objective law; but it leads them into a curious error, one that has often been pointed out and into which they always fall again. When red has come up, say, six times in a row, they bet on black, thinking it a sure thing—because, they say, it is very rare for red to come up seven times in a row.
4.11.87 En réalité, leur probabilité de gain reste 1/2. L'observation montre, il est vrai, que les séries de sept rouges consécutives sont très rares ; mais, les séries de six rouges suivies d'une noire sont tout aussi rares. Ils ont remarqué la rareté des séries de sept rouges ; s'ils n'ont pas remarqué la rareté des séries de six rouges et une noire, c'est uniquement parce que de pareilles séries frappent moins l'attention.	In reality their probability of winning remains 1/2. Observation does show, it is true, that runs of seven consecutive reds are very rare; but runs of six reds followed by a black are just as rare. They have noticed how rare runs of seven reds are; if they have not noticed how rare runs of six reds and a black are, it is solely because such runs are less striking.

THE PROBABILITY OF CAUSES

Inferring causes from effects requires a prior convention, and that convention rests on belief in continuity.

FRENCH	ENGLISH
4.11.88 V. — La Probabilité des Causes. — J'arrive aux problèmes de probabilité des causes, les plus importants au point de vue des applications scientifiques. Deux étoiles, par exemple, sont très rapprochées sur la sphère céleste ; ce rapprochement apparent est-il un pur effet du hasard, et ces étoiles, quoique à peu près sur un même rayon visuel, sont-elles placées à des distances très différentes de la Terre et, par conséquent, très éloignées l'une et l'autre ? Ou bien correspond-il à un rapprochement réel ? C'est là un problème de probabilité des causes.	V. The probability of causes.—I come now to problems of the probability of causes, the most important from the standpoint of scientific applications. Suppose two stars are very close together on the celestial sphere. Is this apparent closeness a pure effect of chance—are these stars, though roughly on the same line of sight, at very different distances from the Earth, and therefore very far from each other? Or does it correspond to a real closeness? That is a problem of the probability of causes.
4.11.89 Je rappelle d'abord qu'au début de tous les problèmes de probabilité des effets qui nous ont occupés jusqu'ici, nous avons toujours dû placer une convention plus ou moins justifiée. Et, si le plus souvent le résultat était, dans une certaine mesure, indépendant de cette convention, ce n'était qu'à la condition de certaines hypothèses qui nous permettaient de rejeter *à priori* les fonctions discontinues, par exemple, ou certaines conventions saugrenues.	I recall first that at the start of all the problems of the probability of effects that have occupied us so far, we have always had to put a more or less justified convention. And if, more often than not, the result was to some extent independent of this convention, that was only on condition of certain hypotheses that allowed us to reject *a priori* discontinuous functions, for example, or certain outlandish conventions.
4.11.90 Nous retrouverons quelque chose d'analogue, en nous occupant de la probabilité des causes. Un effet peut être produit par la cause A ou par la cause B. L'effet vient d'être observé ; on demande la probabilité pour qu'il soit dû à la cause A ; c'est la probabilité de la cause *à posteriori*. Mais, je ne pourrais la calculer, si une convention plus ou moins justifiée ne me faisait connaître *d'avance* quelle est	We shall find something similar when we deal with the probability of causes. An effect may be produced by cause A or by cause B. The effect has just been observed; we ask for the probability that it is due to cause A. This is the *a posteriori* probability of the cause. But I could not calculate it unless a more or less justified convention told me *in*

	FRENCH	ENGLISH
	la probabilité *à priori*, pour que la cause A entre en action ; je veux dire la probabilité de cet événement, pour quelqu'un qui n'aurait pas encore observé l'effet.	*advance* the *a priori* probability that cause A would come into play—I mean the probability of that event for someone who had not yet observed the effect.
4.11.91	Pour mieux m'expliquer, je reviens à l'exemple du jeu d'écarté, cité plus haut ; mon adversaire donne pour la première fois et il tourne le roi ; quelle est la probabilité pour que ce soit un grec ? Les formules ordinairement enseignées donnent 8/9, résultat évidemment bien surprenant. Si on les examine de plus près, on voit qu'on fait le calcul comme si, *avant de nous asseoir à la table de jeu*, j'avais considéré qu'il y avait une chance sur deux pour que mon adversaire ne fût pas honnête. Hypothèse absurde, puisque, dans ce cas, je n'aurais certainement pas joué avec lui ; et c'est ce qui explique l'absurdité de la conclusion.	To explain myself better, I return to the example of the game of écarté mentioned above. My opponent deals for the first time and turns up the king; what is the probability that he is a cardsharp? The formulas usually taught give 8/9, an obviously very surprising result. If we look at them more closely, we see that the calculation is done as if, *before we sat down at the card table*, I had considered that there was one chance in two that my opponent was dishonest. An absurd hypothesis, since in that case I would certainly not have played with him; and that is what explains the absurdity of the conclusion.
4.11.92	La convention sur la probabilité *à priori* était injustifiée ; c'est pour cela que le calcul de la probabilité *à posteriori* m'avait conduit à un résultat inadmissible. On voit l'importance de cette convention préalable ; j'ajouterai même que, si l'on n'en faisait aucune, le problème de la probabilité *à posteriori* n'aurait aucun sens ; il faut toujours le faire, soit explicitement, soit tacitement.	The convention about the *a priori* probability was unjustified; that is why the calculation of the *a posteriori* probability led me to an unacceptable result. We see how important this prior convention is. I shall even add that if none were made, the problem of *a posteriori* probability would have no meaning; it must always be made, either explicitly or tacitly.
4.11.93	Passons à un exemple d'un caractère plus scientifique. Je veux déterminer une loi expérimentale ; cette loi, quand je la connaîtrai, pourra être représentée par une courbe ; je fais un certain nombre d'observations isolées ; chacune d'elles sera représentée par un point. Quand j'ai obtenu ces différents points, je fais passer une courbe entre ces points en m'efforçant de m'en écarter le moins possible et, cependant, de conserver à ma courbe une forme régulière, sans points anguleux, sans inflexions trop accentuées, sans variation brusque du rayon de courbure.	Let us turn to an example of a more scientific character. I want to determine an experimental law. This law, once I know it, can be represented by a curve. I make a certain number of separate observations; each of them will be represented by a point. Once I have obtained these various points, I draw a curve between them, trying to stay as close to them as possible while still giving my curve a regular shape—no corners, no overly sharp inflections, no abrupt changes in the radius of curvature.
	Cette courbe me représentera la loi probable, et j'admets, non seulement qu'elle me fait connaître les valeurs de la fonction intermédiaires entre celles qui ont été observées, mais encore qu'elle me fait connaître les valeurs observées elles-mêmes plus exactement que l'observation directe (c'est pour cela que je la fais passer près de mes points et non pas par ces points eux-mêmes).	This curve will represent the probable law for me, and I take it that it gives me not only the values of the function intermediate between those observed, but also the observed values themselves more accurately than direct observation does (that is why I draw it near my points and not through the points themselves).
4.11.94	C'est là un problème de probabilité des causes. Les effets, ce sont les mesures que j'ai enregistrées ; ils dépendent de la combinaison de deux causes : la loi véritable du phénomène et les erreurs d'observations. Il s'agit,	This is a problem of the probability of causes. The effects are the measurements I have recorded; they depend on the combination of two causes: the true law of the phenomenon and the errors of

FRENCH	ENGLISH
connaissant les effets, de chercher la probabilité pour que le phénomène obéisse à telle loi, et pour que les observations aient été affectées de telle erreur. La loi la plus probable correspond alors à la courbe tracée, et l'erreur la plus probable d'une observation est représentée par la distance du point correspondant à cette courbe.	observation. Knowing the effects, we must find the probability that the phenomenon obeys a given law and that the observations were affected by a given error. The most probable law then corresponds to the curve drawn, and the most probable error of an observation is represented by the distance of the corresponding point from this curve.
4.11.95 Mais, le problème n'aurait aucun sens si, avant toute observation, je ne me faisais une idée *à priori* de la probabilité de telle ou telle loi, et des chances d'erreur auxquelles je suis exposé.	But the problem would have no meaning if, before any observation, I did not form an *a priori* idea of the probability of this or that law, and of the chances of error to which I am exposed.
4.11.96 Si mes instruments sont bons (et cela, je le savais avant d'avoir observé), je ne permettrai pas à ma courbe de s'écarter beaucoup des points qui représentent les mesures brutes. S'ils sont mauvais, je pourrai m'en éloigner un peu plus, afin d'obtenir une courbe moins sinueuse ; je sacrifierai davantage à la régularité.	If my instruments are good (and I knew that before observing), I shall not allow my curve to stray far from the points that represent the raw measurements. If they are poor, I may move a little further away from them in order to get a less winding curve; I shall sacrifice more to regularity.
4.11.97 Pourquoi donc est-ce que je cherche à tracer une courbe sans sinuosités ? C'est parce que je considère *à priori* une loi représentée par une fonction continue (ou par une fonction dont les dérivées d'ordre élevé sont petites), comme plus probable qu'une loi ne satisfaisant pas à ces conditions. Sans cette croyance, le problème dont nous parlons n'aurait aucun sens ; l'interpolation serait impossible ; on ne pourrait déduire une loi d'un nombre fini d'observations ; la science n'existerait pas.	Why, then, do I try to draw a curve without twists and turns? Because I consider *a priori* a law represented by a continuous function (or by a function whose higher-order derivatives are small) as more probable than a law that does not satisfy these conditions. Without this belief, the problem we are discussing would have no meaning; interpolation would be impossible; no law could be deduced from a finite number of observations; science would not exist.
4.11.98 Il y a cinquante ans, les physiciens considéraient une loi simple comme plus probable qu'une loi compliquée, toutes choses égales d'ailleurs. Ils invoquaient même ce principe en faveur de la loi de Mariotte contre les expériences de Regnault. Aujourd'hui, ils ont répudié cette croyance ; que de fois pourtant ne sont-ils pas obligés d'agir comme s'ils l'avaient conservée ! Quoi qu'il en soit, ce qui reste de cette tendance, c'est la croyance à la continuité, et nous venons de voir que, si cette croyance disparaissait à son tour, la science expérimentale deviendrait impossible.	Fifty years ago, physicists considered a simple law more probable than a complicated one, other things being equal. They even invoked this principle in favor of Mariotte's law against Regnault's experiments. Today they have repudiated this belief; and yet how often are they obliged to act as if they still held it! Be that as it may, what remains of this tendency is the belief in continuity, and we have just seen that if this belief disappeared in its turn, experimental science would become impossible.[28]
4.11.99 VI. — La Théorie des Erreurs. — Nous sommes ainsi amenés à parler de la théorie des erreurs, qui se rattache directement au problème de la probabilité des causes. Ici encore nous constatons des *effets*, à savoir un certain nombre d'observations discordantes, et nous cherchons à deviner les *causes*, qui sont d'une part la véritable valeur de la quantité à mesurer, d'autre part l'erreur commise	VI. The theory of errors.—We are thus led to speak of the theory of errors, which is directly connected with the problem of the probability of causes. Here again we observe *effects*, namely a certain number of discordant observations, and we try to guess the *causes*, which are, on the one hand, the

28 Henri Victor Regnault (1810–1878), French physicist who measured how real gases depart from Mariotte's law.

FRENCH	ENGLISH
dans chaque observation isolée. Il faudrait calculer quelle est *à posteriori* la grandeur probable de chaque erreur, et, par conséquent, la valeur probable de la quantité à mesurer.	true value of the quantity to be measured and, on the other, the error made in each separate observation. We would need to calculate the probable *a posteriori* magnitude of each error, and hence the probable value of the quantity to be measured.
4.11.100 Mais, ainsi que je viens de l'expliquer, on ne saurait entreprendre ce calcul, si l'on n'admettait *à priori*, c'est-à-dire avant toute observation, une loi de probabilité des erreurs. Y a-t-il une loi des erreurs ?	But, as I have just explained, this calculation could not be undertaken unless we accepted *a priori*, that is, before any observation, a law of probability of errors. Is there a law of errors?
4.11.101 La loi des erreurs admise par tous les calculateurs est la loi de Gauss, qui est représentée par une certaine courbe transcendante connue sous le nom de « courbe en cloche ».	The law of errors accepted by all calculators is Gauss's law, which is represented by a certain transcendental curve known as the "bell curve."[29]
4.11.102 Mais d'abord il convient de rappeler la distinction classique entre les erreurs systématiques et accidentelles. Si nous mesurons une longueur avec un mètre trop long, nous trouverons toujours un nombre trop faible et il ne servira à rien de recommencer la mesure plusieurs fois ; c'est là une erreur systématique. Si nous la mesurons avec un mètre exact, nous pourrons nous tromper cependant, mais nous nous tromperons tantôt en plus, tantôt en moins, et, quand nous ferons la moyenne d'un grand nombre de mesures, l'erreur tendra à s'atténuer. Ce sont là des erreurs accidentelles.	But first we should recall the classic distinction between systematic and accidental errors. If we measure a length with a meter stick that is too long, we shall always get a figure that is too small, and repeating the measurement several times will be of no use; that is a systematic error. If we measure it with an accurate meter stick, we may still make mistakes, but we shall err sometimes too high, sometimes too low, and when we take the mean of a large number of measurements, the error will tend to diminish. These are accidental errors.
4.11.103 Il est évident d'abord que les erreurs systématiques ne peuvent satisfaire à la loi de Gauss ; mais les erreurs accidentelles y satisfont-elles ? On a tenté un grand nombre de démonstrations ; presque toutes sont de grossiers paralogismes. On peut néanmoins démontrer la loi de Gauss en partant des hypothèses suivantes : l'erreur commise est la résultante d'un très grand nombre d'erreurs partielles et indépendantes ; chacune des erreurs partielles est très petite et obéit d'ailleurs à une loi de probabilité quelconque, sauf que la probabilité d'une erreur positive est la même que celle d'une erreur égale et de signe contraire. Il est évident que ces conditions seront remplies souvent, mais pas toujours, et nous pourrons réserver le nom d'accidentelles aux erreurs qui y satisfont.	It is evident, first, that systematic errors cannot satisfy Gauss's law; but do accidental errors satisfy it? A great many proofs have been attempted; almost all are crude fallacies. Gauss's law can nevertheless be proved starting from the following hypotheses: the error made is the resultant of a very large number of partial and independent errors; each of the partial errors is very small and otherwise obeys any law of probability whatever, except that the probability of a positive error is the same as that of an equal error of opposite sign. It is evident that these conditions will often be met, but not always, and we may reserve the name accidental for the errors that satisfy them.
4.11.104 On voit que la méthode des moindres carrés n'est pas légitime dans tous les cas ; en général, les physiciens s'en défient plus que les astronomes. Cela tient sans doute à ce que ces derniers, outre les erreurs systématiques qu'ils rencontrent comme les physiciens, ont à lutter avec une	We see that the method of least squares is not legitimate in every case; in general, physicists distrust it more than astronomers do. This is no doubt because astronomers, besides the systematic errors they meet with just as physicists do, have

29 Carl Friedrich Gauss (1777–1855), German mathematician; the law is today usually called the normal distribution.

FRENCH

cause d'erreur extrêmement importante et qui est tout à fait accidentelle ; je veux parler des ondulations atmosphériques.

Aussi il est très curieux d'entendre un physicien discuter avec un astronome au sujet d'une méthode d'observation : le physicien, persuadé qu'une bonne mesure vaut mieux que beaucoup de mauvaises, se préoccupe avant tout d'éliminer à force de précautions les dernières erreurs systématiques et l'astronome lui répond : « Mais vous ne pourrez observer ainsi qu'un petit nombre d'étoiles ; les erreurs accidentelles ne disparaîtront pas ».

4.11.105 Que devons-nous conclure ? Faut-il continuer à appliquer la méthode des moindres carrés ? Nous devons distinguer : nous avons éliminé toutes les erreurs systématiques que nous avons pu soupçonner ; nous savons bien qu'il y en a encore, mais nous ne pouvons les découvrir ; cependant, il faut prendre un parti et adopter une valeur définitive, qui sera regardée comme la valeur probable ; pour cela, il est évident que ce que nous avons de mieux à faire, c'est d'appliquer la méthode de Gauss. Nous n'avons fait qu'appliquer une règle pratique se rapportant à la probabilité subjective. Il n'y a rien à dire.

4.11.106 Mais l'on veut aller plus loin et affirmer que non seulement la valeur probable est de tant, mais que l'erreur probable commise sur le résultat est de tant. *Cela est absolument illégitime* ; cela ne serait vrai que si nous étions sûrs que toutes les erreurs systématiques sont éliminées, et nous n'en savons absolument rien. Nous avons deux séries d'observations ; en appliquant la règle des moindres carrés, nous trouvons que l'erreur probable sur la première série est deux fois plus faible que sur la seconde. La seconde série peut cependant être meilleure que la première, parce que la première est peut-être affectée d'une grosse erreur systématique.

Tout ce que nous pouvons dire, c'est que la première série est *probablement* meilleure que la seconde, puisque son erreur accidentelle est plus faible, et que nous n'avons aucune raison d'affirmer que l'erreur systématique est plus grande pour une des séries que pour l'autre, notre ignorance à ce sujet étant absolue.

4.11.107 VII. — Conclusions. — Dans les lignes qui précèdent, j'ai posé bien des problèmes sans en résoudre aucun. Je ne regrette pas cependant de les avoir écrites, car elles inviteront peut-être le lecteur à réfléchir sur ces délicates questions.

4.11.108

ENGLISH

to contend with an extremely important source of error that is entirely accidental: I mean atmospheric undulations.

So it is very curious to hear a physicist arguing with an astronomer about a method of observation. The physicist, convinced that one good measurement is worth more than many bad ones, is concerned above all with eliminating, by dint of precautions, the last systematic errors; and the astronomer replies: "But that way you will be able to observe only a small number of stars; the accidental errors will not disappear."

What should we conclude? Should we go on applying the method of least squares? We must draw a distinction. We have eliminated all the systematic errors we could suspect; we know very well that some remain, but we cannot find them. Still, we have to make a decision and adopt a definitive value, which will be regarded as the probable value; and for that, it is evident that the best we can do is to apply Gauss's method. We have merely applied a practical rule relating to subjective probability. There is nothing to object to.

But people want to go further and assert not only that the probable value is so much, but that the probable error in the result is so much. *That is absolutely illegitimate.* It would be true only if we were sure that all systematic errors had been eliminated, and we know absolutely nothing about that. Suppose we have two series of observations; applying the rule of least squares, we find that the probable error for the first series is half as large as for the second. The second series may nonetheless be better than the first, because the first may be affected by a large systematic error.

All we can say is that the first series is *probably* better than the second, since its accidental error is smaller, and we have no reason to assert that the systematic error is greater for one series than for the other, our ignorance on this point being absolute.

VII. Conclusions.—In the preceding pages I have posed many problems without solving any of them. Yet I do not regret having written them, for they may perhaps invite the reader to reflect on these delicate questions.

FRENCH	ENGLISH
Quoi qu'il en soit, il y a certains points qui semblent bien établis. Pour entreprendre un calcul quelconque de probabilité, et même pour que ce calcul ait un sens, il faut admettre, comme point de départ, une hypothèse ou une convention qui comporte toujours un certain degré d'arbitraire. Dans le choix de cette convention, nous ne pouvons être guidés que par le principe de raison suffisante. Malheureusement, ce principe est bien vague et bien élastique et, dans l'examen rapide que nous venons de faire, nous l'avons vu prendre bien des formes différentes. La forme sous laquelle nous l'avons rencontré le plus souvent, c'est la croyance à la continuité, croyance qu'il serait difficile de justifier par un raisonnement apodictique, mais sans laquelle toute science serait impossible.	Be that as it may, certain points seem well established. To undertake any calculation of probability whatever—and even for such a calculation to have a meaning—we must accept, as a starting point, a hypothesis or a convention that always involves a certain degree of arbitrariness. In choosing this convention we can be guided only by the principle of sufficient reason. Unfortunately, this principle is very vague and very elastic, and in the quick survey we have just made, we have seen it take many different forms. The form in which we have met it most often is the belief in continuity—a belief that would be hard to justify by apodictic reasoning, but without which all science would be impossible.
Enfin, les problèmes où le calcul des probabilités peut être appliqué avec profit sont ceux où le résultat est indépendant de l'hypothèse faite au début, pourvu seulement que cette hypothèse satisfasse à la condition de continuité.	Finally, the problems to which the calculus of probabilities can usefully be applied are those in which the result is independent of the hypothesis made at the outset, provided only that this hypothesis satisfies the condition of continuity.

CHAPTER XII: OPTICS AND ELECTRICITY

Fresnel's optics survives within Maxwell's theory, which proves that a mechanical explanation is possible.

FRENCH	ENGLISH
4.12.1 La théorie de Fresnel. — Le meilleur exemple[1] que l'on puisse choisir est la théorie de la lumière et ses rapports avec la théorie de l'électricité. Grâce à Fresnel, l'optique est la partie la plus avancée de la physique ; la théorie dite des ondulations forme un ensemble vraiment satisfaisant pour l'esprit ; mais il ne faut pas lui demander ce qu'elle ne peut nous donner.	Fresnel's theory.—The best example[1] we could choose is the theory of light and its relations with the theory of electricity. Thanks to Fresnel, optics is the most advanced branch of physics; the so-called wave theory forms a whole that is truly satisfying to the mind. But we must not ask of it what it cannot give us.
31	
4.12.2 Les théories mathématiques n'ont pas pour objet de nous révéler la véritable nature des choses ; ce serait là une prétention déraisonnable. Leur but unique est de coordonner les lois physiques que l'expérience nous fait	The aim of mathematical theories is not to reveal to us the true nature of things; that would be an unreasonable pretension. Their sole purpose is to coordinate the physical laws that experiment

31

[1] Ce chapitre est la reproduction partielle des préfaces de deux de mes ouvrages : *Théorie mathématique de la lumière* (Paris, Naud, 1889) et *Électricité et optique* (Paris, Naud, 1901).

[1] This chapter partly reproduces the prefaces of two of my works: *Théorie mathématique de la lumière* (Paris, Naud, 1889) and *Électricité et optique* (Paris, Naud, 1901).[30]

30 The titles mean "Mathematical Theory of Light" and "Electricity and Optics."

FRENCH	ENGLISH
connaître, mais que sans le secours des mathématiques nous ne pourrions même énoncer.	makes known to us, but which, without the help of mathematics, we could not even state.
4.12.3 Peu nous importe que l'éther existe réellement, c'est l'affaire des métaphysiciens ; l'essentiel pour nous c'est que tout se passe comme s'il existait et que cette hypothèse est commode pour l'explication des phénomènes. Après tout, avons-nous d'autre raison de croire à l'existence des objets matériels ? Ce n'est là aussi qu'une hypothèse commode ; seulement elle ne cessera jamais de l'être, tandis qu'un jour viendra sans doute où l'éther sera rejeté comme inutile.	It matters little to us whether the ether really exists; that is the metaphysicians' business. What matters to us is that everything happens as if it existed, and that this hypothesis is convenient for explaining phenomena. After all, have we any other reason for believing in the existence of material objects? That too is only a convenient hypothesis; only it will never cease to be so, whereas a day will no doubt come when the ether is discarded as useless.
4.12.4 Mais ce jour-là même, les lois de l'optique et les équations qui les traduisent analytiquement resteront vraies, au moins comme première approximation. Il sera donc toujours utile d'étudier une doctrine qui relie entre elles toutes ces équations.	But even on that day, the laws of optics and the equations that express them analytically will remain true, at least as a first approximation. It will therefore always be useful to study a doctrine that links all these equations together.
4.12.5 La théorie des ondulations repose sur une hypothèse moléculaire ; pour les uns qui croient découvrir ainsi la cause sous la loi, c'est un avantage ; pour les autres, c'est une raison de méfiance ; mais cette méfiance me paraît aussi peu justifiée que l'illusion des premiers.	The wave theory rests on a molecular hypothesis. For some, who believe they thereby uncover the cause beneath the law, this is an advantage; for others, it is a reason for distrust. But this distrust seems to me as little justified as the illusion of the former.
4.12.6 Ces hypothèses ne jouent qu'un rôle secondaire. On pourrait les sacrifier ; on ne le fait pas d'ordinaire parce que l'exposition y perdrait en clarté, mais cette raison est la seule.	These hypotheses play only a secondary role. They could be sacrificed; this is not usually done because the exposition would lose in clarity, but that is the only reason.
4.12.7 En effet, si on y regardait de près, on verrait qu'on n'emprunte aux hypothèses moléculaires que deux choses : le principe de la conservation de l'énergie et la forme linéaire des équations qui est la loi générale des petits mouvements, comme de toutes les petites variations.	Indeed, if we looked closely, we would see that only two things are borrowed from the molecular hypotheses: the principle of the conservation of energy, and the linear form of the equations, which is the general law of small motions, as of all small variations.
4.12.8 C'est ce qui explique pourquoi la plupart des conclusions de Fresnel subsistent sans changement quand on adopte la théorie électro-magnétique de la lumière.	This explains why most of Fresnel's conclusions survive unchanged when we adopt the electromagnetic theory of light.
4.12.9 La Théorie de Maxwell. — C'est, on le sait, Maxwell qui a rattaché par un lien étroit deux parties de la physique, jusque-là complètement étrangères l'une à l'autre, l'optique et l'électricité. En se fondant ainsi dans un ensemble plus vaste, dans une harmonie supérieure, l'optique de Fresnel n'a pas cessé d'être vivante. Ses diverses parties subsistent, et leurs rapports mutuels sont toujours les mêmes. Seulement, le langage dont nous nous servons pour les exprimer a changé, et d'autre	Maxwell's theory.—It was Maxwell, as we know, who bound together closely two branches of physics until then entirely foreign to each other: optics and electricity. In merging thus into a larger whole, a higher harmony, Fresnel's optics has not ceased to be alive. Its various parts survive, and their mutual relations are still the same. Only the language we use to express them has changed; and, besides, Maxwell has revealed to us other re-

	FRENCH	ENGLISH
	part, Maxwell nous a révélé d'autres rapports, jusqu'à lui insoupçonnés, entre les différentes parties de l'optique et le domaine de l'électricité.	lations, unsuspected before him, between the different parts of optics and the domain of electricity.
4.12.10	La première fois qu'un lecteur français ouvre le livre de Maxwell, un sentiment de malaise, et souvent même de défiance se mêle d'abord à son admiration. Ce n'est qu'après un commerce prolongé et au prix de beaucoup d'efforts, que ce sentiment se dissipe. Quelques esprits éminents le conservent même toujours.	The first time a French reader opens Maxwell's book, a feeling of unease, and often even of distrust, mingles at first with his admiration. Only after prolonged acquaintance, and at the cost of much effort, does this feeling fade. Some eminent minds even retain it permanently.
4.12.11	Pourquoi les idées du savant anglais ont-elles tant de peine à s'acclimater chez nous ? C'est sans doute que l'éducation reçue par la plupart des Français éclairés les dispose à goûter la précision et la logique avant toute autre qualité.	Why do the English scientist's ideas have so much trouble taking root among us? No doubt because the education received by most educated French people disposes them to value precision and logic above every other quality.
4.12.12	Les anciennes théories de la physique mathématique nous donnaient à cet égard une satisfaction complète. Tous nos maîtres, depuis Laplace jusqu'à Cauchy, ont procédé de la même manière. Partant d'hypothèses nettement énoncées, ils en ont déduit toutes les conséquences avec une rigueur mathématique, et les ont comparées ensuite avec l'expérience. Ils semblent vouloir donner à chacune des branches de la physique la même précision qu'à la mécanique céleste.	The older theories of mathematical physics gave us complete satisfaction in this respect. All our masters, from Laplace to Cauchy, proceeded in the same way. Starting from clearly stated hypotheses, they deduced all their consequences with mathematical rigor, and then compared them with experiment. They seem to have wanted to give each branch of physics the same precision as celestial mechanics.[32]
4.12.13	Pour un esprit accoutumé à admirer de tels modèles, une théorie est difficilement satisfaisante. Non seulement il n'y tolérera pas la moindre apparence de contradiction, mais il exigera que les diverses parties en soient logiquement reliées les unes aux autres et que le nombre des hypothèses distinctes soit réduit au minimum.	For a mind accustomed to admiring such models, a theory is seldom satisfying. Not only will it not tolerate the slightest appearance of contradiction, but it will demand that the various parts be logically connected with one another, and that the number of distinct hypotheses be reduced to a minimum.
4.12.14	Ce n'est pas tout, il aura encore d'autres exigences qui me paraissent moins raisonnables. Derrière la matière qu'atteignent nos sens et que l'expérience nous fait connaître, il voudra voir une autre matière, la seule véritable à ses yeux, qui n'aura plus que des qualités purement géométriques et dont les atomes ne seront plus que des points mathématiques soumis aux seules lois de la dynamique. Et pourtant ces atomes invisibles et sans couleur, il cherchera, par une inconsciente contradiction, à se les représenter et par conséquent à les rapprocher le plus possible de la matière vulgaire.	That is not all; it will make further demands, which seem to me less reasonable. Behind the matter that our senses reach and that experiment makes known to us, it will want to see another matter, the only true one in its eyes, which will have only purely geometric qualities, and whose atoms will be nothing but mathematical points subject solely to the laws of dynamics. And yet, by an unconscious contradiction, it will try to picture these invisible, colorless atoms, and so to bring them as close as possible to ordinary matter.
4.12.15	C'est alors seulement qu'il sera pleinement satisfait et s'imaginera avoir pénétré le secret de l'univers. Si cette	Only then will it be fully satisfied and imagine that it has penetrated the secret of the universe. If this

32 Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), French mathematician.

FRENCH	ENGLISH
satisfaction est trompeuse, il n'en est pas moins pénible d'y renoncer.	satisfaction is deceptive, it is no less painful to give it up.
4.12.16 Ainsi, en ouvrant Maxwell, un Français s'attend à y trouver un ensemble théorique aussi logique et aussi précis que l'optique physique fondée sur l'hypothèse de l'éther ; il se prépare ainsi une déception que je voudrais éviter au lecteur en l'avertissant tout de suite de ce qu'il doit chercher dans Maxwell et de ce qu'il n'y saurait trouver.	Thus, on opening Maxwell, a Frenchman expects to find a theoretical whole as logical and as precise as the physical optics founded on the ether hypothesis. He is thereby preparing for himself a disappointment that I should like to spare the reader by warning him at once of what he should look for in Maxwell, and of what he cannot find there.
4.12.17 Maxwell ne donne pas une explication mécanique de l'électricité et du magnétisme ; il se borne à démontrer que cette explication est possible.	Maxwell does not give a mechanical explanation of electricity and magnetism; he confines himself to proving that such an explanation is possible.
4.12.18 Il montre également que les phénomènes optiques ne sont qu'un cas particulier des phénomènes électromagnétiques. De toute théorie de l'électricité, on pourra donc déduire immédiatement une théorie de la lumière.	He also shows that optical phenomena are only a special case of electromagnetic phenomena. From any theory of electricity, then, a theory of light can be deduced immediately.
4.12.19 La réciproque n'est malheureusement pas vraie ; d'une explication complète de la lumière, il n'est pas toujours aisé de tirer une explication complète des phénomènes électriques. Cela n'est pas facile, en particulier, si l'on veut partir de la théorie de Fresnel ; cela ne serait sans doute pas impossible ; mais on n'en arrive pas moins à se demander si l'on ne va pas être forcé de renoncer à d'admirables résultats que l'on croyait définitivement acquis. Cela semble un pas en arrière ; et beaucoup de bons esprits ne veulent pas s'y résigner.	Unfortunately, the converse is not true: from a complete explanation of light it is not always easy to derive a complete explanation of electrical phenomena. It is not easy, in particular, if we want to start from Fresnel's theory. It would doubtless not be impossible; but we are nonetheless led to wonder whether we shall be forced to give up admirable results that we thought permanently secured. That looks like a step backward, and many sound minds refuse to resign themselves to it.
4.12.20 Quand le lecteur aura consenti à borner ses espérances, il se heurtera encore à d'autres difficultés, le savant anglais ne cherche pas à construire un édifice unique, définitif et bien ordonné, il semble plutôt qu'il élève un grand nombre de constructions provisoires et indépendantes, entre lesquelles les communications sont difficiles et quelquefois impossibles.	Once the reader has agreed to limit his hopes, he will still run into other difficulties. The English scientist does not try to build a single, definitive, well-ordered edifice. He seems rather to raise a great number of provisional and independent structures, between which communication is difficult and sometimes impossible.
4.12.21 Prenons comme exemple le chapitre où l'on explique les attractions électrostatiques par des pressions et des tensions qui régneraient dans le milieu diélectrique. Ce chapitre pourrait être supprimé sans que le reste du volume en devînt moins clair et moins complet, et d'un autre côté il contient une théorie qui se suffit à elle-même et on pourrait le comprendre sans avoir lu une seule des lignes qui précèdent ou qui suivent. Mais il n'est pas seulement indépendant du reste de l'ouvrage ; il est difficile de le concilier avec les idées fondamentales du livre.	Take as an example the chapter in which electrostatic attractions are explained by pressures and tensions supposed to prevail in the dielectric medium. This chapter could be removed without the rest of the volume becoming any less clear or less complete. On the other hand, it contains a theory that is self-sufficient, and one could understand it without having read a single line of what precedes or follows. But it is not merely independent of the rest of the work; it is hard to reconcile with the book's fundamental ideas.

	FRENCH	ENGLISH
	Maxwell ne tente même pas cette conciliation, il se borne à dire : « I have not been able to make the next step, namely, to account by mechanical considerations for these stresses in the dielectric. »	Maxwell does not even attempt this reconciliation; he merely says: "I have not been able to make the next step, namely, to account by mechanical considerations for these stresses in the dielectric."[33]
4.12.22	Cet exemple suffira pour faire comprendre ma pensée ; je pourrais en citer beaucoup d'autres. Ainsi, qui se douterait en lisant les pages consacrées à la polarisation rotatoire magnétique qu'il y a identité entre les phénomènes optiques et magnétiques ?	This example will be enough to make my meaning clear; I could cite many others. Thus, reading the pages devoted to magnetic rotatory polarization, who would suspect that optical and magnetic phenomena are identical?
4.12.23	On ne doit donc pas se flatter d'éviter toute contradiction ; mais il faut en prendre son parti. Deux théories contradictoires peuvent en effet pourvu qu'on ne les mêle pas, et qu'on n'y cherche pas le fond des choses, être toutes deux d'utiles instruments de recherches, et peut-être la lecture de Maxwell serait-elle moins suggestive s'il ne nous avait pas ouvert tant de voies nouvelles divergentes.	We must not, then, flatter ourselves that we can avoid all contradiction; we must simply accept it. Two contradictory theories can in fact both be useful instruments of research, provided we do not mix them and do not look in them for the underlying nature of things. And perhaps Maxwell would be less suggestive to read if he had not opened up so many new and divergent paths for us.
4.12.24	Mais l'idée fondamentale se trouve de la sorte un peu masquée. Elle l'est si bien, que dans la plupart des ouvrages de vulgarisation, elle est le seul point qui soit complètement laissé de côté.	But in this way the fundamental idea is somewhat obscured. So much so that in most popular accounts it is the one point that is left out entirely.
4.12.25	Je crois donc devoir, pour en mieux faire ressortir l'importance, expliquer en quoi consiste cette idée fondamentale. Mais pour cela une courte digression est nécessaire.	To bring out its importance more clearly, I therefore think I ought to explain what this fundamental idea consists of. But for that a short digression is necessary.

MECHANICAL EXPLANATION

If a phenomenon satisfies the principle of least action, it admits infinitely many mechanical explanations.

	FRENCH	ENGLISH
4.12.26	De l'explication mécanique des phénomènes physiques. — Dans tout phénomène physique, il y a un certain nombre de paramètres que l'expérience atteint directement et qu'elle permet de mesurer. Je les appellerai les paramètres q.	On the mechanical explanation of physical phenomena.—In every physical phenomenon there are a certain number of parameters that experiment reaches directly and allows us to measure. I shall call them the parameters q.
4.12.27	L'observation nous fait connaître ensuite les lois des variations de ces paramètres et ces lois peuvent généralement se mettre sous la forme d'équations différentielles qui lient entre eux les paramètres q et le temps.	Observation then shows us the laws by which these parameters vary. These laws can generally be put in the form of differential equations linking the parameters q with one another and with time.
4.12.28	Que faut-il faire pour donner une interprétation mécanique d'un pareil phénomène ?	What must we do to give a mechanical interpretation of such a phenomenon?

33 From Maxwell's *Treatise on Electricity and Magnetism* (1873), which Poincaré quotes in English.

	FRENCH	ENGLISH
4.12.29	On cherchera à l'expliquer soit par les mouvements de la matière ordinaire, soit par ceux d'un ou de plusieurs fluides hypothétiques.	We shall try to explain it either by the motions of ordinary matter or by those of one or more hypothetical fluids.
4.12.30	Ces fluides seront considérés comme formés d'un très grand nombre de molécules isolées *m*.	These fluids will be regarded as made up of a very large number of separate molecules *m*.
4.12.31	Quand dirons-nous alors que nous avons une explication mécanique complète du phénomène ? Ce sera d'une part quand nous connaîtrons les équations différentielles auxquelles satisfont les coordonnées de ces molécules hypothétiques *m*, équations qui d'ailleurs devront être conformes aux principes de la dynamique ; et d'autre part quand nous connaîtrons les relations qui définissent les coordonnées des molécules *m* en fonctions des paramètres *q*, accessibles à l'expérience.	When, then, shall we say that we have a complete mechanical explanation of the phenomenon? It will be, on the one hand, when we know the differential equations satisfied by the coordinates of these hypothetical molecules *m*—equations which must, moreover, conform to the principles of dynamics. It will be, on the other hand, when we know the relations that define the coordinates of the molecules *m* as functions of the parameters *q*, which are accessible to experiment.
4.12.32	Ces équations, je l'ai dit, doivent être conformes aux principes de la dynamique et en particulier au principe de la conservation de l'énergie et au principe de moindre action.	These equations, as I have said, must conform to the principles of dynamics, and in particular to the principle of the conservation of energy and the principle of least action.
4.12.33	Le premier de ces deux principes nous apprend que l'énergie totale est constante et que cette énergie se divise en deux parties :	The first of these two principles tells us that the total energy is constant and that this energy is divided into two parts:
4.12.34	1° L'énergie cinétique ou force vive, qui dépend des masses des molécules hypothétiques *m* et de leurs vitesses, et que j'appellerai T ;	1. The kinetic energy, or vis viva, which depends on the masses of the hypothetical molecules *m* and on their velocities, and which I shall call T;
4.12.35	2° Et l'énergie potentielle qui dépend seulement des coordonnées de ces molécules et que j'appellerai U. C'est la *somme* des deux énergies T et U qui est constante.	2. And the potential energy, which depends only on the coordinates of these molecules and which I shall call U. It is the *sum* of the two energies T and U that is constant.
4.12.36	Que nous enseigne maintenant le principe de moindre action ? Il nous enseigne que pour passer de la situation initiale qu'il occupe à l'instant t_0 à la situation finale qu'il occupe à l'instant t_1, le système doit prendre un chemin tel que, dans l'intervalle de temps qui s'écoule entre les deux instants t_0 et t_1 la valeur moyenne de « l'action » (c'est-à-dire de la *différence* entre les deux énergies T et U) soit aussi petite que possible. Le premier des deux principes est d'ailleurs une conséquence du second.	Now what does the principle of least action teach us? It teaches us that the system must pass from the initial situation it occupies at the instant t_0 to the final situation it occupies at the instant t_1 by a particular path. Over the interval of time between the two instants t_0 and t_1, this path must make the mean value of the "action" (that is, of the *difference* between the two energies T and U) as small as possible. The first of the two principles is, moreover, a consequence of the second.
4.12.37	Si l'on connaît les deux fonctions T et U, ce principe suffit pour déterminer les équations du mouvement.	If we know the two functions T and U, this principle is enough to determine the equations of motion.
4.12.38		

	FRENCH	ENGLISH
	Parmi tous les chemins qui permettent de passer d'une situation à une autre, il y en a évidemment un pour lequel la valeur moyenne de l'action est plus petite que pour tous les autres. Il n'y en a d'ailleurs qu'un, et il en résulte que le principe de moindre action suffit pour déterminer le chemin suivi et par conséquent les équations du mouvement.	Among all the paths by which one can pass from one situation to another, there is obviously one for which the mean value of the action is smaller than for all the others. There is, moreover, only one. It follows that the principle of least action is enough to determine the path followed, and consequently the equations of motion.
4.12.39	On obtient ainsi ce qu'on appelle les équations de Lagrange.	In this way we obtain what are called Lagrange's equations.
4.12.40	Dans ces équations, les variables indépendantes sont les coordonnées des molécules hypothétiques *m* ; mais je suppose maintenant que l'on prenne pour variables les paramètres *q* directement accessibles à l'expérience.	In these equations the independent variables are the coordinates of the hypothetical molecules *m*. But now suppose we take as variables the parameters *q* that are directly accessible to experiment.
4.12.41	Les deux parties de l'énergie devront alors s'exprimer en fonction des paramètres *q* et de leurs dérivées ; ce sera évidemment sous cette forme qu'elles apparaîtront à l'expérimentateur. Celui-ci cherchera naturellement à définir l'énergie potentielle et l'énergie cinétique à l'aide des quantités qu'il peut directement observer[2].	The two parts of the energy will then have to be expressed as functions of the parameters *q* and their derivatives; this will obviously be the form in which they appear to the experimenter. He will naturally try to define the potential energy and the kinetic energy by means of quantities he can observe directly[2].
34		
4.12.42	Cela posé, le système ira toujours d'une situation à une autre par un chemin tel que l'action moyenne soit minima.	This being granted, the system will always go from one situation to another by a path such that the mean action is a minimum.
4.12.43	Peu importe que T et U soient maintenant exprimés à l'aide des paramètres *q* et de leurs dérivées ; peu importe que ce soit également par le moyen de ces paramètres que nous définissions les situations initiale et finale ; le principe de moindre action reste toujours vrai.	It does not matter that T and U are now expressed by means of the parameters *q* and their derivatives. It does not matter that we also define the initial and final situations by means of these parameters. The principle of least action still holds.
4.12.44	Or, ici encore, de tous les chemins qui mènent d'une situation à une autre, il y en a un pour lequel l'action moyenne est minima et il n'y en a qu'un. Le principe de moindre action suffit donc pour déterminer les équations différentielles qui définissent les variations des paramètres *q*.	Now here again, of all the paths leading from one situation to another, there is one for which the mean action is a minimum, and only one. The principle of least action is therefore enough to determine the differential equations that define the variations of the parameters *q*.
4.12.45	Les équations ainsi obtenues sont une autre forme des équations de Lagrange.	The equations so obtained are another form of Lagrange's equations.
4.12.46	Pour former ces équations, nous n'avons pas besoin de connaître les relations qui lient les paramètres *q* aux	To form these equations, we do not need to know the relations linking the parameters *q* to the co-

34

[2] Ajoutons que U dépendra seulement des *q*, que T dépendra des *q* et de leurs dérivées par rapport au temps et sera un polynôme homogène du second degré par rapport à ces dérivées.

[2] We may add that U will depend only on the *q*, and that T will depend on the *q* and their derivatives with respect to time and will be a homogeneous polynomial of the second degree in these derivatives.

FRENCH	ENGLISH
coordonnées des molécules hypothétiques, ni les masses de ces molécules, ni l'expression de U en fonction des coordonnées de ces molécules. Tout ce que nous avons besoin de connaître, c'est l'expression de U en fonction des *q* et celle de T en fonction des *q* et de leurs dérivées, c'est-à-dire les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en fonctions des données expérimentales.	ordinates of the hypothetical molecules. Nor do we need the masses of these molecules, or the expression of U as a function of their coordinates. All we need to know is the expression of U as a function of the *q*, and that of T as a function of the *q* and their derivatives. In other words, we need the expressions of the kinetic energy and the potential energy as functions of the experimental data.
4.12.47 Alors de deux choses l'une, ou bien pour un choix convenable des fonctions T et U, les équations de Lagrange, construites comme nous venons de le dire, seront identiques aux équations différentielles déduites des expériences ; ou bien il n'existera pas de fonctions T et U, pour lesquelles cet accord ait lieu. Dans ce dernier cas, il est clair qu'aucune explication mécanique n'est possible.	Then one of two things holds. Either, for a suitable choice of the functions T and U, Lagrange's equations, constructed as we have just described, will be identical with the differential equations deduced from experiment. Or else there will exist no functions T and U for which this agreement occurs. In the latter case it is clear that no mechanical explanation is possible.
4.12.48 La condition *nécessaire* pour qu'une explication mécanique soit possible, c'est donc que l'on puisse choisir les fonctions T et U, de façon à satisfaire au principe de la moindre action, entraînant celui de la conservation de l'énergie.	The *necessary* condition for a mechanical explanation to be possible is therefore that we can choose the functions T and U so as to satisfy the principle of least action, which entails that of the conservation of energy.
4.12.49 Cette condition est d'ailleurs *suffisante* ; supposons en effet qu'on ait trouvé une fonction U des paramètres *q*, qui représente une des parties de l'énergie, qu'une autre partie de l'énergie que nous représenterons par T soit une fonction des *q* et de leurs dérivées, et qu'elle soit un polynôme homogène du second degré par rapport à ces dérivées ; et enfin que les équations de Lagrange formées à l'aide de ces deux fonctions T et U soient conformes aux données de l'expérience.	This condition is, moreover, *sufficient*. Suppose, in fact, that we have found a function U of the parameters *q* which represents one of the parts of the energy. Suppose that another part of the energy, which we shall represent by T, is a function of the *q* and their derivatives, and is a homogeneous polynomial of the second degree in these derivatives. And suppose, finally, that Lagrange's equations formed with these two functions T and U agree with the data of experiment.
4.12.50 Que faut-il pour déduire de là une explication mécanique ? Il faut que U puisse être regardé comme l'énergie potentielle d'un système et T comme la force vive de ce même système.	What is needed to deduce a mechanical explanation from this? U must be capable of being regarded as the potential energy of a system, and T as the vis viva of that same system.
4.12.51 Pas de difficulté en ce qui concerne U ; mais T pourra-t-il être regardé comme la force vive d'un système matériel ?	There is no difficulty as far as U is concerned; but can T be regarded as the vis viva of a material system?
4.12.52 Il est aisé de montrer que cela est toujours possible, et même d'une infinité de manières. Je me bornerai à renvoyer pour plus de détails à la préface de mon ouvrage : *Électricité et optique*.	It is easy to show that this is always possible, and even in infinitely many ways. For further details I shall merely refer to the preface of my book *Électricité et optique*.
4.12.53 Ainsi si on ne peut pas satisfaire au principe de moindre action, il n'y a pas d'explication mécanique possible ; si	Thus, if the principle of least action cannot be satisfied, no mechanical explanation is possible. If it

	FRENCH	ENGLISH
	on y peut satisfaire, il y en a non seulement une, mais une infinité, d'où il résulte que dès qu'il y en a une, il y en a une infinité d'autres.	can be satisfied, there is not just one explanation but infinitely many. It follows that as soon as there is one, there are infinitely many others.
4.12.54	Une observation encore.	One more remark.
4.12.55	Parmi les quantités que l'expérience nous fait directement atteindre, nous regarderons les unes comme des fonctions des coordonnées de nos molécules hypothétiques ; ce sont celles-là qui seront nos paramètres q ; nous envisagerons les autres comme dépendant non seulement des coordonnées, mais des vitesses, ou, ce qui revient au même, des dérivées des paramètres q, ou comme des combinaisons de ces paramètres et de leurs dérivées.	Among the quantities that experiment lets us reach directly, we shall regard some as functions of the coordinates of our hypothetical molecules; these will be our parameters q. We shall consider the others as depending not only on the coordinates but also on the velocities—or, what comes to the same thing, on the derivatives of the parameters q. Alternatively, we shall treat them as combinations of these parameters and their derivatives.
4.12.56	Et alors une question se pose : parmi toutes ces quantités mesurées expérimentalement, quelles sont celles que nous choisirons pour représenter les paramètres q ? Quelles sont celles que nous préférerons regarder comme les dérivées de ces paramètres ? Ce choix reste arbitraire dans une très large mesure, mais il suffit qu'on puisse le faire de façon à rester d'accord avec le principe de moindre action pour qu'une explication mécanique soit possible.	And then a question arises: among all these experimentally measured quantities, which shall we choose to represent the parameters q? Which shall we prefer to regard as the derivatives of these parameters? This choice remains arbitrary to a very large extent. But for a mechanical explanation to be possible, it is enough that the choice can be made so as to stay in agreement with the principle of least action.
4.12.57	Et alors Maxwell s'est demandé s'il pouvait faire ce choix et celui des deux énergies T et U, de façon que les phénomènes électriques satisfassent à ce principe. L'expérience nous montre que l'énergie d'un champ électromagnétique se décompose en deux parties, l'énergie électrostatique et l'énergie électrodynamique. Maxwell a reconnu que si l'on regarde la première comme représentant l'énergie potentielle U, la seconde comme représentant l'énergie cinétique T ; si, d'autre part, les charges électrostatiques des conducteurs sont considérées comme des paramètres q et les intensités de courants comme les dérivées d'autres paramètres q ; dans ces conditions, dis-je, Maxwell a reconnu que les phénomènes électriques satisfont au principe de moindre action. Il était certain, dès lors, de la possibilité d'une explication mécanique.	And so Maxwell asked himself whether he could make this choice, and that of the two energies T and U, so that electrical phenomena would satisfy this principle. Experiment shows us that the energy of an electromagnetic field breaks down into two parts, electrostatic energy and electrodynamic energy. Suppose we regard the first as representing the potential energy U and the second as representing the kinetic energy T. Suppose, moreover, that we consider the electrostatic charges of the conductors as parameters q and the intensities of the currents as derivatives of other parameters q. Under these conditions, I say, Maxwell recognized that electrical phenomena satisfy the principle of least action. From then on he was sure that a mechanical explanation was possible.
4.12.58	S'il avait exposé cette idée au début de son livre au lieu de la reléguer dans un coin du second volume, elle n'aurait pas échappé à la plupart des lecteurs.	Had he set out this idea at the beginning of his book instead of relegating it to a corner of the second volume, it would not have escaped most readers.
4.12.59	Si donc un phénomène comporte une explication mécanique complète, il en comportera une infinité d'autres qui rendront également bien compte de toutes les particularités révélées par l'expérience.	If, then, a phenomenon admits of one complete mechanical explanation, it will admit of infinitely many others. All of them will account equally well for every particular revealed by experiment.

	FRENCH	ENGLISH
4.12.60	Et cela est confirmé par l'histoire de toutes les parties de la physique ; en optique, par exemple, Fresnel croit la vibration perpendiculaire au plan de polarisation ; Neumann la regarde comme parallèle à ce plan. On a cherché longtemps un « experimentum crucis » qui permît de décider entre ces deux théories et on n'a pu le trouver.	And this is confirmed by the history of every branch of physics. In optics, for example, Fresnel believes the vibration to be perpendicular to the plane of polarization; Neumann regards it as parallel to that plane. For a long time people looked for an "experimentum crucis" that would decide between these two theories, and none could be found.[35]
4.12.61	De même sans sortir du domaine de l'électricité, nous pouvons constater que la théorie des deux fluides et celle du fluide unique rendent toutes deux compte d'une façon également satisfaisante de toutes les lois observées en électrostatique.	Likewise, without leaving the domain of electricity, we can see that the two-fluid theory and the one-fluid theory account equally satisfactorily for all the laws observed in electrostatics.
4.12.62	Tous ces faits s'expliquent aisément, grâce aux propriétés des équations de Lagrange que je viens de rappeler.	All these facts are easily explained by the properties of Lagrange's equations that I have just recalled.
4.12.63	Il est facile de comprendre maintenant quelle est l'idée fondamentale de Maxwell.	It is now easy to understand what Maxwell's fundamental idea is.
4.12.64	Pour démontrer la possibilité d'une explication mécanique de l'électricité, nous n'avons pas à nous préoccuper de trouver cette explication elle-même, il nous suffit de connaître l'expression des deux fonctions T et U, qui sont les deux parties de l'énergie, de former avec ces deux fonctions les équations de Lagrange et de comparer ensuite ces équations avec les lois expérimentales.	To prove that a mechanical explanation of electricity is possible, we need not trouble ourselves to find that explanation itself. It is enough for us to know the expressions of the two functions T and U, which are the two parts of the energy. We then form Lagrange's equations from these two functions and compare these equations with the experimental laws.
4.12.65	Entre toutes ces explications possibles, comment faire un choix pour lequel le secours de l'expérience nous fait défaut ? Un jour viendra peut-être où les physiciens se désintéresseront de ces questions, inaccessibles aux méthodes positives, et les abandonneront aux métaphysiciens. Ce jour n'est pas venu ; l'homme ne se résigne pas si aisément à ignorer éternellement le fond des choses.	Among all these possible explanations, how are we to choose, when experiment can give us no help? A day will perhaps come when physicists lose interest in these questions, which are beyond the reach of positive methods, and leave them to the metaphysicians. That day has not come; man does not so easily resign himself to remaining forever ignorant of the underlying nature of things.
4.12.66	Notre choix ne peut donc être guidé que par des considérations où la part de l'appréciation personnelle est très grande ; il y a cependant des solutions que tout le monde rejettera à cause de leur bizarrerie et d'autres que tout le monde préférera à cause de leur simplicité.	Our choice, then, can be guided only by considerations in which personal judgment plays a very large part. There are, however, solutions that everyone will reject because of their oddity, and others that everyone will prefer because of their simplicity.
4.12.67	En ce qui concerne l'électricité et le magnétisme, Maxwell s'abstient de faire aucun choix. Ce n'est pas qu'il	As regards electricity and magnetism, Maxwell refrains from making any choice. It is not that he

35 Franz Ernst Neumann (1798–1895), German physicist.

	FRENCH	ENGLISH
	dédaigne systématiquement tout ce que ne peuvent atteindre les méthodes positives ; le temps qu'il a consacré à la théorie cinétique des gaz en fait suffisamment foi. J'ajouterai que si, dans son grand ouvrage, il ne développe aucune explication complète, il avait antérieurement tenté d'en donner une dans un article du *Philosophical Magazine*. L'étrangeté et la complication des hypothèses qu'il avait été obligé de faire, l'avaient amené ensuite à y renoncer.	systematically scorns everything beyond the reach of positive methods; the time he devoted to the kinetic theory of gases is proof enough of that. I will add that, although his great work develops no complete explanation, he had earlier attempted to give one in an article in the *Philosophical Magazine*. The strangeness and complexity of the hypotheses he had been obliged to make later led him to abandon it.[36]
4.12.68	Le même esprit se retrouve dans tout l'ouvrage. Ce qu'il y a d'essentiel, c'est-à-dire ce qui doit rester commun à toutes les théories, est mis en lumière ; tout ce qui ne conviendrait qu'à une théorie particulière est presque toujours passé sous silence. Le lecteur se trouve ainsi en présence d'une forme presque vide de matière qu'il est d'abord tenté de prendre pour une ombre fugitive et insaisissable. Mais les efforts auxquels il est ainsi condamné le forcent à penser et il finit par comprendre ce qu'il y avait souvent d'un peu artificiel dans les ensembles théoriques qu'il admirait autrefois.	The same spirit is found throughout the work. What is essential—that is, what must remain common to all theories—is brought to light. Whatever would suit only one particular theory is almost always passed over in silence. The reader thus finds himself facing a form almost empty of matter, which he is at first tempted to take for a fleeting, elusive shadow. But the efforts to which he is thus condemned force him to think. In the end he understands what was often a little artificial in the theoretical constructions he used to admire.

CHAPTER XIII: ELECTRODYNAMICS

The theories of Ampère and Helmholtz falter over open currents, which Maxwell abolishes.

	FRENCH	ENGLISH
4.13.1	L'histoire de l'électrodynamique est particulièrement instructive à notre point de vue.	The history of electrodynamics is especially instructive from our point of view.
4.13.2	Ampère a intitulé son immortel ouvrage « Théorie des phénomènes électrodynamiques, *uniquement* fondée sur l'expérience ». Il s'imaginait donc qu'il n'avait fait *aucune* hypothèse ; il en avait fait pourtant, nous ne tarderons pas à le voir ; seulement il les avait faites sans s'en apercevoir.	Ampère entitled his immortal work "Théorie des phénomènes électrodynamiques, *uniquement* fondée sur l'expérience" (Theory of electrodynamic phenomena, founded *solely* on experiment). He imagined, then, that he had made *no* hypothesis. Yet he had made some, as we shall soon see; only he had made them without noticing.[37]
4.13.3	Ceux qui vinrent après lui, les aperçurent au contraire, parce que leur attention fut attirée par les points faibles de la solution d'Ampère. Ils firent des hypothèses nouvelles, dont ils eurent cette fois pleine conscience ; mais combien de fois il fallut en changer avant d'arriver au système classique d'aujourd'hui qui n'est peut-être pas encore définitif ; c'est ce que nous allons voir.	Those who came after him, on the contrary, did notice them, because their attention was drawn to the weak points of Ampère's solution. They made new hypotheses, and this time they were fully aware of them. But how many times these had to be changed before reaching today's classical system, which is perhaps not yet final—that is what we are about to see.
4.13.4	I. — Théorie d'Ampère. — Quand Ampère a étudié expérimentalement les actions mutuelles des courants, il	I. Ampère's theory.—When Ampère studied the mutual actions of currents experimentally, he

36 Maxwell's paper "On Physical Lines of Force" (1861–62), which proposed a mechanical model of the field built from vortices and "idle wheels."

	FRENCH	ENGLISH
	n'a opéré et il ne pouvait opérer que sur des courants fermés.	worked, and could only work, with closed currents.
4.13.5	Ce n'est pas qu'il niât la possibilité des courants ouverts. Si deux conducteurs sont chargés d'électricité de nom contraire et si on les met en communication par un fil, il s'établit un courant allant de l'un à l'autre et qui dure jusqu'à ce que les deux potentiels soient devenus égaux. Dans les idées qui régnaient du temps d'Ampère, c'était là un courant ouvert ; on voyait bien le courant aller du premier conducteur au second, on ne le voyait pas revenir du second au premier.	Not that he denied the possibility of open currents. If two conductors are charged with electricity of opposite kinds and are connected by a wire, a current is set up running from one to the other. It lasts until the two potentials have become equal. According to the ideas prevailing in Ampère's time, this was an open current: one could clearly see the current going from the first conductor to the second, but one did not see it come back from the second to the first.
4.13.6	Ainsi, Ampère considérait comme ouverts les courants de cette nature, par exemple les courants de décharge des condensateurs, mais il ne pouvait en faire l'objet de ses expériences, parce que la durée en est trop courte.	Thus Ampère regarded currents of this kind as open—for example, the discharge currents of capacitors. But he could not make them the subject of his experiments, because they last too short a time.
4.13.7	On peut imaginer aussi une autre sorte de courant ouvert. Je suppose deux conducteurs, A et B, reliés par un fil AMB. De petites masses conductrices en mouvement se mettent d'abord en contact avec le conducteur B, lui empruntent une charge électrique, quittent le contact de B, se mettent en mouvement en suivant le chemin BNA, et, en transportant avec elles leur charge, viennent au contact de A et leur abandonnent leur charge, qui revient ensuite en B en suivant le fil AMB.	One can also imagine another kind of open current. Suppose two conductors, A and B, connected by a wire AMB. Small moving conducting bodies first come into contact with conductor B and take a charge of electricity from it. They leave contact with B and set off along the path BNA. Carrying their charge with them, they come into contact with A and give up their charge to it. The charge then returns to B along the wire AMB.
4.13.8	On a bien là en un sens un circuit fermé, puisque l'électricité décrit le circuit fermé BNAMB ; mais les deux parties de ce courant sont très différentes : dans le fil AMB, l'électricité se déplace *à travers* un conducteur fixe, à la façon d'un courant voltaïque, en surmontant une résistance ohmique et en développant de la chaleur ; on dit qu'elle se déplace *par conduction* ; dans la partie BNA, l'électricité est *transportée* par un conducteur mobile ; on dit qu'elle se déplace *par convection.*	In one sense we do indeed have a closed circuit here, since the electricity travels round the closed circuit BNAMB. But the two parts of this current are very different. In the wire AMB the electricity moves *through* a fixed conductor, as in a voltaic current, overcoming an ohmic resistance and generating heat; we say it moves *by conduction*. In the part BNA the electricity is *carried* by a moving conductor; we say it moves *by convection*.
4.13.9	Si, alors, le courant de convection est considéré comme tout à fait analogue au courant de conduction, le circuit BNAMB est fermé ; si, au contraire, le courant de convection n'est pas « un vrai courant », et, par exemple, n'agit pas sur les aimants, il ne reste plus que le courant de conduction AMB, qui est *ouvert*.	If, then, the convection current is regarded as entirely analogous to the conduction current, the circuit BNAMB is closed. If, on the contrary, the convection current is not "a true current" and, for example, does not act on magnets, there remains only the conduction current AMB, which is *open*.
4.13.10	Par exemple, si l'on réunit par un fil les deux pôles d'une machine de Holtz, le plateau tournant chargé transporte	For example, if the two poles of a Holtz machine are joined by a wire, the charged rotating disk carries electricity by convection from one pole to the

37 Ampère's memoir appeared in 1827.

	FRENCH	ENGLISH
	d'un pôle à l'autre par convection de l'électricité, qui revient au premier pôle par conduction à travers le fil.	other. The electricity then returns to the first pole by conduction through the wire.[38]
4.13.11	Mais des courants de cette espèce sont très difficiles à réaliser avec une intensité appréciable. Avec les moyens dont disposait Ampère, on peut dire que c'était impossible.	But currents of this kind are very hard to produce with an appreciable intensity. With the means at Ampère's disposal, one may say it was impossible.
4.13.12	En résumé, Ampère pouvait concevoir l'existence de deux espèces de courants ouverts, mais il ne pouvait opérer ni sur les uns ni sur les autres, parce qu'ils étaient trop intenses ou parce qu'ils duraient trop peu de temps.	In short, Ampère could conceive of the existence of two kinds of open current, but he could work with neither, because they were too intense or because they lasted too short a time.[39]
4.13.13	L'expérience ne pouvait donc lui montrer que l'action d'un courant fermé sur un courant fermé, ou, à la rigueur, l'action d'un courant fermé sur une portion de courant, parce qu'on peut faire parcourir à un courant un circuit *fermé* composé d'une partie mobile et d'une partie fixe. On peut alors étudier les déplacements de la partie mobile sous l'action d'un autre courant fermé.	Experiment could therefore show him only the action of a closed current on a closed current, or at most the action of a closed current on a portion of a current. This is because a current can be made to run through a *closed* circuit composed of a moving part and a fixed part. One can then study the displacements of the moving part under the action of another closed current.
4.13.14	En revanche, Ampère n'avait aucun moyen d'étudier l'action d'un courant ouvert, soit sur un courant fermé, soit sur un autre courant ouvert.	On the other hand, Ampère had no means of studying the action of an open current either on a closed current or on another open current.
4.13.15	1. *Cas des courants fermés.* — Dans le cas de l'action mutuelle de deux courants fermés, l'expérience révéla à Ampère des lois remarquablement simples.	1. *The case of closed currents.*—In the case of the mutual action of two closed currents, experiment revealed to Ampère some remarkably simple laws.
4.13.16	Je rappelle rapidement ici celles qui nous seront utiles dans la suite.	I shall briefly recall here those that will be useful to us later.
4.13.17	1° *Si l'intensité des courants est maintenue constante*, et si les deux circuits, après avoir subi des déplacements et des déformations quelconques, reviennent finalement à leurs positions initiales, le travail total des actions électrodynamiques sera nul.	1. *Suppose the intensity of the currents is kept constant,* and the two circuits, after undergoing any displacements and deformations whatever, finally return to their initial positions. Then the total work of the electrodynamic actions will be zero.
4.13.18	En d'autres termes, il y a un *potentiel électrodynamique* des deux circuits proportionnel au produit des intensités et dépendant de la forme et de la position relative des circuits ; le travail des actions électrodynamiques est égal à la variation de ce potentiel ;	In other words, there is an *electrodynamic potential* of the two circuits, proportional to the product of the intensities and depending on the shape and relative position of the circuits. The work of the electrodynamic actions is equal to the change in this potential;
4.13.19	2° L'action d'un solénoïde fermé est nulle ;	2. The action of a closed solenoid is zero;
4.13.20	3° L'action d'un circuit C sur un autre circuit voltaïque C′ ne dépend que du « champ magnétique » développé par	3. The action of a circuit C on another voltaic circuit C′ depends only on the "magnetic field" pro-

38 An electrostatic influence machine devised by the German physicist Wilhelm Holtz in 1865.
39 The French reads "trop intenses" (too intense), evidently a slip for "trop peu intenses" (too weak), as the previous paragraph shows.

FRENCH

ce circuit C. En chaque point de l'espace, on peut, en effet, définir en grandeur et direction une certaine force appelée *force magnétique* et qui jouit des propriétés suivantes :

4.13.21 *a*) La force exercée par C sur un pôle magnétique est appliquée à ce pôle ; elle est égale à la force magnétique multipliée par la masse magnétique du pôle ;

4.13.22 *b*) Une aiguille aimantée très courte tend à prendre la direction de la force magnétique, et le couple qui tend à l'y ramener est proportionnel au produit de la force magnétique, du moment magnétique de l'aiguille et du sinus de l'angle d'écart ;

4.13.23 *c*) Si le circuit C′ se déplace, le travail de l'action électrodynamique exercée par C sur C′ sera égal à l'accroissement du « flux de force magnétique » qui traverse ce circuit.

4.13.24 2. *Action d'un courant fermé sur une portion de courant*. — Ampère n'ayant pu réaliser de courant ouvert proprement dit, n'avait qu'un moyen d'étudier l'action d'un courant fermé sur une portion de courant.

4.13.25 C'était d'opérer sur un circuit C′ composé de deux parties, l'une fixe, l'autre mobile. La partie mobile était par exemple un fil mobile α β dont les extrémités α et β pouvaient glisser le long d'un fil fixe. Dans une des positions du fil mobile, l'extrémité α reposait sur le point A du fil fixe et l'extrémité β sur le point B du fil fixe. Le courant circulait de α en β, c'est-à-dire de A en B le long du fil mobile, et il revenait ensuite de B en A en suivant le fil fixe. *Ce courant était donc fermé*.

4.13.26 Dans une seconde position, le fil mobile ayant glissé, l'extrémité α reposait sur un autre point A′ du fil fixe et l'extrémité β sur un autre point B′ du fil fixe. Le courant circulait alors de α en β, c'est-à-dire de A′ en B′ le long du fil mobile, et il revenait ensuite de B′ en B, puis de B en A, puis enfin de A en A′, toujours en suivant le fil fixe. Le courant était donc encore fermé.

4.13.27 Si un semblable circuit est soumis à l'action d'un courant fermé C, la partie mobile se déplacera comme si elle subissait l'action d'une force. Ampère *admet* que la force apparente à laquelle cette partie mobile AB semble ainsi soumise, représentant l'action de C sur la portion αβ du

ENGLISH

duced by this circuit C. At each point of space one can, in fact, define in magnitude and direction a certain force called the *magnetic force*, which has the following properties:

a) The force exerted by C on a magnetic pole is applied to that pole; it is equal to the magnetic force multiplied by the magnetic mass of the pole;

b) A very short magnetized needle tends to align itself with the direction of the magnetic force. The couple tending to bring it back to that direction is proportional to the product of the magnetic force, the magnetic moment of the needle, and the sine of the angle of deviation;

c) If the circuit C′ is displaced, the work of the electrodynamic action exerted by C on C′ will be equal to the increase in the "flux of magnetic force" passing through this circuit.

2. *Action of a closed current on a portion of a current*. —Since Ampère had been unable to produce an open current in the strict sense, he had only one way of studying the action of a closed current on a portion of a current.

This was to work with a circuit C′ made up of two parts, one fixed, the other movable. The movable part was, for example, a movable wire α β whose ends α and β could slide along a fixed wire. In one of the positions of the movable wire, the end α rested on the point A of the fixed wire and the end β on the point B of the fixed wire. The current flowed from α to β, that is, from A to B along the movable wire. It then returned from B to A along the fixed wire. *This current was therefore closed*.

In a second position, once the movable wire had slid, the end α rested on another point A′ of the fixed wire and the end β on another point B′ of the fixed wire. The current then flowed from α to β, that is, from A′ to B′ along the movable wire. It then returned from B′ to B, then from B to A, and finally from A to A′, still following the fixed wire. So the current was still closed.

If such a circuit is subjected to the action of a closed current C, the movable part will be displaced as though a force were acting on it. This apparent force, to which the movable part AB thus seems subject, represents the action of C on the

	FRENCH	ENGLISH
	courant, est la même que si αβ était parcouru par un courant ouvert qui s'arrêterait en α et en β, au lieu de l'être par un courant fermé qui, après être arrivé en β, revient en α à travers la partie fixe du circuit.	portion αβ of the current. Ampère *assumes* that it is the same as if αβ carried an open current stopping at α and at β. In reality, it carries a closed current which, after reaching β, returns to α through the fixed part of the circuit.
4.13.28	Cette hypothèse peut sembler assez naturelle et Ampère la fait sans s'en apercevoir ; néanmoins, *elle ne s'impose pas*, puisque nous verrons plus tard que Helmholtz l'a rejetée. Quoi qu'il en soit, elle permit à Ampère, bien qu'il n'ait pu jamais réaliser un courant ouvert, d'énoncer des lois de l'action d'un courant fermé sur un courant ouvert, ou même sur un élément de courant.	This hypothesis may seem fairly natural, and Ampère makes it without noticing. Nevertheless *it is not forced upon us*, since we shall see later that Helmholtz rejected it. However that may be, it allowed Ampère to state laws for the action of a closed current on an open current, or even on a current element, though he was never able to produce an open current.
4.13.29	Les lois restent simples :	The laws remain simple:
4.13.30	1° La force qui agit sur un élément de courant est appliquée à cet élément ; elle est normale à l'élément et à la force magnétique et proportionnelle à la composante de cette force magnétique qui est normale à l'élément ;	1. The force acting on a current element is applied to that element. It is normal to the element and to the magnetic force, and proportional to the component of that magnetic force which is normal to the element;
4.13.31	2° L'action d'un solénoïde fermé sur un élément de courant reste nulle.	2. The action of a closed solenoid on a current element is still zero.
4.13.32	Mais il n'y a plus de potentiel électrodynamique, c'est-à-dire que, quand un courant fermé et un courant ouvert, dont les intensités ont été maintenues constantes, reviennent à leurs positions initiales, le travail total n'est pas nul.	But there is no longer an electrodynamic potential. That is to say, when a closed current and an open current return to their initial positions, their intensities having been kept constant, the total work is not zero.
4.13.33	3. *Rotations continues*. — Parmi les expériences électrodynamiques, les plus curieuses sont celles où l'on a pu réaliser des rotations continues et qu'on appelle quelquefois expériences d'*induction unipolaire*. Un aimant peut tourner autour de son axe ; un courant parcourt d'abord un fil fixe, entre dans l'aimant par le pôle N par exemple, parcourt la moitié de l'aimant, en sort par un contact glissant et rentre dans le fil fixe.	3. *Continuous rotations*.—Among electrodynamic experiments, the most curious are those in which continuous rotations have been produced; they are sometimes called experiments in *unipolar induction*. A magnet can turn about its axis. A current first runs through a fixed wire and enters the magnet at the N pole, say. It runs through half the magnet, leaves it through a sliding contact, and goes back into the fixed wire.
4.13.34	L'aimant entre alors en rotation continue sans pouvoir jamais atteindre une position d'équilibre. C'est l'expérience de Faraday.	The magnet then goes into continuous rotation, without ever being able to reach a position of equilibrium. This is Faraday's experiment.[40]
4.13.35	Comment cela est-il possible ? Si l'on avait affaire à deux circuits de forme invariable, l'un fixe C, l'autre C′ mobile autour d'un axe, ce dernier ne pourrait jamais prendre de rotation continue ; en effet, il existe un potentiel	How is this possible? Suppose we were dealing with two circuits of invariable shape, one, C, fixed, the other, C′, movable about an axis. The latter could never take up a continuous rotation. For

40 Michael Faraday (1791–1867), English physicist and chemist, who first produced continuous electromagnetic rotations in 1821.

FRENCH	ENGLISH
électrodynamique ; il y aura donc forcément une position d'équilibre, ce sera celle où ce potentiel sera maximum.	there is an electrodynamic potential, and so there will necessarily be a position of equilibrium—the one in which this potential is a maximum.
4.13.36 Les rotations continues ne sont donc possibles que si le circuit C′ se compose de deux parties : l'une fixe, l'autre mobile autour d'un axe, comme cela a lieu dans l'expérience de Faraday. Encore convient-il de faire une distinction. Le passage de la partie fixe à la partie mobile ou inversement peut se faire, soit par un contact simple (le même point de la partie mobile restant constamment en contact avec le même point de la partie fixe), soit par un contact glissant (le même point de la partie mobile venant successivement en contact avec divers points de la partie fixe).	Continuous rotations are therefore possible only if the circuit C′ consists of two parts, one fixed, the other movable about an axis, as is the case in Faraday's experiment. Even then a distinction must be made. The passage from the fixed part to the movable part, or the reverse, may take place in one of two ways. It may be by a simple contact (the same point of the movable part remaining constantly in contact with the same point of the fixed part). Or it may be by a sliding contact (the same point of the movable part coming successively into contact with various points of the fixed part).
4.13.37 C'est seulement dans le second cas qu'il peut y avoir rotation continue. Voici ce qui arrive alors : le système tend bien à prendre une position d'équilibre ; mais, quand elle va être atteinte, le contact glissant met la partie mobile en communication avec un nouveau point de la partie fixe ; elle change les connexions, elle change donc les conditions d'équilibre, de sorte que, la position d'équilibre fuyant, pour ainsi dire, devant le système qui cherche à l'atteindre, la rotation peut se poursuivre indéfiniment.	Only in the second case can there be continuous rotation. What then happens is this: the system does tend to take up a position of equilibrium. But just as that position is about to be reached, the sliding contact puts the movable part in communication with a new point of the fixed part. It changes the connections, and so changes the conditions of equilibrium. The position of equilibrium thus flees, as it were, before the system that is trying to reach it, and the rotation can go on indefinitely.
4.13.38 Ampère admet que l'action du circuit sur la partie mobile de C′ est la même que si la partie fixe de C′ n'existait pas et si, par conséquent, le courant qui circule dans la partie mobile était ouvert.	Ampère assumes that the action of the circuit on the movable part of C′ is the same as if the fixed part of C′ did not exist. That would mean the current flowing in the movable part was open.
4.13.39 Il conclut donc que l'action d'un courant fermé sur un courant ouvert, ou inversement celle d'un courant ouvert sur un courant fermé, peut donner lieu à une rotation continue.	He therefore concludes that the action of a closed current on an open current, or conversely that of an open current on a closed current, can give rise to a continuous rotation.
4.13.40 Mais cette conclusion dépend de l'hypothèse que je viens d'énoncer et qui, ainsi que je l'ai dit plus haut, n'est pas admise par Helmholtz.	But this conclusion depends on the hypothesis I have just stated, which, as I said above, Helmholtz does not accept.
4.13.41 4. *Action mutuelle de deux courants ouverts.* — En ce qui concerne l'action mutuelle de deux courants ouverts et, en particulier, celle de deux éléments de courant, toute expérience fait défaut. Ampère a recours à l'hypothèse. Il suppose : 1° que l'action mutuelle de deux éléments se réduit à une force dirigée suivant la droite qui les joint ; 2° que l'action de deux courants fermés est la résultante des actions mutuelles de leurs divers éléments, lesquelles	4. *Mutual action of two open currents.*—As regards the mutual action of two open currents, and in particular that of two current elements, there is no experiment at all. Ampère resorts to hypothesis. He supposes: 1. that the mutual action of two elements reduces to a force directed along the straight line joining them; 2. that the action of two closed currents is the resultant of the mutual actions of their various elements. These actions are,

	FRENCH	ENGLISH
	sont, d'ailleurs, les mêmes que si ces éléments étaient isolés.	moreover, the same as if the elements were isolated.
4.13.42	Ce qui est remarquable, c'est qu'ici encore Ampère fait ces deux hypothèses sans s'en apercevoir.	What is remarkable is that here again Ampère makes these two hypotheses without noticing.
4.13.43	Quoi qu'il en soit, ces deux hypothèses, jointes aux expériences sur les courants fermés, suffisent pour déterminer complètement la loi de l'action mutuelle de deux éléments.	However that may be, these two hypotheses, together with the experiments on closed currents, are enough to determine completely the law of the mutual action of two elements.
4.13.44	Mais alors, la plupart des lois simples que nous avons rencontrées dans le cas des courants fermés ne sont plus vraies.	But then most of the simple laws we met with in the case of closed currents are no longer true.
4.13.45	D'abord, il n'y a pas de potentiel électrodynamique ; il n'y en avait d'ailleurs pas non plus, comme nous l'avons vu, dans le cas d'un courant fermé agissant sur un courant ouvert.	First, there is no electrodynamic potential. Nor, as we have seen, was there one in the case of a closed current acting on an open current.
4.13.46	Ensuite, il n'y a plus, à proprement parler, de force magnétique.	Next, there is no longer, strictly speaking, any magnetic force.
4.13.47	Et, en effet, nous avons donné plus haut de cette force trois définitions différentes :	And indeed, we gave above three different definitions of this force:
4.13.48	1° Par l'action subie par un pôle magnétique ;	1. By the action undergone by a magnetic pole;
4.13.49	2° Par le couple directeur qui oriente l'aiguille aimantée ;	2. By the directing couple that orients the magnetized needle;
4.13.50	3° Par l'action subie par un élément de courant.	3. By the action undergone by a current element.
4.13.51	Or, dans le cas qui nous occupe maintenant, non seulement ces trois définitions ne concordent plus, mais chacune d'elles est dépourvue de sens, et en effet :	Now, in the case before us, not only do these three definitions no longer agree, but each of them is devoid of meaning. For:
4.13.52	1° Un pôle magnétique n'est plus simplement soumis à une force unique appliquée à ce pôle. Nous avons vu, en effet, que la force due à l'action d'un élément de courant sur un pôle n'est pas appliquée au pôle, mais à l'élément ; elle peut, d'ailleurs, être remplacée par une force appliquée au pôle et par un couple ;	1. A magnetic pole is no longer subject simply to a single force applied to that pole. We have seen, in fact, that the force due to the action of a current element on a pole is applied not to the pole but to the element. It can, moreover, be replaced by a force applied to the pole together with a couple;
4.13.53	2° Le couple qui agit sur l'aiguille aimantée n'est plus un simple couple directeur ; car son moment par rapport à l'axe de l'aiguille n'est pas nul. Il se décompose en un couple directeur proprement dit et un couple supplémentaire qui tend à produire la rotation continue dont j'ai parlé plus haut ;	2. The couple acting on the magnetized needle is no longer a simple directing couple, for its moment about the axis of the needle is not zero. It breaks down into a directing couple proper and an additional couple. This additional couple tends to produce the continuous rotation I spoke of above;
4.13.54	3° Enfin, la force subie par un élément de courant n'est pas normale à cet élément.	3. Finally, the force undergone by a current element is not normal to that element.
4.13.55	En d'autres termes, *l'unité de la force magnétique a disparu*.	

FRENCH	ENGLISH
	In other words, *the unity of the magnetic force has disappeared*.
4.13.56 Voici en quoi consiste cette unité. Deux systèmes qui exercent la même action sur un pôle magnétique, exerceront aussi la même action sur une aiguille aimantée infiniment petite, ou sur un élément de courant, placés au même point de l'espace où était ce pôle.	Here is what this unity consists in. Take two systems that exert the same action on a magnetic pole. They will also exert the same action on an infinitely small magnetized needle, or on a current element, placed at the point of space where that pole was.
4.13.57 Eh bien, cela est vrai si ces deux systèmes ne contiennent que des courants fermés ; cela ne serait plus vrai, d'après Ampère, si ces systèmes contenaient des courants ouverts.	Well, this is true if the two systems contain only closed currents; according to Ampère, it would no longer be true if these systems contained open currents.
4.13.58 Il suffit de remarquer, par exemple, que, si un pôle magnétique est placé en A et un élément en B, la direction de l'élément étant sur le prolongement de la droite AB, cet élément, qui n'exercera aucune action sur ce pôle, en exercera une, au contraire, soit sur une aiguille aimantée placée au point A, soit sur un élément de courant placé au point A.	It is enough to note an example. Suppose a magnetic pole is placed at A and an element at B, with the direction of the element lying along the extension of the straight line AB. This element will exert no action on the pole. It will, on the contrary, exert an action either on a magnetized needle placed at point A or on a current element placed at point A.
4.13.59 5. *Induction.* — On sait que la découverte de l'induction électrodynamique ne tarda pas à suivre les immortels travaux d'Ampère.	5. *Induction*.—As is well known, the discovery of electrodynamic induction followed soon after Ampère's immortal work.
4.13.60 Tant qu'il ne s'agit que de courants fermés, il n'y a aucune difficulté, et Helmholtz a même remarqué que le principe de la conservation de l'énergie pouvait suffire pour déduire les lois de l'induction des lois électrodynamiques d'Ampère. À une condition toutefois, M. Bertrand l'a bien montré, c'est qu'on admette en outre un certain nombre d'hypothèses.	So long as only closed currents are concerned, there is no difficulty. Helmholtz even remarked that the principle of the conservation of energy could suffice to deduce the laws of induction from Ampère's electrodynamic laws. There is one condition, however, as Bertrand clearly showed: one must also admit a certain number of hypotheses.
4.13.61 Le même principe permet encore cette déduction dans le cas des courants ouverts, quoique, bien entendu, on ne puisse soumettre le résultat au contrôle de l'expérience, puisque l'on ne peut réaliser de pareils courants.	The same principle still allows this deduction in the case of open currents. Of course, the result cannot be submitted to the test of experiment, since such currents cannot be produced.
4.13.62 Si l'on veut appliquer ce mode d'analyse à la théorie d'Ampère sur les courants ouverts, on arrive à des résultats bien faits pour nous surprendre.	If we try to apply this mode of analysis to Ampère's theory of open currents, we arrive at results well calculated to surprise us.
4.13.63 D'abord, l'induction ne peut se déduire de la variation du champ magnétique d'après la formule bien connue des savants et des praticiens, et en effet, comme nous l'avons dit, il n'y a plus à proprement parler de champ magnétique.	First, induction cannot be deduced from the variation of the magnetic field by the formula well known to scientists and practical engineers. And indeed, as we have said, there is no longer, strictly speaking, any magnetic field.
4.13.64 Mais il y a plus. Si un circuit C est soumis à l'induction d'un système voltaïque variable S ; si ce système S se	But there is more. Suppose a circuit C is subject to induction from a variable voltaic system S. Sup-

	FRENCH	ENGLISH
	déplace et se déforme d'une manière quelconque, que l'intensité des courants de ce système varie suivant une loi quelconque, mais qu'après ces variations, le système revienne finalement à sa situation initiale, il semble naturel de supposer que la force électromotrice *moyenne* induite dans le circuit C est nulle.	pose this system S is displaced and deformed in any way whatever, and that the intensity of its currents varies according to any law whatever. But suppose that after these variations the system finally returns to its initial situation. It seems natural to suppose that the *mean* electromotive force induced in the circuit C is zero.
4.13.65	Cela est vrai si le circuit C est fermé et si le système S ne renferme que des courants fermés. Cela ne serait plus vrai, si l'on accepte la théorie d'Ampère, dès qu'il y aurait des courants ouverts. De sorte que, non seulement l'induction ne sera plus la variation du flux de force magnétique dans aucun des sens habituels de ce mot, mais elle ne pourra pas être représentée par la variation de quoi que ce soit.	That is true if the circuit C is closed and if the system S contains only closed currents. If we accept Ampère's theory, it would no longer be true as soon as there were open currents. Not only, then, will induction no longer be the variation of the flux of magnetic force in any of the usual senses of the word. It cannot be represented by the variation of anything whatever.
4.13.66	II. — Théorie de Helmholtz. — J'ai insisté sur les conséquences de la théorie d'Ampère et de sa façon de comprendre l'action des courants ouverts.	II. Helmholtz's theory.—I have dwelt on the consequences of Ampère's theory and of his way of understanding the action of open currents.
4.13.67	Il est difficile de méconnaître le caractère paradoxal et artificiel des propositions auxquelles on est ainsi conduit ; on est amené à penser que « çà ne doit pas être ça ».	It is hard to overlook the paradoxical and artificial character of the propositions to which we are thus led; one is brought to think that "it can't really be like that."
4.13.68	On conçoit donc que Helmholtz ait été amené à chercher autre chose.	It is understandable, then, that Helmholtz was led to look for something else.
4.13.69	Helmholtz rejette l'hypothèse fondamentale d'Ampère, à savoir que l'action mutuelle de deux éléments de courant se ramène à une force dirigée suivant la droite qui les joint.	Helmholtz rejects Ampère's fundamental hypothesis, namely that the mutual action of two current elements reduces to a force directed along the straight line joining them.
4.13.70	Il admet qu'un élément de courant n'est pas soumis à une force unique, mais à une force et à un couple. C'est même ce qui a donné lieu à la polémique célèbre de Bertrand et d'Helmholtz.	He assumes that a current element is subject not to a single force but to a force and a couple. Indeed, this is what gave rise to the famous controversy between Bertrand and Helmholtz.
4.13.71	Helmholtz remplace l'hypothèse d'Ampère par la suivante : deux éléments de courant admettent toujours un potentiel électrodynamique, dépendant uniquement de leur position et de leur orientation, et le travail des forces qu'ils exercent l'un sur l'autre est égal à la variation de ce potentiel. Ainsi Helmholtz ne peut pas plus qu'Ampère se passer de l'hypothèse ; mais au moins il ne la fait pas sans l'énoncer explicitement.	Helmholtz replaces Ampère's hypothesis with the following. Two current elements always possess an electrodynamic potential, depending solely on their position and orientation. The work of the forces they exert on each other is equal to the change in this potential. Thus Helmholtz can no more do without hypothesis than Ampère could; but at least he does not make a hypothesis without stating it explicitly.
4.13.72	Dans le cas des courants fermés, seul accessible à l'expérience, les deux théories concordent : dans tous les autres cas, elles diffèrent.	In the case of closed currents, the only one accessible to experiment, the two theories agree; in all other cases they differ.

FRENCH	ENGLISH
4.13.73 D'abord, contrairement à ce que supposait Ampère, la force à laquelle semble soumise la portion mobile d'un courant fermé n'est pas la même que cette portion mobile subirait si elle était isolée et constituait un courant ouvert.	First, contrary to what Ampère supposed, consider the force to which the movable portion of a closed current seems subject. It is not the same as the force this movable portion would undergo if it were isolated and formed an open current.
4.13.74 Revenons au circuit C′ dont nous avons parlé plus haut et qui était formé d'un fil mobile αβ glissant sur un fil fixe ; dans la seule expérience réalisable, la portion mobile αβ n'est pas isolée, mais fait partie d'un circuit fermé. Quand elle vient de AB en A′B′, le potentiel électrodynamique total varie pour deux raisons : 1° il subit un premier accroissement parce que le potentiel de A′B′ par rapport au circuit C n'est pas le même que celui de AB ; 2° il subit un second accroissement, parce qu'il faut l'augmenter des potentiels des éléments AA′ et B′B par rapport à C.	Let us go back to the circuit C′ we spoke of above, which was formed of a movable wire αβ sliding on a fixed wire. In the only experiment that can be carried out, the movable portion αβ is not isolated but forms part of a closed circuit. When it moves from AB to A′B′, the total electrodynamic potential changes for two reasons. 1. It undergoes a first increase because the potential of A′B′ with respect to the circuit C is not the same as that of AB. 2. It undergoes a second increase because the potentials of the elements AA′ and B′B with respect to C must be added to it.
4.13.75 C'est ce *double* accroissement qui représente le travail de la force à laquelle la portion AB semble soumise.	It is this *double* increase that represents the work of the force to which the portion AB seems subject.
4.13.76 Si, au contraire, αβ était isolé, le potentiel ne subirait que le premier accroissement, et c'est ce premier accroissement seulement qui mesurerait le travail de la force qui agit sur AB.	If, on the contrary, αβ were isolated, the potential would undergo only the first increase. It is this first increase alone that would measure the work of the force acting on AB.
4.13.77 En second lieu, il ne peut pas y avoir de rotation continue sans contact glissant ; et, en effet, c'est là, comme nous l'avons vu à propos des courants fermés, une conséquence immédiate de l'existence d'un potentiel électrodynamique.	Second, there can be no continuous rotation without a sliding contact. And indeed, as we saw in connection with closed currents, this is an immediate consequence of the existence of an electrodynamic potential.
4.13.78 Dans l'expérience de Faraday, si l'aimant est fixe et si la partie du courant extérieure à l'aimant parcourt un fil mobile, cette partie mobile pourra subir une rotation continue. Mais cela ne veut pas dire que si l'on supprimait les contacts du fil avec l'aimant et qu'on fît parcourir le fil par un courant *ouvert*, le fil prendrait encore un mouvement de rotation continue.	In Faraday's experiment, suppose the magnet is fixed and the part of the current outside the magnet runs through a movable wire. Then this movable part can undergo continuous rotation. But that does not mean the wire would still go into continuous rotation if we removed its contacts with the magnet and sent an *open* current through it.
4.13.79 Je viens de dire, en effet, qu'un élément *isolé* ne subit pas la même action qu'un élément mobile faisant partie d'un circuit fermé.	For I have just said that an *isolated* element does not undergo the same action as a movable element forming part of a closed circuit.
4.13.80 Autre différence : L'action d'un solénoïde fermé sur un courant fermé est nulle d'après l'expérience et d'après les deux théories ; son action sur un courant ouvert serait nulle d'après Ampère ; elle ne serait pas nulle d'après Helmholtz.	Another difference: the action of a closed solenoid on a closed current is zero according to experiment and according to both theories. Its action on an open current would be zero according to

	FRENCH	ENGLISH
		Ampère; it would not be zero according to Helmholtz.
4.13.81	D'où une conséquence importante. Nous avons donné plus haut trois définitions de la force magnétique ; la troisième n'a ici aucun sens puisqu'un élément de courant n'est plus soumis à une force unique. La première n'en a pas non plus. Qu'est-ce, en effet, qu'un pôle magnétique ? C'est l'extrémité d'un aimant linéaire indéfini. Cet aimant peut être remplacé par un solénoïde indéfini. Pour que la définition de la force magnétique eût un sens, il faudrait que l'action exercée par un courant ouvert sur un solénoïde indéfini ne dépendît que de la position de l'extrémité de ce solénoïde, c'est-à-dire que l'action sur un solénoïde fermé fût nulle. Or, nous venons de voir que ce n'était pas vrai.	Hence an important consequence. We gave above three definitions of magnetic force. The third has no meaning here, since a current element is no longer subject to a single force. Nor does the first. What, after all, is a magnetic pole? It is the end of an indefinitely long linear magnet. This magnet can be replaced by an indefinitely long solenoid. For the definition of magnetic force to have a meaning, the action exerted by an open current on an indefinitely long solenoid would have to depend only on the position of the end of that solenoid. In other words, the action on a closed solenoid would have to be zero. Now we have just seen that this is not true.
4.13.82	En revanche, rien n'empêche d'adopter la deuxième définition, celle qui est fondée sur la mesure du couple directeur qui tend à orienter une aiguille aimantée.	On the other hand, nothing prevents us from adopting the second definition, the one based on measuring the directing couple that tends to orient a magnetized needle.
4.13.83	Mais, si on l'adopte, ni les effets d'induction ni les effets électrodynamiques ne dépendront uniquement de la distribution des lignes de force de ce champ magnétique.	But if we adopt it, neither the effects of induction nor the electrodynamic effects will depend solely on the distribution of the lines of force of this magnetic field.
4.13.84	III. — Difficultés soulevées par ces théories. — La théorie de Helmholtz est un progrès sur celle d'Ampère ; il s'en faut cependant que toutes les difficultés soient aplanies. Dans l'une comme dans l'autre, le mot champ magnétique n'a pas de sens, ou, si on lui en donne un par une convention plus ou moins artificielle, les lois ordinaires, si familières à tous les électriciens, ne s'appliquent plus ; c'est ainsi que la force électromotrice induite dans un fil n'est plus mesurée par le nombre des lignes de force rencontrées par ce fil.	III. Difficulties raised by these theories.—Helmholtz's theory is an advance on Ampère's, yet it is far from smoothing out all the difficulties. In the one as in the other, the term "magnetic field" has no meaning. If it is given one by a more or less artificial convention, the ordinary laws, so familiar to all electricians, no longer apply. Thus the electromotive force induced in a wire is no longer measured by the number of lines of force cut by that wire.
4.13.85	Et nos répugnances ne proviennent pas seulement de ce qu'il est difficile de renoncer à des habitudes invétérées de langage et de pensée. Il y a quelque chose de plus. Si nous ne croyons pas aux actions à distance, il faut expliquer les phénomènes électrodynamiques par une modification du milieu. C'est précisément cette modification que l'on appelle champ magnétique, et alors les effets électrodynamiques ne devraient dépendre que de ce champ.	And our reluctance does not come merely from the difficulty of giving up ingrained habits of language and thought. There is something more. If we do not believe in action at a distance, electrodynamic phenomena must be explained by a modification of the medium. It is precisely this modification that is called the magnetic field, and so electrodynamic effects ought to depend only on this field.
4.13.86	Toutes ces difficultés proviennent de l'hypothèse des courants ouverts.	All these difficulties arise from the hypothesis of open currents.

	FRENCH	ENGLISH
4.13.87	IV. — Théorie de Maxwell. — Telles étaient les difficultés soulevées par les théories régnantes quand parut Maxwell, qui, d'un trait de plume, les fit toutes disparaître. Dans ses idées, en effet, il n'y a plus que des courants fermés.	IV. Maxwell's theory.—Such were the difficulties raised by the prevailing theories when Maxwell appeared and, with a stroke of the pen, made them all disappear. In his scheme, in fact, there are only closed currents.
4.13.88	Maxwell admet que, si, dans un diélectrique, le champ électrique vient à varier, ce diélectrique devient le siège d'un phénomène particulier agissant sur le galvanomètre comme un courant et qu'il appelle *courant de déplacement*.	Maxwell assumes that if the electric field in a dielectric happens to vary, the dielectric becomes the seat of a special phenomenon. This phenomenon acts on the galvanometer like a current, and he calls it the *displacement current*.
4.13.89	Si alors deux conducteurs portant des charges contraires sont mis en communication par un fil, il règne dans ce fil pendant la décharge un courant de conduction ouvert ; mais il se produit en même temps, dans le diélectrique ambiant, des courants de déplacement qui ferment ce courant de conduction.	If, then, two conductors carrying opposite charges are connected by a wire, an open conduction current flows in the wire during the discharge. But at the same time displacement currents arise in the surrounding dielectric, and these close the conduction current.
4.13.90	On sait que la théorie de Maxwell conduit à l'explication des phénomènes optiques, qui seraient dus à des oscillations électriques extrêmement rapides.	As is well known, Maxwell's theory leads to an explanation of optical phenomena, which would be due to extremely rapid electrical oscillations.
4.13.91	À cette époque une pareille conception n'était qu'une hypothèse hardie qui ne pouvait s'appuyer d'aucune expérience.	At that time such a conception was only a bold hypothesis, without the support of any experiment.
4.13.92	Au bout de vingt ans, les idées de Maxwell reçurent la confirmation de l'expérience. Hertz parvint à produire des systèmes d'oscillations électriques qui reproduisent toutes les propriétés de la lumière et n'en diffèrent que par la longueur d'onde, c'est-à-dire comme le violet diffère du rouge. Il fit en quelque sorte la synthèse de la lumière. C'est de là comme chacun sait qu'est sortie la télégraphie sans fil.	Twenty years later, Maxwell's ideas were confirmed by experiment. Hertz succeeded in producing systems of electrical oscillations that reproduce all the properties of light and differ from it only in wavelength—that is, as violet differs from red. He achieved, in a sense, the synthesis of light. It is from this, as everyone knows, that wireless telegraphy has come.
4.13.93	On pourrait dire que Hertz n'a pas démontré directement l'idée fondamentale de Maxwell, l'action du courant de déplacement sur le galvanomètre. C'est vrai dans un sens, et ce qu'il a montré directement, en somme, c'est que l'induction électromagnétique ne se propage pas instantanément comme on le croyait, mais avec la vitesse de la lumière.	It might be said that Hertz did not directly prove Maxwell's fundamental idea, the action of the displacement current on the galvanometer. That is true in one sense; what he showed directly, in short, is that electromagnetic induction is not propagated instantaneously, as had been believed, but with the speed of light.
4.13.94	Seulement, supposer qu'il n'y a pas de courant de déplacement et que l'induction se propage avec la vitesse de la lumière ; ou bien, supposer que les courants de déplacement produisent des effets d'induction et que l'induction se propage instantanément, *cela est la même chose*.	But to suppose that there is no displacement current and that induction is propagated with the speed of light, or to suppose that displacement currents produce induction effects and that induction is propagated instantaneously—*this is the same thing*.
4.13.95		

	FRENCH	ENGLISH
	C'est ce qu'on ne voit pas au premier abord, mais ce que l'on démontre par une analyse que je ne puis même songer à résumer ici.	This is not obvious at first sight, but it can be proved by an analysis that I cannot even think of summarizing here.

ROWLAND'S EXPERIMENTS AND LORENTZ'S ELECTRONS

Convection currents act like conduction currents, and Lorentz makes all currents motions of electrons.

	FRENCH	ENGLISH
4.13.96	V. — Expériences de Rowland. — Mais, je l'ai dit plus haut, il y a deux sortes de courants de conduction ouverts : il y a d'abord les courants de décharge d'un condensateur ou d'un conducteur quelconque.	V. Rowland's experiments.—But, as I said above, there are two kinds of open conduction currents. First, there are the discharge currents of a capacitor or of any conductor whatever.
4.13.97	Il y a aussi les cas où des charges électriques décrivent un contour fermé, en se déplaçant par conduction dans une partie du circuit et par convection dans l'autre partie.	There are also the cases where electric charges travel round a closed path, moving by conduction in one part of the circuit and by convection in the other.
4.13.98	Pour les courants ouverts de la première sorte, la question pouvait être regardée comme résolue : ils étaient fermés par les courants de déplacement.	For open currents of the first kind, the question could be regarded as solved: they were closed by displacement currents.
4.13.99	Pour les courants ouverts de la deuxième sorte, la solution paraissait encore plus simple ; si le courant était fermé, ce ne pouvait être, semblait-il, que par le courant de convection lui-même. Pour cela, il suffisait d'admettre qu'un « courant de convection », c'est-à-dire un conducteur chargé en mouvement, pouvait agir sur le galvanomètre. Mais la confirmation expérimentale manquait. Il paraissait difficile, en effet, d'obtenir une intensité suffisante, même en augmentant autant que possible la charge et la vitesse des conducteurs.	For open currents of the second kind, the solution seemed simpler still: if the current was closed, it could only be, it seemed, by the convection current itself. For that, it was enough to assume that a "convection current"—that is, a charged conductor in motion—could act on the galvanometer. But experimental confirmation was lacking. It seemed difficult, in fact, to obtain a sufficient intensity, even by increasing the charge and the speed of the conductors as much as possible.
4.13.100	Ce fut Rowland, un expérimentateur extrêmement habile, qui le premier triompha de ces difficultés. Un disque recevait une forte charge électrostatique et une très grande vitesse de rotation. Un système magnétique astatique, placé à côté du disque, subissait des déviations.	It was Rowland, an extremely skillful experimenter, who first overcame these difficulties. A disk was given a strong electrostatic charge and a very high speed of rotation. An astatic magnetic system placed beside the disk was deflected.[41]
4.13.101	L'expérience fut faite deux fois par Rowland : une fois à Berlin, une fois à Baltimore ; elle fut ensuite reprise par Himstedt. Ces physiciens crurent même pouvoir annoncer qu'ils avaient pu effectuer des mesures quantitatives.	Rowland performed the experiment twice, once in Berlin and once in Baltimore; it was later repeated by Himstedt. These physicists even believed they could announce that they had made quantitative measurements.
4.13.102	Cette loi de Rowland fut admise sans contestation par tous les physiciens.	This law of Rowland's was accepted without dispute by all physicists.
4.13.103	Tout, d'ailleurs, paraissait la confirmer. L'étincelle produit certainement un effet magnétique ; or, ne	Everything, moreover, seemed to confirm it. The spark certainly produces a magnetic effect; now, does it not seem likely that discharge by spark is

FRENCH	ENGLISH
semble-t-il pas vraisemblable que la décharge par étincelle est due à des particules arrachées à l'une des électrodes et transportées sur l'autre électrode avec leur charge ? Le spectre même de l'étincelle, où l'on reconnaît les raies du métal de l'électrode n'en est-il pas une preuve ? L'étincelle serait alors un véritable courant de convection.	due to particles torn from one of the electrodes and carried, with their charge, to the other electrode? Is not the very spectrum of the spark, in which one recognizes the lines of the electrode's metal, a proof of this? The spark would then be a genuine convection current.
4.13.104 D'un autre côté, on admet aussi que, dans un électrolyte, l'électricité est convoyée par les ions en mouvement. Le courant dans un électrolyte serait donc aussi un courant de convection ; or, il agit sur l'aiguille aimantée.	On the other hand, it is also accepted that in an electrolyte electricity is conveyed by moving ions. The current in an electrolyte would therefore also be a convection current; and it acts on the magnetic needle.
4.13.105 De même pour les rayons cathodiques ; Crookes attribue ces rayons à l'effet d'une matière très subtile, chargée d'électricité négative et animée d'une très grande vitesse ; il les regarde, en d'autres termes, comme des courants de convection et sa façon de voir, un instant contestée, est aujourd'hui adoptée partout. Or, ces rayons cathodiques sont déviés par l'aimant. En vertu du principe de l'action et de la réaction, ils doivent à leur tour dévier l'aiguille aimantée.	Likewise with cathode rays. Crookes attributes these rays to the effect of a very subtle matter, charged with negative electricity and moving at very great speed; in other words, he regards them as convection currents, and his view, disputed for a time, is now adopted everywhere. Now, these cathode rays are deflected by a magnet. By the principle of action and reaction, they must in turn deflect the magnetic needle.[42]
4.13.106 Il est vrai que Hertz crut avoir démontré que les rayons cathodiques ne convoient pas d'électricité négative et qu'ils n'agissent pas sur l'aiguille aimantée. Mais Hertz se trompait ; d'abord Perrin a pu recueillir l'électricité transportée par ces rayons et dont Hertz niait l'existence ; le savant allemand paraît avoir été trompé par des effets dus à l'action des rayons X, qui n'étaient pas encore découverts. Ensuite, et tout récemment, on a mis en évidence l'action des rayons cathodiques sur l'aiguille aimantée et reconnu la cause de l'erreur commise par Hertz.	It is true that Hertz believed he had shown that cathode rays carry no negative electricity and do not act on the magnetic needle. But Hertz was mistaken. First, Perrin was able to collect the electricity carried by these rays, whose existence Hertz denied; the German scientist seems to have been misled by effects due to the action of X-rays, which had not yet been discovered. Second, and quite recently, the action of cathode rays on the magnetic needle has been demonstrated, and the cause of Hertz's error identified.[43]
4.13.107 Ainsi, tous ces phénomènes regardés comme des courants de convection, étincelles, courants électrolytiques, rayons cathodiques, agissent de la même manière sur le galvanomètre et conformément à la loi de Rowland.	Thus all these phenomena regarded as convection currents—sparks, electrolytic currents, cathode rays—act in the same way on the galvanometer, in accordance with Rowland's law.
4.13.108 VI. — Théorie de Lorentz. — On ne tarda pas à aller plus loin. D'après la théorie de Lorentz, les courants de conduction eux-mêmes seraient de véritables courants de convection : l'électricité resterait indissolublement attachée à certaines particules matérielles appelées *électrons* ; ce serait la circulation de ces électrons à travers	VI. Lorentz's theory.—It was not long before people went further. According to Lorentz's theory, conduction currents themselves would be genuine convection currents: electricity would remain inseparably attached to certain material particles

41 Henry Augustus Rowland (1848–1901), American physicist at Johns Hopkins University in Baltimore; he first performed this experiment in Helmholtz's Berlin laboratory in 1876.
42 William Crookes (1832–1919), English chemist and physicist who studied discharges in evacuated tubes.
43 Jean Perrin (1870–1942), French physicist, who showed in 1895 that cathode rays carry negative charge.

	FRENCH	ENGLISH
	les corps qui produirait les courants voltaïques, et ce qui distinguerait les conducteurs des isolants, c'est que les uns se laisseraient traverser par ces électrons, tandis que les autres arrêteraient leurs mouvements.	called *electrons*; it would be the circulation of these electrons through bodies that produced voltaic currents, and what would distinguish conductors from insulators is that the former let these electrons pass through, while the latter stopped their motion.
4.13.109	La théorie de Lorentz est très séduisante, elle donne une explication très simple de certains phénomènes dont les anciennes théories, même celle de Maxwell sous sa forme primitive, ne pouvaient rendre compte d'une façon satisfaisante, par exemple, l'aberration de la lumière, l'entraînement partiel des ondes lumineuses, la polarisation magnétique, l'expérience de Zeeman.	Lorentz's theory is very attractive. It gives a very simple explanation of certain phenomena that the older theories, even Maxwell's in its original form, could not account for satisfactorily: for example, the aberration of light, the partial dragging of light waves, magnetic polarization, and Zeeman's experiment.
4.13.110	Quelques objections subsistaient encore. Les phénomènes dont un système est le siège semblaient devoir dépendre de la vitesse absolue de translation du centre de gravité de ce système, ce qui est contraire à l'idée que nous nous faisons de la relativité de l'espace. À la soutenance de M. Crémieu, M. Lippmann a mis cette objection sous une forme saisissante. Supposons deux conducteurs chargés, animés d'une même vitesse de translation. Ils sont en repos relatif ; cependant, chacun d'eux équivalant à un courant de convection, ils doivent s'attirer, et on pourrait, en mesurant cette attraction, mesurer leur vitesse absolue.	Some objections still remained. The phenomena occurring in a system seemed bound to depend on the absolute speed of translation of that system's center of gravity, which is contrary to our idea of the relativity of space. At Crémieu's thesis defense, Lippmann put this objection in a striking form. Suppose two charged conductors moving with the same speed of translation. They are at rest relative to each other; yet, since each is equivalent to a convection current, they must attract each other, and by measuring this attraction one could measure their absolute speed.[44]
4.13.111	Non, répondaient les partisans de Lorentz ; ce que l'on mesurerait ainsi, ce n'est pas leur vitesse absolue, mais leur vitesse relative *par rapport à l'éther*, de sorte que le principe de relativité est sauf. Depuis, Lorentz a d'ailleurs trouvé une réponse plus subtile, mais beaucoup plus satisfaisante.	No, answered Lorentz's supporters: what would be measured in this way is not their absolute speed but their relative speed *with respect to the ether*, so that the principle of relativity is safe. Since then, moreover, Lorentz has found a subtler, but far more satisfactory, answer.
4.13.112	Quoi qu'il en soit de ces dernières objections, l'édifice de l'électrodynamique semble, au moins dans ses grandes lignes, définitivement construit ; tout se présente sous l'aspect le plus satisfaisant ; les théories d'Ampère et de Helmholtz, faites pour les courants ouverts qui n'existent plus, ne semblent plus avoir qu'un intérêt purement historique.	Whatever may be said of these last objections, the edifice of electrodynamics seems, at least in its main outlines, to be definitively built; everything looks as satisfactory as could be; the theories of Ampère and Helmholtz, made for open currents that no longer exist, now seem to have no more than a purely historical interest.
4.13.113	L'histoire de ces variations n'en sera pas moins instructive ; elle nous apprendra à quels pièges le savant est exposé, et comment il peut avoir l'espoir d'y échapper.	The history of these shifts will be no less instructive for that; it will teach us what traps the scientist is exposed to, and how he may hope to escape them.

44 Victor Crémieu defended a doctoral thesis in Paris (1901) whose experiments seemed to contradict Rowland's; the physicist Gabriel Lippmann sat on the examining board.

CHAPTER XIV: THE END OF MATTER

Experiments on electrons suggest that mass may be borrowed from the ether, so that matter would not exist.

	FRENCH	ENGLISH
4.14.1	L'une des découvertes les plus étonnantes que les physiciens aient annoncées dans ces dernières années, c'est que la matière n'existe pas. Hâtons-nous de dire que cette découverte n'est pas encore définitive. L'attribut essentiel de la matière, c'est sa masse, son inertie. La masse est ce qui partout et toujours demeure constant, ce qui subsiste quand une transformation chimique a altéré toutes les qualités sensibles de la matière et semble en avoir fait un autre corps. Si donc on venait à démontrer que la masse, l'inertie de la matière ne lui appartiennent pas en réalité, que c'est un luxe d'emprunt dont elle se pare, que cette masse, la constante par excellence, est elle-même susceptible d'altération, on pourrait bien dire que la matière n'existe pas.	One of the most astonishing discoveries that physicists have announced in recent years is that matter does not exist. Let us hasten to add that this discovery is not yet final. The essential attribute of matter is its mass, its inertia. Mass is what remains constant everywhere and always, what persists when a chemical transformation has altered all the perceptible qualities of matter and seems to have turned it into another body. So if it were shown that the mass, the inertia of matter does not really belong to it, that it is borrowed finery with which matter adorns itself, that this mass, the constant par excellence, is itself liable to change, then one might well say that matter does not exist.
	Or, c'est là précisément ce qu'on annonce.	Now, that is precisely what is being announced.
46		
4.14.2	Les vitesses que nous avions pu observer jusqu'ici étaient bien faibles, puisque les corps célestes, qui laissent bien loin derrière eux tous nos automobiles, font à peine du 60 ou du 100 « kilomètres » à la seconde ; la lumière, il est vrai, va 3,000 fois plus vite, mais ce n'est pas une matière qui se déplace, c'est une perturbation qui chemine à travers une substance relativement immobile comme une vague à la surface de l'océan. Toutes les observations faites avec ces faibles vitesses montraient la constance de la masse, et personne ne s'était demandé s'il en serait encore de même avec des vitesses plus grandes.	The speeds we had been able to observe until now were very small, since the heavenly bodies, which leave all our automobiles far behind, barely do 60 or 100 "kilometers" a second. Light, it is true, goes 3,000 times faster, but it is not matter that moves: it is a disturbance traveling through a relatively motionless substance, like a wave on the surface of the ocean. All observations made at these low speeds showed that mass is constant, and no one had asked whether the same would still hold at higher speeds.
4.14.3	Ce sont les infiniment petits qui ont battu le record de Mercure, la planète la plus rapide : je veux parler des corpuscules dont les mouvements produisent les rayons cathodiques et les rayons du radium. On sait que ces radiations sont dues à un véritable bombardement moléculaire. Les projectiles lancés dans ce bombardement sont chargés d'électricité négative, et on peut s'en assurer en recueillant cette électricité dans un	It is the infinitely small that have beaten the record of Mercury, the fastest planet: I mean the corpuscles whose motions produce cathode rays and the rays of radium. These radiations are known to be due to a genuine molecular bombardment. The projectiles hurled in this bombardment are charged with negative electricity, as can be verified by collecting this electricity in a Faraday cyl-

46

[1] Voir l'*Évolution de la Matière*, par Gustave Le Bon.

[1] See *L'Évolution de la Matière*, by Gustave Le Bon.[45]

45 Gustave Le Bon (1841–1931), French physician and popular writer on psychology and science; this book (1905) argued that matter is slowly dissolving into the ether.

FRENCH

cylindre de Faraday. À cause de leur charge ils sont déviés tant par un champ magnétique que par un champ électrique, et la comparaison de ces déviations peut nous faire connaître leur vitesse et le rapport de leur charge à leur masse.

4.14.4 Or, ces mesures nous ont révélé d'une part que leur vitesse est énorme, qu'elle est le dixième ou le tiers de celle de la lumière, mille fois celle des planètes, et d'autre part que leur charge est très considérable par rapport à leur masse. Chaque corpuscule en mouvement représente donc un courant électrique notable. Mais nous savons que les courants électriques présentent une sorte d'inertie spéciale appelée *self-induction*. Un courant une fois établi tend à se maintenir, et c'est pour cela que quand on veut rompre un courant, en coupant le conducteur qu'il traverse, on voit jaillir une étincelle au point de rupture. Ainsi le courant tend à conserver son intensité de même qu'un corps en mouvement tend à conserver sa vitesse.

Donc notre corpuscule cathodique résistera aux causes qui pourraient altérer sa vitesse pour deux raisons : par son inertie proprement dite d'abord, et ensuite par sa self-induction, parce que toute altération de la vitesse serait en même temps une altération du courant correspondant. Le corpuscule — *l'électron*, comme on dit — aura donc deux inerties : l'inertie mécanique, et l'inertie électromagnétique.

4.14.5 MM. Abraham et Kaufmann, l'un calculateur, l'autre expérimentateur, ont uni leurs efforts pour déterminer la part de l'une et de l'autre. Ils ont été pour cela obligés d'admettre une hypothèse ; ils ont pensé que tous les électrons négatifs sont identiques, qu'ils portent la même charge, essentiellement constante, que les dissemblances que l'on constate entre eux proviennent uniquement des vitesses différentes dont ils sont animés. Quand la vitesse varie, la masse réelle, la masse mécanique, demeure constante, c'est pour ainsi dire sa définition même ; mais l'inertie électromagnétique, qui contribue à former la masse apparente, croît avec la vitesse suivant une certaine loi.

Il doit donc y avoir une relation entre la vitesse et le rapport de la masse à la charge, quantités que l'on peut calculer, nous l'avons dit, en observant les déviations des rayons sous l'action d'un aimant ou d'un champ électrique ; et l'étude de cette relation permet de

ENGLISH

inder. Because of their charge they are deflected both by a magnetic field and by an electric field, and comparing these deflections can tell us their speed and the ratio of their charge to their mass.

Now, these measurements have shown us, on the one hand, that their speed is enormous—a tenth or a third of that of light, a thousand times that of the planets—and, on the other, that their charge is very large relative to their mass. Each moving corpuscle therefore amounts to an appreciable electric current. But we know that electric currents display a special kind of inertia called *self-induction*. A current, once established, tends to maintain itself; that is why, when one tries to break a current by cutting the conductor it flows through, a spark is seen to leap at the break. Thus the current tends to keep its intensity just as a moving body tends to keep its speed.

So our cathode corpuscle will resist the causes that might alter its speed for two reasons: first, by its inertia properly so called, and second, by its self-induction, because any change in its speed would at the same time be a change in the corresponding current. The corpuscle—the *electron*, as it is called—will therefore have two inertias: mechanical inertia and electromagnetic inertia.

Abraham and Kaufmann, one doing the calculations and the other the experiments, joined forces to determine the share of each. To do so they had to adopt a hypothesis: they assumed that all negative electrons are identical, that they carry the same charge, which is essentially constant, and that the differences observed among them come solely from the different speeds at which they move. When the speed varies, the real mass, the mechanical mass, remains constant—that is, so to speak, its very definition; but the electromagnetic inertia, which helps make up the apparent mass, increases with speed according to a certain law.[47]

There must therefore be a relation between the speed and the ratio of mass to charge—quantities that can be calculated, as we have said, by observing how the rays are deflected by a magnet or an electric field; and studying this relation makes

47 Max Abraham (1875–1922), German theoretical physicist; Walter Kaufmann (1871–1947), German experimental physicist who measured the deflection of fast electrons from 1901 onward.

FRENCH

déterminer la part des deux inerties. Le résultat est tout à fait surprenant : *la masse réelle est nulle*. Il est vrai qu'il faut admettre l'hypothèse faite au début, mais la concordance de la courbe théorique et de la courbe expérimentale est assez grande pour rendre cette hypothèse fort vraisemblable.

4.14.6 Ainsi ces électrons négatifs n'ont pas de masse proprement dite ; s'ils semblent doués d'inertie c'est qu'ils ne sauraient changer de vitesse sans déranger l'éther. Leur inertie apparente n'est qu'un emprunt, elle n'est pas à eux, elle est à l'éther. Mais ces électrons négatifs ne sont pas toute la matière ; on pourrait donc admettre qu'en dehors d'eux il y a une vraie matière douée d'une inertie propre. Il y a certaines radiations — comme les rayons-canal de Goldstein, les rayons α du radium — qui sont dues aussi à une pluie de projectiles, mais de projectiles chargés positivement ; ces électrons positifs sont-ils eux aussi dépourvus de masse ?

Il est impossible de le dire, parce qu'ils sont beaucoup plus lourds et beaucoup moins rapides que les électrons négatifs. Et alors deux hypothèses restent admissibles : ou bien les électrons sont plus lourds, parce qu'en dehors de leur inertie électromagnétique empruntée ils ont une inertie mécanique propre, et alors ce sont eux qui sont la vraie matière ; ou bien ils sont sans masse comme les autres, et s'ils nous paraissent plus lourds, c'est parce qu'ils sont plus petits. Je dis bien plus petits, quoique cela puisse paraître paradoxal ; car dans cette conception le corpuscule ne serait qu'un vide dans l'éther, seul réel, seul doué d'inertie.

4.14.7 Jusqu'ici la matière n'est pas trop compromise ; nous pouvons encore adopter la première hypothèse, ou même croire qu'en dehors des électrons positifs et négatifs, il y a des atomes neutres. Les récentes recherches de Lorentz vont nous enlever cette dernière ressource. Nous sommes entraînés dans le mouvement de la Terre, qui est très rapide ; les phénomènes optiques et électriques ne vont-ils pas être altérés par cette translation ? On l'a cru longtemps, et on a supposé que les observations décèleraient des différences, suivant l'orientation des appareils par rapport au mouvement de la Terre. Il n'en a rien été, et les mesures les plus délicates n'ont rien montré de semblable.

ENGLISH

it possible to determine the share of the two inertias. The result is quite surprising: *the real mass is zero*. It is true that one has to accept the hypothesis made at the outset, but the agreement between the theoretical curve and the experimental curve is close enough to make that hypothesis very likely.

Thus these negative electrons have no mass properly so called; if they seem endowed with inertia, it is because they cannot change their speed without disturbing the ether. Their apparent inertia is only borrowed: it is not theirs, it belongs to the ether. But these negative electrons are not the whole of matter; one could therefore suppose that apart from them there is a true matter endowed with an inertia of its own. There are certain radiations—such as Goldstein's canal rays and the α rays of radium—that are also due to a rain of projectiles, but of positively charged projectiles. Are these positive electrons also devoid of mass?[48]

It is impossible to say, because they are much heavier and much slower than the negative electrons. So two hypotheses remain admissible. Either these electrons are heavier because, besides their borrowed electromagnetic inertia, they have a mechanical inertia of their own, and then it is they that are the true matter; or they are massless like the others, and if they appear heavier to us, it is because they are smaller. I do mean smaller, paradoxical as that may seem; for on this view the corpuscle would be nothing but a hollow in the ether, which alone is real and alone endowed with inertia.

So far matter is not too badly compromised; we can still adopt the first hypothesis, or even believe that apart from positive and negative electrons there are neutral atoms. Lorentz's recent research is going to deprive us of this last resource. We are carried along in the motion of the Earth, which is very rapid; will not optical and electrical phenomena be altered by this translation? This was long believed, and it was supposed that observations would reveal differences depending on how the apparatus was oriented relative to the Earth's motion. Nothing of the kind happened, and the most

48 Canal rays: streams of positive ions, discovered by Eugen Goldstein in 1886, that pass through holes ("canals") in the cathode of a discharge tube.

FRENCH

ENGLISH

delicate measurements showed nothing of the sort.

Et en cela les expériences justifiaient une répugnance commune à tous les physiciens ; si on avait trouvé quelque chose en effet, on aurait pu connaître non seulement le mouvement relatif de la Terre par rapport au Soleil, mais son mouvement absolu dans l'éther. Or, beaucoup de personnes ont peine à croire qu'aucune expérience puisse donner autre chose qu'un mouvement relatif ; elles accepteraient plus volontiers de croire que la matière n'a pas de masse.

And in this the experiments justified a reluctance shared by all physicists; for if something had been found, one could have known not only the relative motion of the Earth with respect to the Sun but its absolute motion in the ether. Now, many people find it hard to believe that any experiment could give anything other than relative motion; they would more readily agree to believe that matter has no mass.

4.14.8 On ne fut donc pas trop étonné des résultats négatifs obtenus ; ils étaient contraires aux théories enseignées, mais ils flattaient un instinct profond, antérieur à toutes ces théories. Encore fallait-il modifier ces théories en conséquence, pour les mettre en harmonie avec les faits. C'est ce qu'a fait Fitzgerald, par une hypothèse surprenante : il admet que tous les corps subissent une contraction d'un cent-millionième environ dans la direction du mouvement de la Terre. Une sphère parfaite devient un ellipsoïde aplati, et si on la fait tourner, elle se déforme de façon que le petit axe de l'ellipsoïde reste toujours parallèle à la vitesse de la Terre.

So no one was very surprised by the negative results obtained; they ran counter to the theories that were taught, but they gratified a deep instinct older than all those theories. Still, those theories had to be modified accordingly, to bring them into harmony with the facts. This is what FitzGerald did, by a surprising hypothesis: he supposes that all bodies undergo a contraction of about one hundred-millionth in the direction of the Earth's motion. A perfect sphere becomes a flattened ellipsoid, and if it is rotated, it deforms in such a way that the short axis of the ellipsoid always stays parallel to the Earth's velocity.[49]

Comme les instruments de mesure subissent les mêmes déformations que les objets à mesurer, on ne s'aperçoit de rien, à moins qu'on ne s'avise de déterminer le temps que met la lumière pour parcourir la longueur de l'objet.

Since measuring instruments undergo the same deformations as the objects to be measured, nothing is noticed, unless one thinks of determining the time light takes to travel the length of the object.

4.14.9 Cette hypothèse rend compte des faits observés. Mais ce n'est pas assez ; on fera un jour des observations plus précises encore ; les résultats seront-ils cette fois positifs ; nous mettront-ils en mesure de déterminer le mouvement absolu de la Terre ? Lorentz ne l'a pas pensé ; il croit que cette détermination sera toujours impossible ; l'instinct commun de tous les physiciens, les insuccès éprouvés jusqu'ici le lui garantissent suffisamment. Considérons donc cette impossibilité comme une loi générale de la nature ; admettons-la comme postulat. Quelles en seront les conséquences ?

This hypothesis accounts for the observed facts. But that is not enough. Some day still more precise observations will be made; will the results this time be positive? Will they enable us to determine the absolute motion of the Earth? Lorentz did not think so; he believes this determination will always be impossible, and the common instinct of all physicists and the failures met with so far are guarantee enough for him. Let us therefore regard this impossibility as a general law of nature; let us accept it as a postulate. What will its consequences be?

C'est ce qu'a cherché Lorentz, et il a trouvé que tous les atomes, tous les électrons positifs ou négatifs, devaient avoir une inertie variable avec la vitesse, et précisément d'après les mêmes lois. Ainsi tout atome matériel serait formé d'électrons positifs, petits et lourds, et d'électrons

That is what Lorentz set out to find, and he found that all atoms, all electrons, positive or negative, must have an inertia that varies with speed, and according to precisely the same laws. Thus every material atom would be made of positive elec-

49 George Francis FitzGerald (1851–1901), Irish physicist; Lorentz proposed the same contraction independently.

	FRENCH	ENGLISH
	négatifs, gros et légers, et si la matière sensible ne nous paraît pas électrisée, c'est que les deux sortes d'électrons sont à peu près en nombre égal. Les uns et les autres sont dépourvus de masse et n'ont qu'une inertie d'emprunt. Dans ce système il n'y a pas de vraie matière, il n'y a plus que des trous dans l'éther.	trons, small and heavy, and negative electrons, large and light; and if perceptible matter does not seem electrified to us, it is because the two kinds of electrons are roughly equal in number. Both kinds are devoid of mass and have only a borrowed inertia. In this system there is no true matter; there are only holes in the ether.
4.14.10	Pour M. Langevin, la matière serait de l'éther liquéfié, et ayant perdu ses propriétés ; quand la matière se déplacerait, ce ne serait pas cette masse liquéfiée qui cheminerait à travers l'éther ; mais la liquéfaction s'étendrait de proche en proche à de nouvelles portions de l'éther, pendant qu'en arrière les parties d'abord liquéfiées reprendraient leur état primitif. La matière en se mouvant ne conserverait pas son identité.	For Langevin, matter would be liquefied ether that has lost its properties. When matter moved, it would not be this liquefied mass traveling through the ether; rather, the liquefaction would spread step by step to new portions of the ether, while behind, the parts first liquefied would return to their original state. Matter, in moving, would not keep its identity.[50]
4.14.11	Voilà où en était la question il y a quelque temps ; mais voici que M. Kaufmann annonce de nouvelles expériences. L'électron négatif, dont la vitesse est énorme, devrait éprouver la contraction de Fitzgerald, et la relation entre la vitesse et la masse s'en trouverait modifiée ; or, les expériences récentes ne confirment pas cette prévision ; tout s'écroulerait alors, et la matière reprendrait ses droits à l'existence. Mais les expériences sont délicates, et une conclusion définitive serait aujourd'hui prématurée.	That is where the question stood a short while ago; but now Kaufmann announces new experiments. The negative electron, whose speed is enormous, ought to undergo the FitzGerald contraction, and the relation between speed and mass would be modified as a result; but the recent experiments do not confirm this prediction. Everything would then collapse, and matter would regain its right to exist. But the experiments are delicate, and a definitive conclusion would be premature today.

50 Paul Langevin (1872–1946), French physicist, a former student of Pierre Curie.